

奥赛经典

解题金钥匙系列

高中数学

主编/沈文选

湖南师范大学出版社

不一般的你实现不一般的梦想！

奥赛经典

权威的金牌教练

经典的训练题型

创新的解题秘诀

前沿的竞赛题库

同步的课程阐释

解题金钥匙系列

从书策划

周玉波+陈宏平+何海龙

组　稿

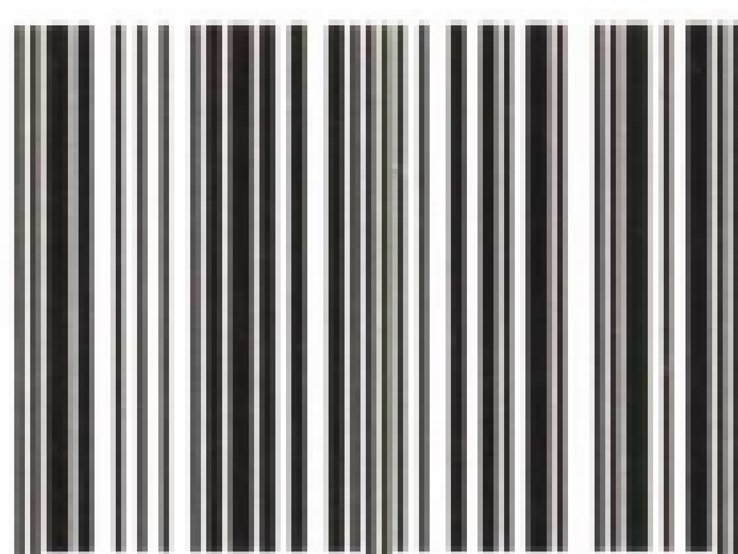
何海龙

责任编辑

黄道见

装帧版式

周基东



ISBN 7-81081-534-2/G・276

定价：24.00元

奥赛经典

解题金钥匙系列

高中数学

主编/沈文选

编者/沈文选　吴仁芳　肖登鹏　羊明亮

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解题金钥匙系列·高中数学/沈文选主编.—长沙:湖南师范大学出版社,2006.4
(奥赛经典丛书)
ISBN 7-81081-534-2

Ⅰ.解… Ⅱ.沈… Ⅲ.数学课—高中—解题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第086448号

解题金钥匙系列·高中数学

◇主　　编:沈文选

◇丛书策划:周玉波　陈宏平　何海龙
◇丛书组稿:何海龙
◇责任编辑:黄道见
◇责任校对:蒋旭东
◇出版发行:湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
电话/0731.8853867　8872751　传真/0731.8872636
◇经销:湖南省新华书店
◇印刷:湖南航天长宇印刷有限责任公司

◇开本:730×960　1/16
◇印张:26.25
◇字数:704千字
◇版次:2006年4月第1版　2006年4月第1次印刷
◇印数:1—6000册
◇书号:ISBN 7-81081-534-2/G·276
◇定价:24.00元



您身边的金牌教练

沈文选	教　　授	金牌教练	湖南师范大学
唐立华	特级教师	金牌教练	华东师范大学附中
冯志刚	特级教师	金牌教练	上海中学
冯跃峰	特级教师	金牌教练	深圳高级中学
王树国	高级教师	金牌教练	湖南师范大学附中
黄生训	教　　授	金牌教练	湖南师范大学
武建谋	特级教师	金牌教练	长沙市一中
刘旭华	高级教师	金牌教练	湖南师范大学附中
黄洪才	高级教师	金牌教练	长沙市一中
彭大斌	特级教师	金牌教练	长沙市一中
邓立新	特级教师	金牌教练	长沙市一中
陈云莎	特级教师	金牌教练	湖南师范大学附中
肖鹏飞	特级教师	金牌教练	湖南师范大学附中
高建军	特级教师	金牌教练	长沙市一中
黄国强	特级教师	金牌教练	湖南师范大学附中
汪训贤	特级教师	金牌教练	湖南师范大学附中
吴耀斌	副 教 授	金牌教练	中南大学
向期中	高级教师	金牌教练	长郡中学
曹利国	高级教师	金牌教练	长沙市一中



丛书告白

目标

《奥赛经典》丛书是我社十几年来畅销不衰的品牌图书，在读者中享有盛誉。

学会科学的解题方法，总结正确的解题规律，可以起到举一反三、事半功倍的效果。“解题金钥匙系列”主要针对各学科奥林匹克竞赛中常用的解题技巧，归纳、总结具有代表性的解题方法。学会运用这些解题方法，不但能帮助你在奥林匹克初赛和复赛中一展身手，更能帮助你在中考和高考中实现自己的梦想！

作者

作者全部为各学科奥林匹克国际竞赛金牌选手教练，他们培养的选手屡次在国内和国际大赛中获得奖牌，这套系列图书是他们多年心血的结晶和经验的总结。

内容

以“学会科学的解题方法，总结正确的解题规律”为宗旨，以新教学大纲为指导，以“突出方法讲解、培养解题技能、拓展创新思维”为重点，各学科按照新教材的全部知识点和联赛的测试范围分初中部分和高中部分编写。

体例

学习目标→以简短的篇幅介绍本节要学习哪些内容，达到什么目标。

解题钥匙→列举几个经典、新颖的例题，解析并归纳解题的方法和技巧。

解题尝试→相似题型实战演练，附答案。

奋发图强，力争上游，
为提高我国数学水平
而共同努力。

王梓坤敬书

▲王梓坤：中国科学院院士

目 录

第一篇 装备精良“兵器”——熟练活用几种重要方法

第二篇　懂得诸子“兵法”——会寻善析几类题型思路

第三篇 部署优势“兵力”——融通巧握几种妙解技能



第一篇 装备精良“兵器”

——熟练活用几种重要方法

一般地，解题之成功，在很大的程度上依赖于选择一种最适宜的方法.

——惠特霍斯(*Whitworth*)

数学方法是数学之精髓.

——若瓦利斯(*Novalis*)

解数学问题需要一定的方法.解决任何一道数学问题，都伴随着这样或那样的方法，没有方法的解题是不存在的，只不过有繁与简、通法与特法之分罢了.不同的解题者解同一道题也许有许许多多不同的解法，同一个解题者解一道题也许有这样的或那样的解法，但这些解法都是解题者灵活而成功地运用数学基本解题方法的结果.法国生理学家贝尔纳曾指出：“良好的方法使我们更好地发挥运用天赋的才能，而拙劣的方法则会抑制才能的发挥.”因此，我们只有熟练掌握几种重要解题方法，才能为灵活而成功地运用打下基础，也才有可能不断地提高解题水平与能力，也才能在各级各次数学竞赛中取得良好的成绩，这是因为灵活、适宜地运用几种重要方法就是我们求解数学竞赛问题的良好方法.



第 1 章 探索法

【学习目标】

解数学题往往需要探索,解数学竞赛题更加需要探索.数学竞赛是一种吸引青少年积极参与、激励青少年跳出小圈子的智力活动.竞赛中的问题往往没有固定的套路可以依循,需要根据题设中的信息启动自己的头脑,运用智力自己去尝试、去找路,去尝试、去找路就是进行探索.探索法是求解数学竞赛题的重要方法之一.

美国著名数学家、数学教育学家波利亚(Polya)极力推崇探索法.在他的世界名著《怎样解题》一书中,有一部分内容叫"探索法小词典",它的篇幅占了全书的$\frac{4}{5}$.他指出:探索就是"一再地去试,多次变化方法,使我们不致错过那少许的宝贵的可能性."波利亚曾列举了一个例子,描述老鼠从鼠笼中逃脱的情况:"它狂乱地在笼中跑来跑去,尽力冲撞笼子铁栅栏,东撞撞,西撞撞,一下子它得逞了,它挤出了笼子……"他又指出:"人和老鼠的基本方法是一样的,试探,再一次试探,翻新试探的花样.当然,在解决问题方面,人总比老鼠高明得多.人不必用其身体去冲撞障碍物,而只消动用自己的智能,人比老鼠更会改变试探的方法,并且能从失败中学会更多的东西."

这样看来,探索带有一定的盲目性、偶然性.但必然性是在对无数次偶然性的筛选及修正后获得的,这是事情的一个方面.

另一方面,我们的解题实践和很多解题高手的成功经验也表明:探索法也有某些基本规律.我们可从如下十个方面加以领会:

【解题钥匙】

1. 探索常从熟悉的地方开始

例 1 (2004 年全国高中联赛题)设锐角θ使关于x的方程$x^2+4x\cdot\cos\theta+\cot\theta=0$有重根,则$\theta$的孤度数为( ).

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{12}$或$\frac{5\pi}{12}$ C. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{12}$ D. $\frac{\pi}{12}$

解 选 B.理由:因题设方程有重根,故知其判别式$\Delta=16\cos^2\theta-4\cot\theta=0$.又$\theta$为锐角,即$0<\theta<\frac{\pi}{2}$,由切割化弦有$16\cos^2\theta-4\cot\theta=4\cos\theta(2\sin2\theta-1)=0$,及$\cos\theta\neq0$,知$2\sin2\theta-1=0$,即由$\sin2\theta=\frac{1}{2}$得$\theta=\frac{\pi}{12}$或$\theta=\frac{5\pi}{12}$.

例 2 (2004 年全国高中联赛题)在平面直角坐标系xOy中,函数$f(x)=a\sin ax+\cos ax(a>0)$在一个最小正周期长的区间上的图象与函数$g(x)=\sqrt{a^2+1}$的图象所围成的封闭图形的面积是__

——.

解 填$\frac{2\pi}{a}\sqrt{a^2+1}$. 理由：把函数 $f(x)$变成熟悉的形式，即 $f(x)=\sqrt{a^2+1}\sin(ax+\varphi)$，其中 $\varphi=\arctan\frac{1}{a}$，它的最小正周期为$\frac{2\pi}{a}$，振幅为$\sqrt{a^2+1}$，如图 1-1. 由 $f(x)$一个最小正周期长的区间$[0,\frac{2\pi}{a}]$的图象与 $g(x)$的图象围成的封闭图形如图 1-1 中的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ部分组成的不规则图形（图中阴影部分），要求其图形的面积，应找到一个等积的熟悉的规则的图形. 由该图形中的对称性，可将该图形割补（即割去图中部分的Ⅲ，补上Ⅳ）成长为$\frac{2\pi}{a}$、宽为$\sqrt{a^2+1}$的长方形，故它的面积是$\frac{2\pi}{a}\sqrt{a^2+1}$.

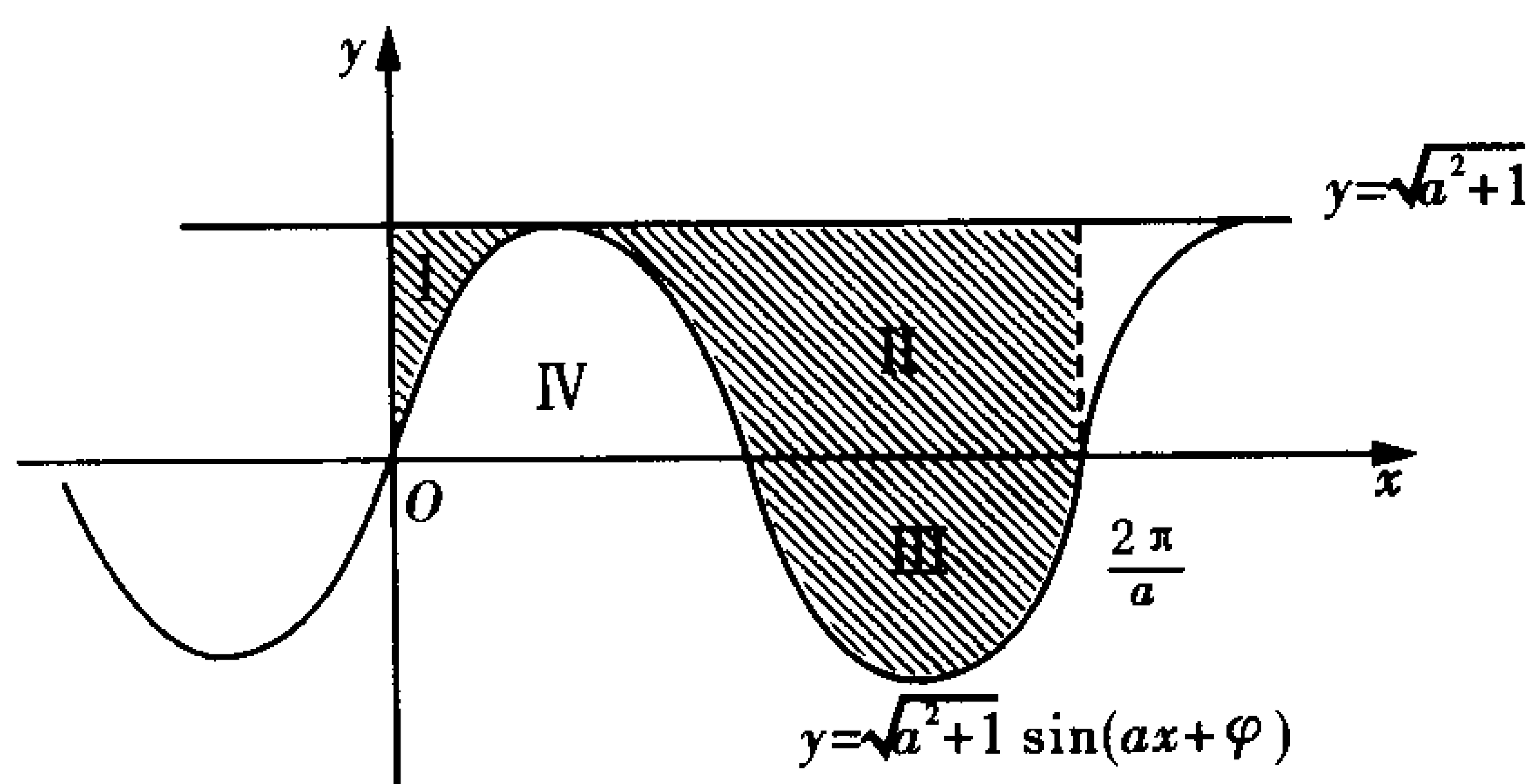


图 1-1

例 3 （2003 年全国高中联赛题）将 8 个半径都为 1 的球分两层放置在一个圆柱内，并使得每个球和其相邻的四个球相切，且与圆柱的一个底面及侧面都相切，则此圆柱的高等于________.

解 填$\sqrt[4]{8}+2$. 理由：如果直接从球的直径去计算觉得不太好算，能否找到比较熟悉的几何图形来计算呢？由题设，8 个半径都为 1 的球是分两层放置的，由于上层球的球心到圆柱上底面及下层球的球心到圆柱下底面的高度均为 1，因此，问题的关键是求两层球球心所在面之间的距离. 如图 1-2，上、下层四个球的球心 A'、B'、C'、D'和 A、B、C、D 分别是上、下两个边长为 2 的正方形的顶点，且以它们的外接圆$\odot O'$和$\odot O$为上下底面构成圆柱. 同时，A'在下底面的射影必须是$\overset{\frown}{AB}$的中点 M.

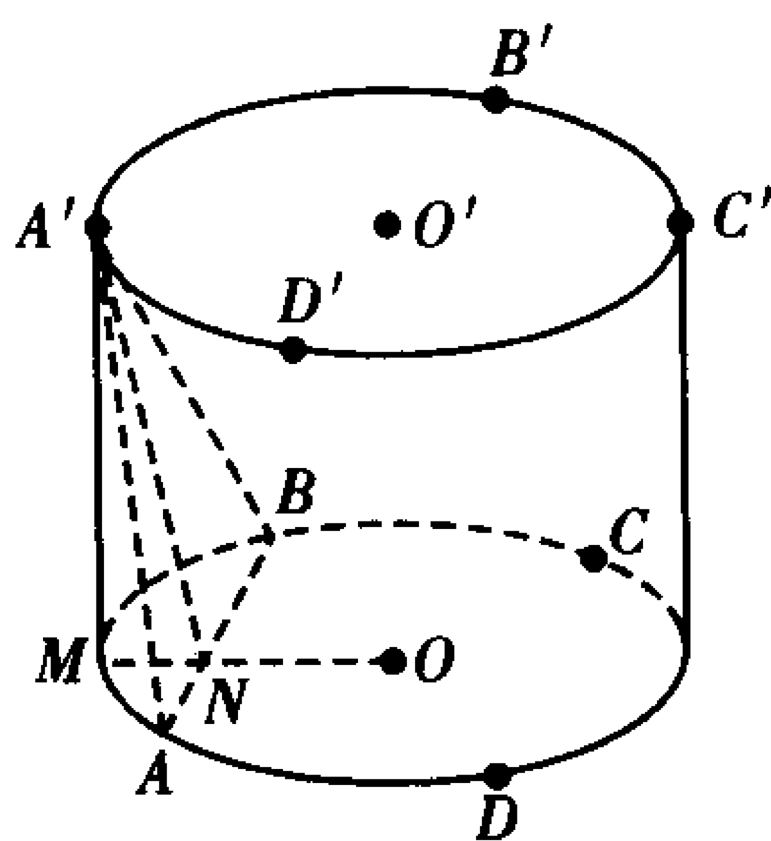


图 1-2

在$\triangle A'AB$ 中，$A'A=A'B=AB=2$. 设 AB 的中点为 N，则 $A'N=\sqrt{3}$，又 $OM=OA=\sqrt{2}$，$ON=1$，所以，

$$MN=\sqrt{2}-1,\ A'M=\sqrt{(A'N)^2-(MN)^2}=\sqrt[4]{8}.$$

因此，所求原圆柱的高为$\sqrt[4]{8}+2$.

例 4 （2002 年全国女子数学奥林匹克题）试求出所有的正整数 k，使得对任意满足不等式

$$k(ab+bc+ca)>5(a^2+b^2+c^2)$$

的正数 a、b、c，一定存在三边长分别为 a、b、c 的三角形.

解 先注意到熟悉的 $ab+bc+ca$ 与 $a^2+b^2+c^2$ 的关系，即由$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$，有

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

可知 $k>5$. 注意到 k 为整数，因此，$k\geqslant 6$.

由于不存在边长分别为1、1、2的三角形，依题设，有

$k(1\times1+1\times2+1\times2)\leqslant5(1^2+1^2+2^2)$，

即 $k\leqslant6$.

以下证明 $k=6$ 满足题设要求.

由题设条件式中 a、b、c 的对称性，可设 $a\leqslant b\leqslant c$，则

$6(ab+bc+ca)>5(a^2+b^2+c^2)$，

即 $5c^2-6(a+b)c+5a^2+5b^2-6ab<0$.

$$\Delta=[6(a+b)]^2-4\times5(5a^2+5b^2-6ab)=64[-(a-b)^2+ab]$$

$$\leqslant64ab\leqslant64(\frac{a+b}{2})^2=16(a+b)^2.$$

因此，可得

$$c<\frac{6(a+b)+\sqrt{\Delta}}{10}\leqslant\frac{6(a+b)+4(a+b)}{10}=a+b.$$

这表明以 a、b、c 为长度可构成三角形.

注 以下是证明 $k=6$ 满足题意的其他一些方法.

方法1 不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$. 若 $c\geqslant a+b$，则

$5a^2+5b^2+5c^2-6ab-6bc-6ca=4(a-b)^2+[5c-(a+b)][c-(a+b)]\geqslant0$，

与 $6(ab+bc+ca)>5(a^2+b^2+c^2)$

矛盾. 故 $c<a+b$.

方法2 作函数

$f(x)=5x^2-6(a+b)x+5a^2+5b^2-6ab$.

则 $f(c)<0$.

因 $f(x)$ 在区间 $[\frac{3}{5}(a+b),+\infty]$ 递增，且

$f(a+b)=5(a+b)^2-6(a+b)(a+b)+5a^2+5b^2-6ab=4(a-b)^2\geqslant0$，

故 $c<a+b$.

综上可知，探索时可先从题目所给的条件出发，充分利用我们所熟悉的知识和技巧将所给的条件"推演"开来，扩大已知阵地，寻找到从已知到结论的通路.

心理学家纽厄尔和西蒙提出：熟悉的知识和技能是问题解决者"可能信步漫游的网络".①

熟能生巧，巧办法只青睐于那些有准备的人. 创造是在继承基础上的发展，而不是空中楼阁. 因此，我们只有充分重视自己基础知识和基本技能的不断提高与升华，才能使探索的足迹走在坚实的土地上，探索才能成为从未知到已知的一座桥梁.

2. 探索常从简单的情形入手

例5 （2001年全国高中联赛题）若 $(1+x+x^2)^{1000}$ 的展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2000}x^{2000}$，则 $a_0+a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{1998}$ 的值为（　　）.

A. 3^{333}　　B. 3^{666}　　C. 3^{999}　　D. 3^{2001}

解 选C. 理由：由于 $(1+x+x^2)^{1000}$ 的展开式比较复杂，只有当 x 取一些特殊的简单值时，(1+

① 孙瑞清，胡大同．奥林匹克数学教学概论[M]．北京：北京大学出版社，1994：125～129

$x+x^2)^{1000}$的值才会较简单一些. 由 $1+x+x^2$ 的特别形式，可分别令 $x=1,\omega,\omega^2$，得 $1+x+x^2$ 的值为 3 或 0，即

令 $x=1$，可得

$3^{1000}=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2000}$；

令 $x=\omega$，可得

$0=a_0+a_1\omega+a_2\omega^2+a_3\omega^3+\cdots+a_{2000}\omega^{2000}$；(其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $\omega^3=1$ 且 $\omega^1+\omega+1=0$.)

令 $x=\omega^2$，可得

$0=a_0+a_1\omega^2+a_2\omega^4+a_3\omega^6+\cdots+a_{2000}\omega^{4000}$.

以上三式相加，得

$3^{1000}=3(a_0+a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{1998})$.

所以，$a_0+a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{1998}=3^{999}$

例 6 (2004 年全国联赛题)设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，满足 $f(0)=1$，且对任意 x、$y\in\mathbf{R}$，都有 $f(xy+1)=f(x)\cdot f(y)-f(y)-x+2$，则 $f(x)=$__________.

解 填 $x+1$. 理由：由已知 $f(0)=1$，对 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$ 中的 x、y 取一些简单的特殊值来试探：

令 $x=0,y=0$ 得 $f(1)=f(0)\cdot f(0)-f(0)-0+2=2$，

令 $x=1,y=1$ 得 $f(2)=f(1\cdot1+1)=f(1)\cdot f(1)-f(1)-1+2=3$，

…

猜测 $f(x)=x+1$. 这事实上，对任意的 x、$y\in\mathbf{R}$，有

$f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$，

$f(xy+1)=f(y)f(x)-f(x)-y+2$.

故 $f(x)f(y)-f(y)-x+2=f(y)f(x)-f(x)-y+2$，

即 $f(x)+y=f(y)+x$.

令 $y=0$，得 $f(x)=x+1$.

例 7 (1985 年全国高中联赛题)某足球邀请赛有 16 个城市参加，每市派甲、乙两个队，根据比赛规则每两队之间至多赛一场，并且同一城市的两个队之间不进行比赛. 比赛若干天后进行统计，发现除 A 市甲队外，其他各队已比赛过的场次各不相同，问 A 市乙队已赛过多少场？请证明你的结论.

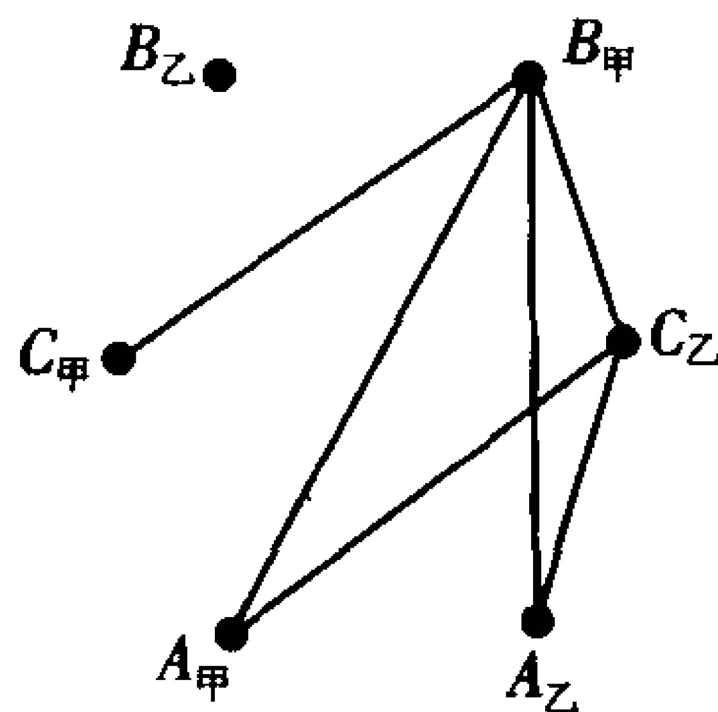


图 1－3

解 先考虑 3 个城市的情形：即三个城市 A、B、C，每个城市两个队分别记为 $A_甲$、$A_乙$、$B_甲$、$B_乙$、$C_甲$、$C_乙$，用点表示如图 1－3. 根据比赛规则，两个队至多赛一场，用连线表示，即两个点之间至多连一条线，同一个城市的两个队不进行比赛，即这两个点之间没有连线. 在统计时，由于这 6 个队比赛的场次各不相同，且最多的队比赛 4 场，因而除 $A_甲$ 外的 5 个队比赛的场次只能是 0、1、2、3、4 这五个数字，即在图 1－3 中，除 $A_甲$ 点以外的 5 个点中，每个点连出的线分别为 0、1、2、3、4、5 条，不妨设 $B_甲$ 赛 4 场，则 $B_乙$ 只能赛 0 场，否则不合规则；设 $C_乙$ 赛 3 场，则只能是 $C_甲$ 赛 1 场，否则也不合规则. 于是只能是 $A_甲$、$A_乙$ 各赛两场，此时，A 市乙队赛过的场数是 $3-1=2$.

从上述简单情形的讨论可以发现：同一城市两个队赛过场次之和均相等，且等于赛过的最多场

数.下面再回到16个城市的情形.

16个城市共32个队,除A市甲以外,31个队赛的场次只能分别为0,1,2,…,30这31个数,赛过30场的与赛0场的是同一城市的两个队,赛过29场的与赛1场的是同一城市的两个队,…,赛过16场的与赛14场的是同一城市的两个队,这就只剩A市的两个队了,A市乙队赛15场,即为$16-1=15$.

例8 (2004年全国女子数学奥林匹克题)设a、b、c为正实数.求$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$的最小值.

解 这是一个分式代数和形式的三元函数的最值问题,三个分式中分母都比较繁杂(相对来说),为简单起见,不妨用一个字母来表示,即

令$a+2b+c=x, a+b+2c=y, a+b+3c=z$,则有$x-y=b-c, z-y=c$.由此可得

$a+3c=2y-x, b=z+x-2y, c=z-y$.

故$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$

$=\frac{2y-x}{x}+\frac{4(z+x-2y)}{y}-\frac{8(z-y)}{z}$

$=-17+2\frac{y}{x}+4\frac{x}{y}+4\frac{z}{y}+8\frac{y}{z}$

$\geqslant-17+2\sqrt{8}+2\sqrt{32}=-17+12\sqrt{2}$. ①

上式中的等号可以成立.

事实上,由上述推导过程知,等号成立当且仅当平均不等式中的等号成立,而这等价于

$\begin{cases}2\frac{y}{x}=4\frac{x}{y},\\4\frac{z}{y}=8\frac{y}{z},\end{cases}$ 即$\begin{cases}y^2=2x^2,\\z^2=2y^2,\end{cases}$ 即$\begin{cases}y=\sqrt{2}x,\\z=2x,\end{cases}$

亦即$\begin{cases}a+b+2c=\sqrt{2}(a+2b+c),\\a+b+3c=2(a+2b+c).\end{cases}$

解此不定方程,得到

$\begin{cases}b=(1+\sqrt{2})a,\\c=(4+3\sqrt{2})a.\end{cases}$

易算出,对任何正实数a,只要$b=(1+\sqrt{2})a, c=(4+3\sqrt{2})a$,就都有式①中的等号成立.

所以,所求的最小值为$-17+12\sqrt{2}$.

综上,从简单的情形入手实行探索,既可除去包在问题实质外面的"装饰",使本质暴露得更清楚,又可对问题的条件和结论理解得更加深刻,还可获得部分结果,增强解题的信心,还可从简单情形中发现一些规律.

3. 探索常从考虑极端情形着手

例9 (2003年全国高中联赛题)删去正整数数列1,2,3…中的所有完全平方数,得到一个新数列,这个数列的第2003项是( ).

A. 2046　　B. 2047　　C. 2048　　D. 2049

解　选 C. 理由：考虑比 2003 大且与 2003 最接近的平方数，即 $45^2=2025$（因 $44^2=1936$）. 此时，有 $2026=a_{2026-45}=a_{1981}$.

于是，还须考虑 $46^2=2116$，此时，$2115=a_{2115-45}=a_{2070}$. 由于在从 1981 项到第 2070 项之间的 90 项中没有完全平方数. 又 $1981+22=2003$，则 $a_{2003}=a_{1981}+22=2026+22=2048$.

例 10　（2003 年北京市竞赛题）记 $\min\{a,b,c\}$ 为 a、b、c 中的最小值，若 x、y 是任意正实数，则 $M=\min\{x,\frac{1}{y},y+\frac{1}{x}\}$ 的最大值是________.

解　填$\sqrt{2}$. 理由：由题设，有 $x\geqslant M$，$\frac{1}{y}\geqslant M$，$y+\frac{1}{x}\geqslant M$，则

$y\leqslant\frac{1}{M}$，$\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{M}$，$M\leqslant y+\frac{1}{x}\leqslant\frac{2}{M}$.

于是，$M^2\leqslant 2$，$M\leqslant\sqrt{2}$.

当 $x=\sqrt{2}$，$y=\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$\frac{1}{y}=\sqrt{2}$，$y+\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. 此时，$M=\sqrt{2}$，故 M 的最大值是$\sqrt{2}$.

例 11　（2001 年湖南省竞赛题）设至少有四项的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n=npa_n$（$n\in\mathbf{N}_+$，p 为常数），且 $a_1\neq a_2$. 试问这个数列 $\{a_n\}$ 是一个什么数列？并说明理由.

解　先考虑极端的情形. 即

当 $n=1$ 时，$a_1=pa_1\Rightarrow a_1=0$ 或 $p=1$.

当 $p=1$ 时，有 $a_1+a_2=2a_2\Rightarrow a_1=a_2$. 这与已知 $a_1\neq a_2$ 矛盾，故 $p\neq 1$.

当 $a_1=0$ 时，则 $a_2\neq 0$，由 $a_2=2pa_2$ 有 $p=\frac{1}{2}$.

由 $a_1+a_2+a_3=\frac{3}{2}a_3\Rightarrow a_3=2a_2$.

由 $a_1+a_2+a_3+a_4=2a_4\Rightarrow a_4=3a_2$.

由 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{5}{2}a_5\Rightarrow a_5=4a_2$.

猜想：$a_n=(n-1)a_2$（$n\geqslant 2$），即 $\{a_n\}$ 从第二项起以后各项构成等差数列.

用数学归纳法证之：

当 $n=2$ 时，已知等式成立. 假设 $n=k$（$k\geqslant 2$）时，有 $a_k=(k-1)a_2$ 成立. 当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}a_{k+1}=S_{k+1}-S_k&=\frac{1}{2}(k+1)a_{k+1}-\frac{1}{2}ka_k\\&=\frac{1}{2}(k+1)a_{k+1}-\frac{1}{2}k(k-1)a_2.\end{aligned}$$

从而，$a_{k+1}=ka_2=[(k+1)-1]a_2$ 成立.

由归纳法原理知当 $n\geqslant 2$ 时，命题成立，即 $\{a_n\}$ 的第一项为 0，从第二项起以后各项构成一个等差数列.

例 12　（2001 年中国西部数学奥林匹克题）设 x、y、z 为正实数，且 $x+y+z\geqslant xyz$. 求 $\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$ 的最小值.

解　首先注意到条件式取等号的情形.

即当 $x=y=z=\sqrt{3}$ 时，$x+y+z=xyz$，而 $\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\sqrt{3}$.

下面证明 $\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

事实上，有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}(x+y+z)^2\geqslant\begin{cases}\frac{1}{3}(xyz)^2\geqslant\sqrt{3}xyz,\text{如果 } xyz\geqslant 3\sqrt{3},\\ 3\sqrt[3]{(xyz)^2}\geqslant\sqrt{3}xyz,\text{如果 } xyz<3\sqrt{3}.\end{cases}$$

故 $\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

例 13 （2004 年中国数学奥林匹克题）凸四边形 $EFGH$ 的顶点 E、F、G、H 分别在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 上，且满足 $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$. 而点 A、B、C、D 分别在凸四边形 $E_1F_1G_1H_1$ 的边 H_1E_1、E_1F_1、F_1G_1、G_1H_1 上，满足 $E_1F_1/\!/EF$，$F_1G_1/\!/FG$，$G_1H_1/\!/GH$，$H_1E_1/\!/HE$. 已知 $\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$，求 $\frac{F_1C}{CG_1}$ 的值.

解 由于凸四边形的任意性，不妨先考虑它的极端情形，再考虑它的一般情况. 即

(1) 如图 1－4，若 $EF/\!/AC$，则

$$\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{FC}.$$

代入已知条件得 $\frac{DH}{HA}=\frac{DG}{GC}$，所以

$HG/\!/AC$.

从而，$E_1F_1/\!/AC/\!/H_1G_1$. 故 $\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$.

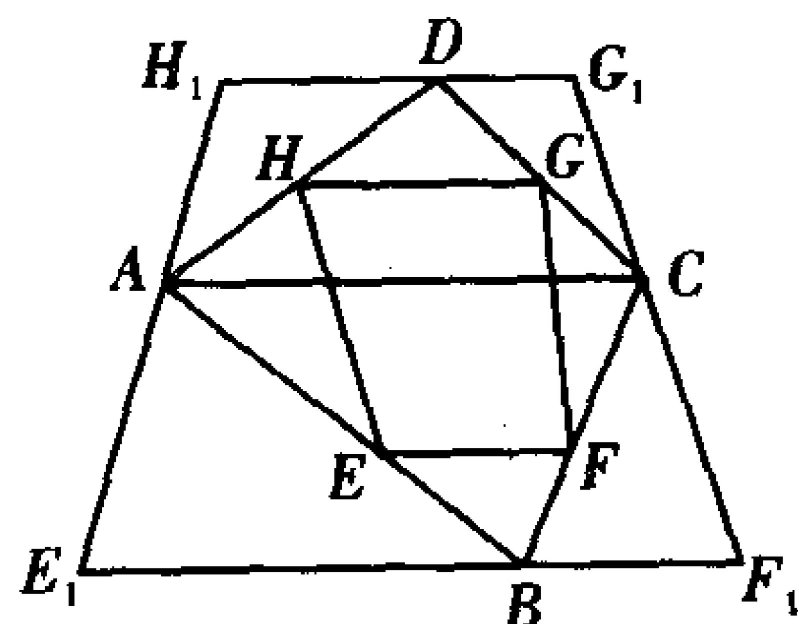


图 1－4

(2) 如图 1－5，若 EF 与 AC 不平行. 设 FE 的延长线与 CA 的延长线相交于点 T. 由梅涅劳斯定理得

$$\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AT}{TC}=1.$$

结合题设有

$$\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}\cdot\frac{AT}{TC}=1.$$

由梅涅劳斯定理逆定理知 T、H、G 三点共线.

设 TF、TG 与 E_1H_1 分别交于点 M、N. 由 $E_1B/\!/EF$，得 $E_1A=\frac{BA}{EA}\cdot AM$.

同理，$H_1A=\frac{AD}{AH}\cdot AN$. 所以，

$$\frac{E_1A}{AH_1}=\frac{AM}{AN}\cdot\frac{AB}{AE}\cdot\frac{AH}{AD}.$$

又 $\frac{EQ}{QH}=\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle AHC}}=\frac{S_{\triangle ABC}\cdot AE\cdot AD}{S_{\triangle ADC}\cdot AB\cdot AH}$，故

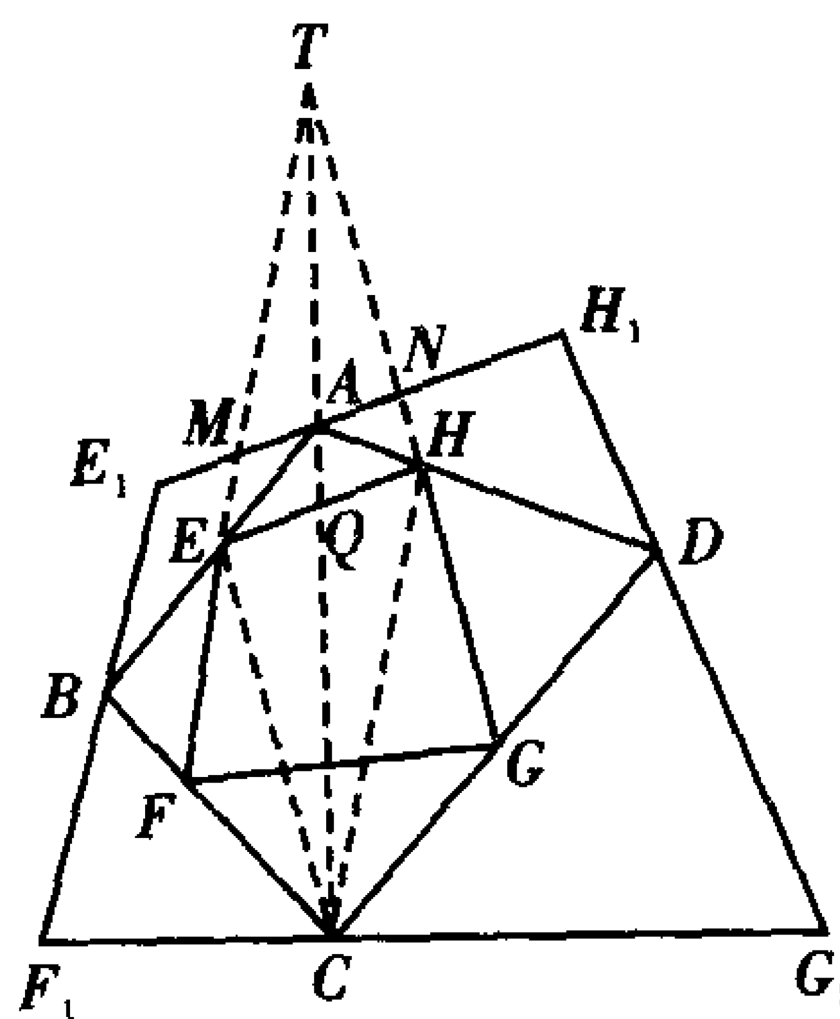


图 1－5

$$\frac{E_1A}{AH_1}=\frac{EQ}{QH}\cdot\frac{AB}{AE}\cdot\frac{AH}{AD}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}.$$

同理，$\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{ADC}}$.

所以，$\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$.

综上，这种直接抓住全体对象中的极端情形或它们所具有某种极端性质加以探索：考虑数量的最大或最小、图形中的界限位置、某些极端地位元素的性质等，则比较容易、简单、熟悉、具体，以利于找到解题路径. 极端情形的解与一般情形的解往往有共性，极端情形的解往往能给出怎样解一般情形的启示.

4. 探索常从不断减小目标差着手

如果把题目的条件与结论之间的差异称为目标差，那么解题的实质就在于设计一个目标差不断减小的过程. ①

例 14 （2004 年全国高中联赛题）如图 1-6，顶点为 P 的圆锥的轴截面是等腰直角三角形，A 是底面圆周上的点，B 是底面圆内的点，O 为底面圆的圆心，$AB\perp OB$，垂足为 B，$OH\perp PB$，垂足为 H，且 $PA=4$，C 为 PA 的中点. 当三棱锥 $O-HPC$ 的体积最大时，OB 的长为（　　）.

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

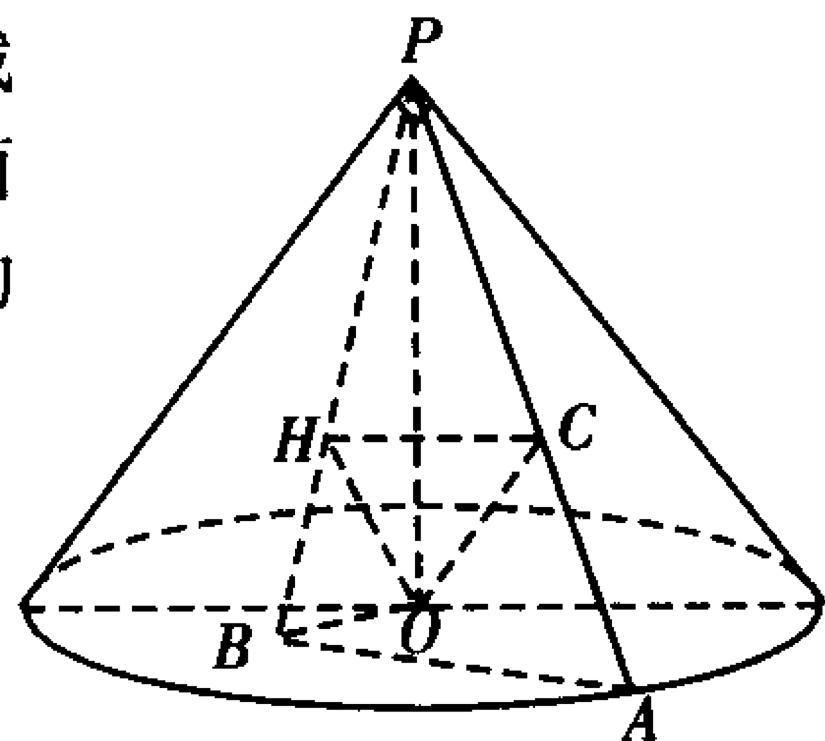


图 1-6

解 选 D. 理由：此题的目标差是体积与线段，即当三棱锥 $O-HPC$ 的体积最大时，求线段 OB 的长，而在三棱锥 $O-HPC$ 中，点 P、O、C 是定点，此时，目标差减小到点 H 处于某特殊位置时，求点 B 到点 O 的距离.

因为 $AB\perp OB$，$AB\perp OP$，则 $AB\perp PB$.

因为 $OH\perp PB$，则面 $PAB\perp$ 面 POB. 所以，$OH\perp HC$，$OH\perp PA$. 因为 C 是 PA 中点，则 $OC\perp PA$. 所以，PC 是三棱锥 $P-HOC$ 的高，且 $PC=2$.

在 Rt$\triangle OHC$ 中，$OC=2$，所以，当 $HO=HC$ 时，$S_{\triangle HOC}$ 最大，也即 $V_{O-HPC}=V_{P-HOC}$ 最大.

此时，$HO=\sqrt{2}$，则 $HO=\frac{1}{2}OP$，故 $\angle HPO=30°$.

所以，$OB=OP\tan30°=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

例 15 （2003 年北京市竞赛题）已知 x、y 是正实数，且满足 $xy+x+y=71$，$x^2y+xy^2=880$，则 $x^2+y^2=$__________.

解 填 146. 理由：条件和所求结果中都是关于两个字母 x、y 的值，没有差异，目标差在于字母的次数与形式，要减小目标差就要探索条件与所求结果所共有的形式. 由于 $xy+x+y=(xy)+(x+y)$，$x^2y+xy^2=(xy)(x+y)$，$x^2+y^2=(x+y)^2-2(xy)$，从而可得如下结果：

---

① 罗增儒. 数学的领悟[M]. 郑州：河南科学技术出版社，1997：58

设 $a=x+y,b=xy,xy+x+y=a+b=71,x^2y+xy^2=xy(x+y)=ab=880$.

所以,a、b 是 $t^2-71t+880=0$ 的两个根.

解得 $a=x+y,b=xy$ 分别等于 16 和 55.

若 $x+y=55,xy=16$,显然无正整数解.所以,只有 $x+y=16,xy=55$.

因此,$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=146$.

例 16 (1999 年全国高中联赛题)给定点 $A(-2,2)$,已知点 P 是 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上的动点,F 是左焦点,求 $|PA|+\frac{5}{3}|PF|$ 的最小值及 P 点的坐标.

解 此题的目标差是所求值 $|PA|+\frac{5}{3}|PF|$ 系数分别为 1 和 $\frac{5}{3}$,所以我们应寻求两数之间的关系或它们是否有任何特殊意义.联想已知条件,可知此椭圆的离心率 $e=\frac{3}{5}$,所以 $\frac{5}{3}|PF|=\frac{|PF|}{e}=|PP_1|$,如图 1-7 可知,当 A、P、P_1 三点共线时,即 P 在点 $(\frac{-5\sqrt{3}}{2},2)$ 时,$|PA|+\frac{5}{3}|PF|=|PA|+|PP_1|=|P_1A|=\frac{19}{3}$.

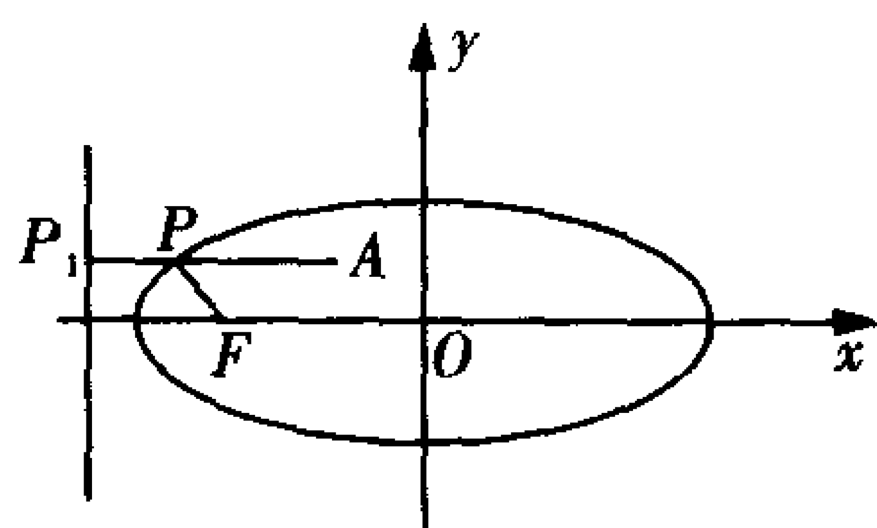


图 1-7

例 17 (2002 年全国女子数学奥林匹克题)$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 B、C 两点,且 BC 是 $\odot O_1$ 的直径.过点 C 作 $\odot O_1$ 的切线,交 $\odot O_2$ 于另一点 A,连结 AB,交 $\odot O_1$ 于另一点 E,连结 CE 并延长,交 $\odot O_2$ 于点 F.设点 H 为线段 AF 内的任意一点,连结 HE 并延长,交 $\odot O_1$ 于点 G,连结 BG 并延长,与 AC 的延长线交于点 D.求证:$\frac{AH}{HF}=\frac{AC}{CD}$.

证明 此题的目标差是寻找到一个量 k,使 $\frac{AH}{HF}=k$,且 $\frac{AC}{CD}=k$.要减小目标差就要利用题设条件中两圆相交可得一些角的关系以及有直径、切线得一些角为直角来建立 k 的表达式.

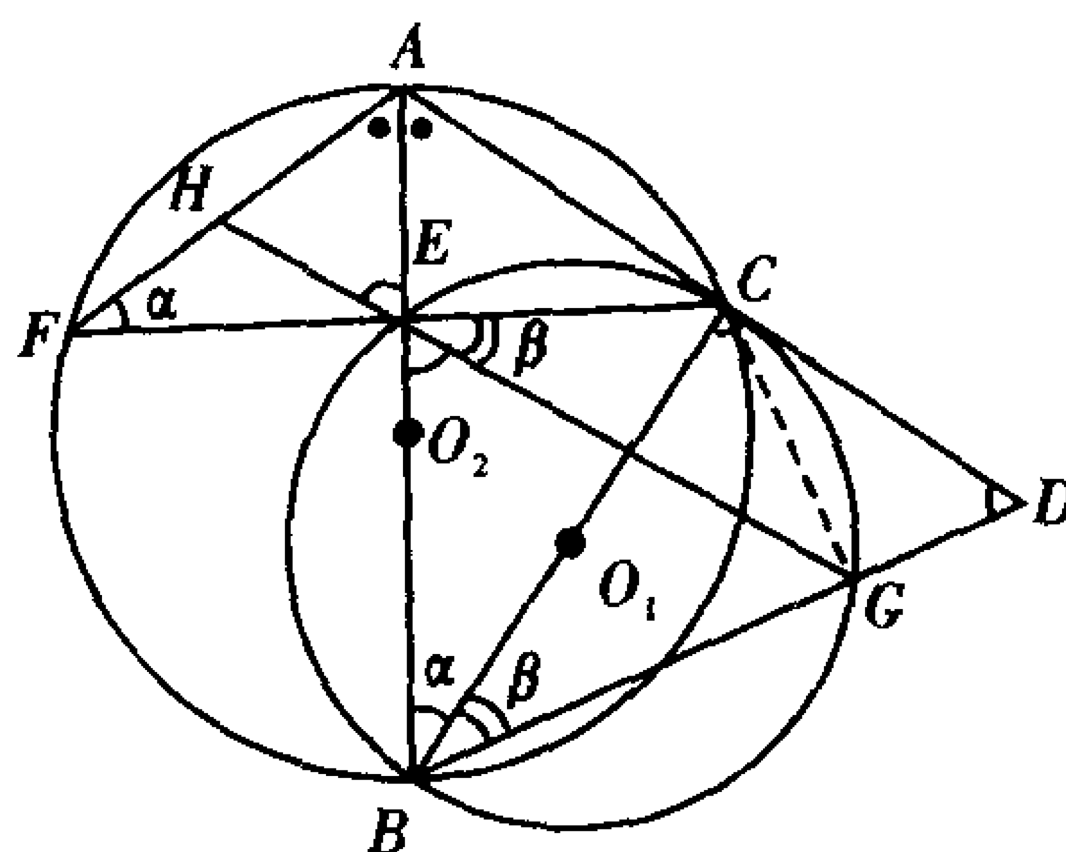


图 1-8

如图 1-8,因 BC 是 $\odot O_1$ 的直径,AC 与 $\odot O_1$ 切于 C,故 $\angle BEC=\angle FEA=\angle BCA=\angle BCD=90°$.

设 $\angle ABC=\alpha$,$\angle CBD=\beta$,则 $\angle AFC=\alpha$,$\angle CEG=\beta$.

根据正弦定理,有

$$\frac{AH}{\sin\angle HEA}=\frac{HE}{\sin\angle HAE},$$

$$\frac{HF}{\sin\angle FEH}=\frac{HE}{\sin\angle HFE},$$

即 $\frac{AH}{HE}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\frac{HF}{HE}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

两式相除得 $$\frac{AH}{HF}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \quad ①$$

在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\frac{AC}{BC}=\tan\alpha$;在 Rt$\triangle BCD$ 中,$\frac{CD}{BC}=\tan\beta$.

两式相除得 $\frac{AC}{CD}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ ②

由①、②知 $\frac{AH}{HF}=\frac{AC}{CD}$.

综上,不断减小目标差可以同时解决解题中两个最关键的问题:从何处入手?向何方前进?从何处入手?就是从找目标差开始;向何方前进?就是向减小目标差的方向前进.也许在对某目标差作出反应时,又导致了新的目标差,但这是向目标逼近了的目标差,这样再作出新目标差的反应,直至目标差的消失.

5. 探索可从改变形式着手

例 18 (2003 年全国高中联赛题)已知 x、y 都在区间 $(-2,2)$ 内,且 $xy=-1$,则函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$ 的最小值是(　　).

A. $\frac{8}{5}$　　B. $\frac{24}{11}$　　C. $\frac{12}{7}$　　D. $\frac{12}{5}$

解 选 D. 理由:由已知得 $y=-\frac{1}{x}$,故

$$u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9x^2}{9x^2-1}=1+\frac{35}{37-(9x^2+\frac{4}{x^2})}.$$

而 $x\in(-2,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},2)$,当 $9x^2=\frac{4}{x^2}$,即 $x^2=\frac{2}{3}$ 时,$9x^2+\frac{4}{x^2}$ 的值最小,此时 u 有最小值 $\frac{12}{5}$.

例 19 (2000 年河北省竞赛题)设 $x^2+y^2-2x-2y+1=0(x,y\in\mathbf{R})$,则 $F(x,y)=\frac{x+1}{y}$ 的最小值为________.

解 原式变形为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. 令 $x-1=\cos\theta$, $y-1=\sin\theta$,则 $x=1+\cos\theta$, $y=1+\sin\theta$. 所以,$\frac{x+1}{y}=\frac{2+\cos\theta}{1+\sin\theta}$,设其为 μ,则 $\mu+\mu\sin\theta=2+\cos\theta$,即 $\mu\sin\theta-\cos\theta=2-\mu$. 所以,

$$\sqrt{\mu^2+1}\sin(\theta-\varphi)=2-\mu.$$

(其中,$\cos\varphi=\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$, $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}}$)

$$\sin(\theta-\varphi)=\frac{2-\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}, \left|\frac{2-\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\right|\leqslant 1.$$

解得 $\mu\geqslant\frac{3}{4}$,即 $F(x,y)$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

例 20 (2003 年全国高中联赛题)设 $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 5$. 证明:$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$.

解 因 $a+b+c+d\leqslant 2\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$(当且仅当 $a=b=c=d$ 时取等号),取 $a=b=\sqrt{x+1}$, $c=\sqrt{2x-3}$, $d=\sqrt{15-3x}$,则

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}$$
$$\leqslant 2\sqrt{(x+1)+(x+1)+(2x-3)+(15-3x)}$$

$$=2\sqrt{x+14}\leqslant 2\sqrt{19}.$$

因为$\sqrt{x+1}$，$\sqrt{2x-3}$，$\sqrt{15-3x}$不能同时相等，所以 $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$.

例 21 由 $49=7^2$，$4489=67^2$，$444889=667^2$，…，能否有$\underbrace{444\cdots4}_{n+1\text{个}}\underbrace{88\cdots8}_{n\text{个}}9=(\underbrace{66\cdots6}_{n\text{个}}7)^2(n\in\mathbf{N})$?

解 结论是成立的，可证明如下：

证法 1

$$\underbrace{444\cdots4}_{n+1\text{个}}\underbrace{88\cdots8}_{n\text{个}}9=4\sum_{k=n+1}^{2n+1}10^k+8\sum_{k=1}^{n}10^k+9$$

$$=1+4(1+10+10^2+\cdots+10^n)+4(1+10+\cdots+10^{2n+1})$$

$$=1+4\cdot\frac{1}{9}(10^{n+1}-1)+4\cdot\frac{1}{9}(10^{2n+2}-1)$$

$$=\frac{1}{9}(4\cdot10^{2n+2}+4\cdot10^{n+1}+1)$$

$$=(\frac{2\cdot10^{n+1}+1}{3})^2$$

$$=(\frac{6}{9}\cdot10^{n+1}+\frac{1}{3})^2$$

$$=[\frac{6}{9}(10^{n+1}-10)+\frac{2}{3}\cdot10+\frac{1}{3}]^2$$

$$=[6\cdot(10^{n+1}+10^n+\cdots+10)+7]^2=\underbrace{66\cdots6}_{n\text{个}}7^2.$$

证法 2

$$\underbrace{444\cdots4}_{n+1\text{个}}\underbrace{88\cdots8}_{n\text{个}}9=\underbrace{444\cdots4}_{n+1\text{个}}\underbrace{88\cdots8}_{n+1\text{个}}+1$$

$$=\underbrace{444\cdots4}_{n+1\text{个}}\cdot10^{n+1}+\underbrace{888\cdots8}_{n+1\text{个}}+1$$

$$=4\cdot\underbrace{111\cdots1}_{n+1\text{个}}\cdot10^{n+1}+8\cdot\underbrace{111\cdots1}_{n+1\text{个}}+1$$

$$=4\cdot\underbrace{111\cdots1}_{n+1\text{个}}\cdot(9\cdot\underbrace{11\cdots1}_{n+1\text{个}}+1)+8\cdot\underbrace{11\cdots1}_{n+1\text{个}}+1$$

$$=36\cdot(\underbrace{111\cdots1}_{n+1\text{个}})^2+12\cdot\underbrace{111\cdots1}_{n+1\text{个}}+1$$

$$=(6\cdot\underbrace{111\cdots1}_{n+1\text{个}}+1)^2.$$

此例的两种证法都是通过探索形式的变化而得，比较两种证法可知，若变形恰到好处，则可减少推导过程.

综上可见，同一个内容，从不同的侧面或不同的角度来考虑、去探索，它显示出来的是不同的形式. 一个解法就是对这个问题形式的一种认识. 笔者曾认为：解题方法的实质就是对问题形式的认识. ①

在数学解题中，所考察的对象、问题，总是既有内容又有形式的. 要紧的是，在弄清它的内容，认真进行剖析，着眼于它们之间的联系及其运动和变化的基础上，认清它的形式. 因为形式化是数学的特征，形式又是具体的、丰富多彩的，所以在进一步认识它之前须对它作出明确的阐述；况且形式又

---

① 沈文选. 初等数学解题研究[M]. 湖南科学技术出版社，1996：158

是运动的、变化的，是内在的自身运动变化. 因此，我们在探索一个问题的求解时，有时须着眼于形式的变化和对变化形式的认识.

6. 探索可从变更问题着手

例 22 (2004 年全国高中联赛题)已知 $M=\{(x,y)\mid x^2+2y^2=3\}$，$N=\{(x,y)\mid y=mx+b\}$. 若对于所有 $m\in\mathbf{R}$，均有 $M\cap N\neq\varnothing$，则 b 的取值范围是(　　).

A. $[-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}]$　　B. $(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$　　C. $(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$　　D. $[-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}]$

解 选 A. 理由：由题设，对于 $y=mx+b$，当 $m\in\mathbf{R}$ 时，则知其是过定点 $(0,b)$ 的直线系方程. 因而原问题中条件 $M\cap N\neq\varnothing$，可变更为(即相当于)点 $(0,b)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{2y^2}{3}=1$ 上或它的内部，从而将点 $(0,b)$ 的坐标代入椭圆方程左边应满足 $\frac{2b^2}{3}\leqslant1$，故解得 $-\frac{\sqrt{6}}{2}\leqslant b\leqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$.

例 23 (2003 年安徽省竞赛题)已知 x、y、z 均为正整数，则方程 $x+y+z=15$ 有________组解.

解 填 91. 理由：由于是求正整数解，显然 $1\leqslant x,y,z\leqslant13$.

于是，原问题可变更为：将 15 写成 15 个 1，即 $1+1+\cdots+1=15$，其中 14 个加个任取 2 个，并把这两个加号分隔的 1 合并成一个数得到方程的解. 故解的个数是 $C_{14}^2=91$ 个.

例 24 (2004 年湖南省竞赛题)一台计算机装置的示意图如图 1-9 所示，J_1、J_2 表示数据入口，C 是计算结果的出口. 计算过程是由 J_1、J_2 分别输入自然数 m 和 n，经过计算后得自然数 k 由 C 输出. 若此种装置满足以下三个性质：

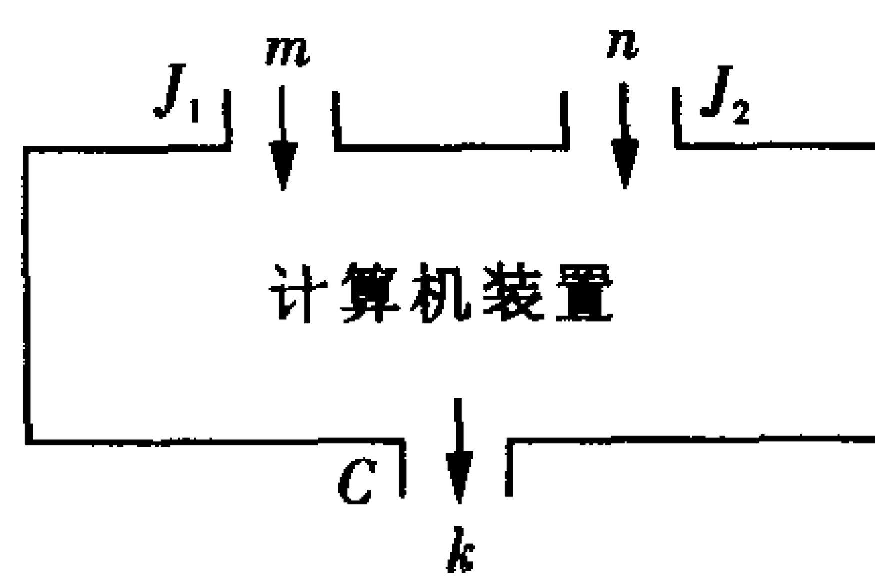


图 1-9

①J_1、J_2 分别输入 1，则输出结果 1；

②若 J_1 输入任何固定自然数不变，J_2 输入自然数增大，则输出结果比原来增大 2；

③若 J_2 输入 1，J_1 输入自然数增大 1，则输出结果为原来的 2 倍.

试问：(1)若 J_1 输入 1，J_2 输入自然数 n，则输出结果为多少?

(2)若 J_2 输入 1，J_1 输入自然数 m，则输出结果为多少?

(3)若 J_1 输入自然数 2002，J_2 输入自然数 9，则输出结果为多少?

解 我们将问题变更为用数学符号语言表述：

J_1 输入 m，J_2 输入 n 时，输出结果记为 $f(m,n)$. 设 $f(m,n)=k$，则 $f(1,1)=1$，$f(m,n+1)=f(m,n)+2$，$f(m+1,1)=2f(m,1)$.

(1)因为 $f(1,n+1)=f(1,n)+2$，故 $f(1,1)$，$f(1,2)$，…，$f(1,n)$，…组成以 $f(1,1)$ 为首项、2 为公差的等差数列.

所以，$f(1,n)=f(1,1)+2(n-1)=2n-1$.

(2)因为 $f(m+1,1)=2f(m,1)$，故 $f(1,1)$，$f(2,1)$，…，$f(m,1)$，…组成以 $f(1,1)$ 为首项、2 为公比的等比数列.

所以，$f(m,1)=f(1,1)\cdot2^{m-1}=2^{m-1}$.

(3)因为 $f(m,n+1)=f(m,n)+2$，故 $f(m,1)$，$f(m,2)$，…，$f(m,n)$，…组成以 $f(m,1)$ 为首项、2 为公差的等差数列.

所以，$f(m,n)=f(m,1)+2(n-1)=2^{m-1}+2n-2$，$f(2002,9)=2^{2001}+16$.

例 25 （2004 年全国女子数学奥林匹克题）一副三色纸牌，共有 32 张，其中红黄蓝每种颜色的牌各 10 张，编号分别是 1，2，…，10；另有大小王牌各一张，编号均为 0. 从这副牌中任取若干张牌，然后按如下规则计算分值：每张编号为 k 的牌计为 2^k 分；若它们的分值之和为 2004，则称这些牌为一个“好牌组”. 试求“好牌组”的个数.

解法 1 变更原问题的表述.

称原题为“两王问题”. 若增加一张王牌（称为“中王”），编号也为 0，再考虑同样的问题，则称为“三王问题”.

先考虑“三王问题”. 将大中小三张王牌分别称为红王、黄王、蓝王，于是，每种颜色的牌都是 11 张，编号都分别是 0，1，2，…，10. 将分值之和为 n 的牌组的个数记作 u_n. 每一个牌组都可能由红组、黄组、蓝组组成. 将其中红组、黄组、蓝组的分值之和分别记为 x、y、z，则有

$$x+y+z=n.$$

由于任一非负整数的二进制表示方法惟一，所以，一旦 x、y、z 的值确定之后，红组、黄组、蓝组的构成情况便惟一确定. 而方程 $x+y+z=n$ 的非负整数解的组数等于 C_{n+2}^2，所以，

$$u_n=C_{n+2}^2=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

现考虑原题中的“两王问题”. 对于 $n\in\{1,2,\cdots,2004\}$，用 a_n 表示分值之和为 n 的的牌组的个数.

当 $n=2k\leqslant 2004$ 时，对于分值之和为 $2k$ 的任一牌组，有：

(1)若组内无王牌，则该牌组就是“三王问题”中的一个分值之和为 $2k$ 的无王牌的牌组. 如果将其中每张牌的分值都除以 2，就得到“三王问题”中的一个分值之和为 k 的且允许包括有王牌的牌组. 易见，这种对应是一一的，所以，这种牌的个数为 u_k.

(2)若组内有王牌，则组内必有 2 张王牌（大小王牌都在组内）. 去掉王牌后，就化归为分值之和为 $2k-2$ 的无王牌的牌组. 从而，这种牌组的个数为 u_{k-1}. 所以，

$$a_{2k}=u_k+u_{k-1}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}+\frac{k(k+1)}{2}$$

$$=(k+1)^2,k=1,2,\cdots,1002.$$

特别地，所求的“好牌组”的个数为

$$a_{2004}=1003^2=1006009.$$

解法 2 将原问题变更表述.

对于 $n\in\{1,2,\cdots,2004\}$，用 a_n 表示分值之和为 n 的牌组的个数，则 a_n 等于函数

$f(x)=(1+x^{2^0})^2+(1+x^{2^1})^3(1+x^{2^2})^3\cdots(1+x^{2^{10}})^3$ 的展开式中 x^n 的系数（约定 $|x|<1$）. 由于

$$f(x)=\frac{1}{x+1}[(1+x^{2^0})(1+x^{2^1})(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^{10}})]^3$$

$$=\frac{1}{(1+x)(1-x)^3}(1-x^{2^{11}})^3$$

$$=\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2}1-x^{2^{11}})^3,$$

而 $n\leqslant 2004<2^{11}$，所以，a_n 等于 $\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2}$ 的展开式中 x^n 的系数. 又由于



$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2}=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$=(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k}+\cdots)\cdot(1+2x+3x^2+\cdots+(2k+1)x^{2k}+\cdots),$$

故知 x^{2k} 的系数为

$a_{2k}=1+3+5+\cdots+(2k+1)=(k+1)^2,k=1,2\cdots$

从而,所求的"好牌组"的个数为

$a_{2004}=1003^2=1006009.$

综上,在探索一个提法有些生疏、概念有些模糊等的问题的解法时,对问题进行适当变更,即用自己熟悉的语言、问题,重新叙述、表述一下,一次不好,再换一次,直到透彻理解为止,这是自己对原问题认识和理解程度的深化.如果对问题的含义在自己头脑中都没有清晰而准确地把握,又怎能去解决它呢?

7. 探索可从类比着手

波利亚十分重视类比,他在《怎样解题》一书中描述了:在我们的思维、日常谈话、一般结论以及艺术表演方法和最高科学成就中无不充满了类比.类比可在不同的水平使用,人们常常使用含糊不清的、夸大的、不完全的或没有完全弄清楚的类比,但类比也可以达到数学精确性的水平.所有各种类比在发现解答方面都可能起作用,所以我们不应当忽略任何一种.

所谓类比,就是某种类型的相似性.波利亚指出:"相似的系统在某个方面彼此一致,类比的系统则其相应部分在某些关系上相似,如果两个系统各自的部分之间,在其可以清楚定义的一些关系上一致的话,那么这两个系统就可作类比."

例 26 已知 $a_i,b_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$,$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=4$,$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2=9$,求$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$ 的最大值.

解 先看当 $a_1^2+a_2^2=4,b_1^2+b_2^2=9$ 时,如何求 $a_1b_1+a_2b_2$ 的最大值.

由于 $1=(\frac{a_1}{2})^2+(\frac{a_2}{2})^2,1=(\frac{b_1}{3})^2+(\frac{b_2}{3})^2$,则$(\frac{a_1}{2})^2+(\frac{b_1}{3})^2\geqslant2\cdot\frac{a_1b_1}{2\cdot3}=\frac{a_1b_1}{3}$,$(\frac{a_2}{2})^2+(\frac{b_2}{3})^2\geqslant2\cdot\frac{a_2b_2}{2\cdot3}=\frac{a_2b_2}{3}$,即 $2=(\frac{a_1}{2})^2+(\frac{b_1}{3})^2+(\frac{a_2}{2})^2+(\frac{b_2}{3})^2\geqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2}{3}$,故 $a_1b_1+a_2b_2\leqslant6$,其中符号当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{2}{3}$时取得.

类比上述求法,可知 $a_1b_1+a_2b_2\cdots+a_nb_n$ 的最大值是 6.

注 直接应用柯西不等式也可求得结果.

例 27 (《数学通报》数学问题 1434 题)设正数 x、y、z 均不为 1,且 $xy+yz+zx=1$,试求 $f(x,y,z)=x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$的最大值.

解 从所给条件式结构上类比,联想到有三角公式 $\cot\alpha\cdot\cot\beta+\cot\beta\cdot\cot\gamma+\cot\gamma\cdot\cot\alpha=1$. (*)于是,可令 $x=\cot\alpha,y=\cot\beta,z=\cot\gamma$,其中 α、β、γ 均为锐角且都不为$\frac{\pi}{4}$.由已知条件可得(*)式,即有

$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma.$

即 $\tan(\alpha+\beta)=-\tan\gamma=\tan(\pi-\gamma)$,

于是,可得 $\alpha+\beta=\pi-\gamma$,即 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

从而 $\tan2\alpha+\tan2\beta+\tan2\gamma=\tan2\alpha\cdot\tan2\beta\cdot\tan2\gamma.$



所以 $f(x,y,z)=(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)(\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2})$

$$=(1-\cot^2\alpha)(1-\cot^2\beta)(1-\cot^2\gamma)(\frac{\cot\alpha}{1-\cot^2\alpha}+\frac{\cot\beta}{1-\cot^2\beta}+\frac{\cot\gamma}{1-\cot^2\gamma})$$

$$=\frac{\tan^2\alpha-1}{\tan^2\alpha}\cdot\frac{\tan^2\beta-1}{\tan^2\beta}\cdot\frac{\tan^2\gamma-1}{\tan^2\gamma}(\frac{-\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\frac{-\tan\beta}{1-\tan^2\beta}+\frac{-\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma})$$

$$=\frac{4}{\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma}\cdot\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}\cdot\frac{1-\tan^2\beta}{2\tan\beta}\cdot\frac{1-\tan^2\gamma}{2\tan\gamma}(\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}+\frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma})$$

$$=\frac{4}{\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma}\cdot\cot2\alpha\cdot\cot2\beta+\cot2\gamma\cdot(\tan2\alpha+\tan2\beta+\tan2\gamma)$$

$$=\frac{4}{\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma}\cdot\cot2\alpha\cdot\cot2\beta\cdot\cot2\gamma\cdot\tan2\alpha\cdot\tan2\beta\cdot\tan2\gamma$$

$$=\frac{4}{\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma}$$

因为 $\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant3\sqrt[3]{\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma}$,

所以 $\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma\geqslant3\sqrt{3}$

从而 $f(x,y,z)\leqslant\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

故 当且仅当 $\tan\alpha=\tan\beta=\tan\gamma$,即 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$时,$f(x,y,z)$取得最大值$\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

例 28 (1987 年第 2 届中国数学奥林匹克题)设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个四面体,S_1、S_2、S_3、S_4 分别是以 A_1、A_2、A_3、A_4 为球心的球,它们两两相切.如果存在一点 Q,以这点为球心可作一个半径为 r 的球与 S_1、S_2、S_3、S_4 都相切,还可作一个半径为 R 的球与四面体的各棱都相切.求证:这个四面体是正四面体.

证明 将这个问题降维类比,有平面几何中的问题:

设有$\triangle A_1A_2A_3$,S_1、S_2、S_3 分别是以 A_1、A_2、A_3 为圆心的圆,它们两两相切,如果存在这一点 O,以这点为圆心可作一个半径为 r 的圆与 S_1、S_2、S_3 都相切,还可作一个半径为 R 的圆与$\triangle A_1A_2A_3$ 的各边都相切,则$\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形.

事实上,(1)先设 S_1、S_2、S_3 两两外切.

①若$\odot O(r)$(即以半径为 r 的圆,下同)与 S_1、S_2、S_3 均外切,如图 1-10,设$\odot O(R)$为$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆,与 A_2A_3 切于点 D,令圆 S_1、S_2、S_3 的半径分别为 r_1、r_2、r_3.若 $r(r+2r_2)>R^2$,则 $A_2D=\sqrt{(r_1+r_2)^2-R^2}>r_2$,从而 $A_3D<r_2$,推出 $r(r+2r_3)<R^2$.

同理,由 $r(r+2r_3)<R^2$ 可推得 $r(r+2r_1)>R^2$,又可推出 $r(r+2r_2)<R^2$,引出矛盾.

同理,设 $r(r+2r_2)<R^2$ 也推出矛盾.

所以 $r(r+2r_2)=R^2$.

同理,$r(r+2r_1)=r(r+2r_2)=r(r+2r_3)=R^2$,推得 $r_1=r_2=r_3$.

从而$\triangle A_1A_2A_3$ 的三边相等,即为正三角形.

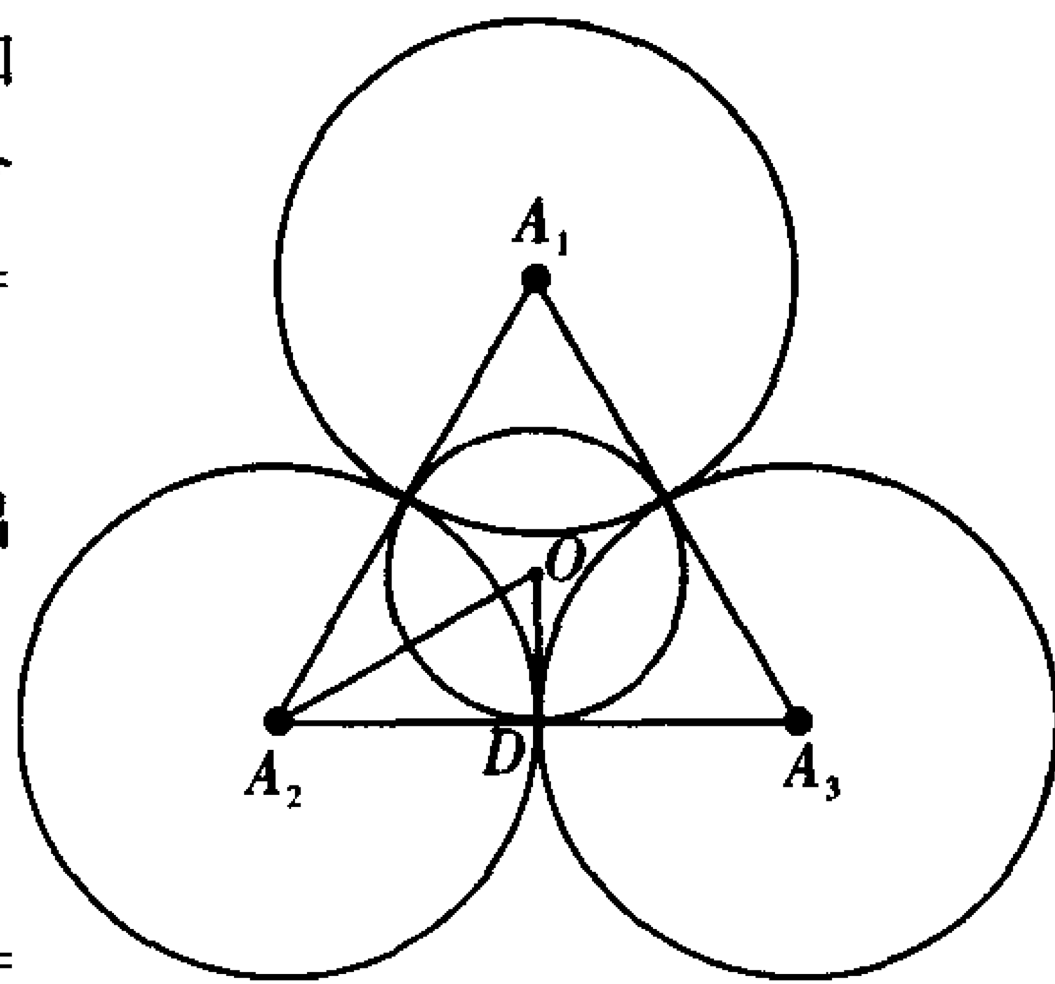


图 1-10

②若$\odot O(r)$与 S_1、S_2、S_3 均内切，类似于①，只需把 $r+2r_1$，$r+2r_2$，$r+2r_3$ 相应地改为 $r-2r_1$，$r-2r_2$，$r-2r_3$ 即可，仍可证得$\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形（不考虑$\odot O(R)$为$\triangle A_1A_2A_3$ 的旁切圆的情形）.

(2)再设 S_1、S_2、S_3 中有一对外切，两对内切，则易证得 O 点必在$\triangle A_1A_2A_3$ 外，不可能作$\odot O(R)$为$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆. 易知 S_1、S_2、S_3 不可能再有其他情形.

至此，平面几何中的结论正确，类比到空间，回到原问题的证明.

当 S_1、S_2、S_3、S_4 两两外切时，用完全类似于类比命题证明(1)中的方法，可推得$\triangle A_1A_2A_3$，…，$\triangle A_2A_3A_4$ 均为正三角形（亦即应用"圆幂定理"的推广"球幂定理"）. 从而得四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体.

当 S_1、S_2、S_3、S_4 不两两外切，用类似于类比命题证明中的(2)的方法，也易知不可能作球 $O(R)$ 与六条棱 A_1A_2，…，A_3A_4 均相切. 证毕.

综上，由于类比把人们对甲类事物的认识推移到对乙类事物的认识，扩大了认识领域. 所以，类比是温故而知新，发现新想法、新解法的有力工具，也帮助我们从固有的探索模式中解放出来，启发我们多方探求，思维活泼善变.

8. 探索可从美学角度考虑

利用美的启示，发掘美的因素，认识美的结构，追求美的形式，发挥美的潜意识作用来进行数学问题解法的探索，是探索法的一个重要方面，因为数学中的简单美、对称美、相似美、和谐美、奇异美充满了整个数学世界. 数学美的客观内容及对美的追求促进了数学的发展，美感为数学爱好者提供了极大的兴趣与动力.

例 29 (2004 年全国联赛题)如图 1-11，设点 O 在$\triangle ABC$ 内部，且有$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=0$，则$\triangle ABC$ 的面积与$\triangle AOC$ 的面积的比为(　　).

A. 2　　　　B. $\frac{3}{2}$

C. 3　　　　D. $\frac{5}{3}$

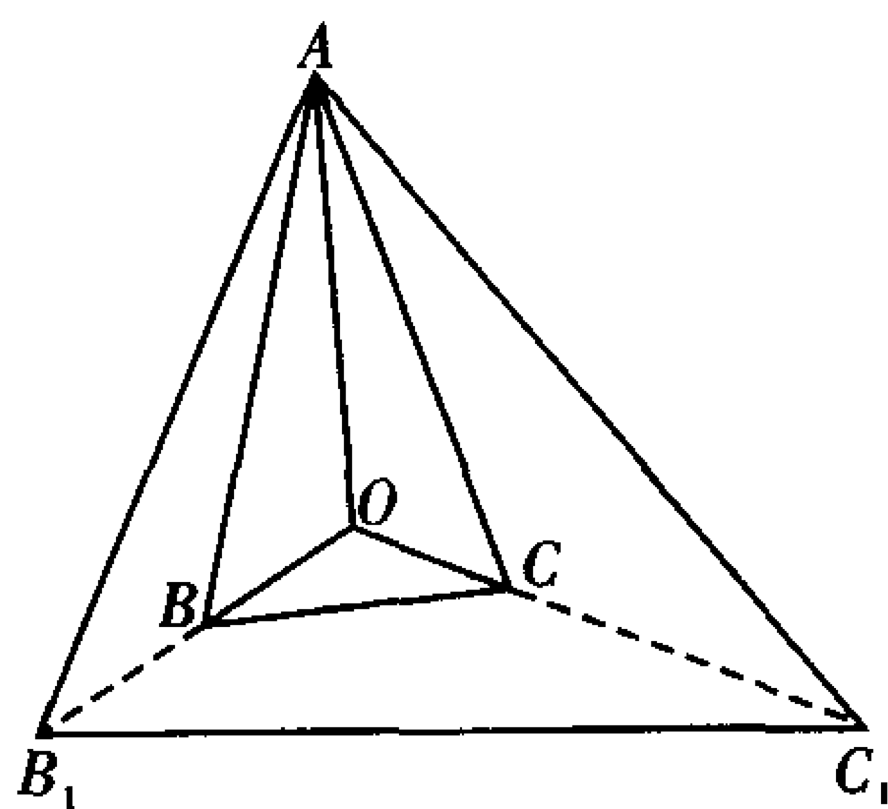


图 1-11

解 选 C. 理由：由题设 O 在$\triangle ABC$ 内部，且有$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=0$，这是一个非常美的条件式，说明 O 点应是一个三角形的重心（或从力的平衡角度来看），延长 OB 到 B_1，使 $OB_1=2OB$，延长 OC 到 C_1，使 $OC_1=3OC$，连 AB_1、B_1C_1、AC_1，显然 O 为$\triangle AB_1C_1$ 的重心（因$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=0$）.

此时　$S_{\triangle AOB_1}=S_{\triangle B_1OC_1}=S_{\triangle AOC_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle AB_1C_1}$.

而　$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{3}S_{\triangle AOC_1}=\frac{1}{9}S_{\triangle AB_1C_1}$，

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOB_1}=\frac{1}{6}S_{\triangle AB_1C_1}$，

$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S_{\triangle B_1OC_1}=\frac{1}{18}S_{\triangle AB_1C_1}$，即

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}+S_{\triangle OBC}=(\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18})S_{\triangle AB_1C_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle AB_1C_1}$，

故 $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACC}}=\dfrac{\frac{1}{3}S_{\triangle AB_1C_1}}{\frac{1}{9}S_{AB_1C_1}}=3.$

例 30 （2003 年北京市竞赛题）已知函数 $f(x)=\dfrac{2+x}{1+x}$. 记 $f(1)+f(2)+\cdots+f(1000)=m$, $f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})+\cdots+f(\frac{1}{1000})=n$,则 $m+n$ 的值是__________.

解 填 2998.5. 理由:由题设中出现的 $f(2)$ 与 $f(\frac{1}{2})$,…,$f(1000)$ 与 $f(\frac{1}{1000})$的自变量互为倒数的对称式,启引我们将其组合起来进行解题试探. 易知 $x\neq -1$,由于

$$f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{2+x}{1+x}+\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{(2+x)+(2x+1)}{1+x}=3,$$

又 $f(1)=\dfrac{2+1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$,从而

$$\begin{aligned}m+n&=[f(1)+f(2)+\cdots+f(1000)][f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})+\cdots+f(\frac{1}{1000})]\\&=f(1)+999\cdot[f(x)+f(\frac{1}{x})]\\&=\frac{3}{2}+2997=2998.5.\end{aligned}$$

例 31 （第 53 届罗马尼亚数学奥林匹克题）求方程组$\begin{cases}x(x-y)(x-z)=3,\\y(y-x)(y-z)=3,\\z(z-x)(z-y)=3\end{cases}$的复数解.

解 由于题设字母 x、y、z 的对称性,从而启引我们进行对称性探求.

易知 $x\neq 0,y\neq 0,z\neq 0,x\neq y,y\neq z,z\neq x$.

由方程组中前两个方程相除可得 $x^2+y^2=yz+zx$.

同理,可得 $y^2+z^2=xy+zx,z^2+x^2=xy+yz$.

将以上三式相加,得 $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$. ①

又将上述三式中前两个相减,得 $x^2-z^2=yz-xy$,

即 $x(x+y)=z(y+z)$,从而 $x+y+z=0$.

由 $(x+y+z)^2=0$,得 $xy+yz+zx=0$.

将 $x^2+y^2=yz+zx$ 代入①得 $z^2=xy$,即 $z^3=xyz$.

同理,可得 $x^3=y^3=xyz$.

设 $xyz=a$,由于 x、y、z 互不相同,故设 $x=\sqrt[3]{a},y=\sqrt[3]{a}\cdot\omega,z=\sqrt[3]{a}\cdot\omega^2$,其中 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

将其代入原方程组中每一个方程均得 $a(1-\omega)(1-\omega^2)=3$,即有 $a\cdot(2-\omega-\omega^2)=a\cdot 3=3$,故 $a=1$.

因此,原方程组的解(x,y,z)为$\{1,\omega,\omega^2\}$的一个全排列.

例 32 （2003年第32届美国数学奥林匹克题）设 a、b、c 是正实数，证明：

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 8.$$

分析 由于所证不等式左边式中 a、b、c 的对称性，因而探索证明过程应注意对称性考虑.

证法1 因为 a、b、$c\in\mathbf{R}$，由柯西不等式，知

$$\sqrt{2a^2+\frac{(b+c)^2}{2}+\frac{(b+c)^2}{2}}\geqslant\frac{\sqrt{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)+\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)}{3}=\frac{\sqrt{2}(a+b+c)}{3},$$

从而 $2a^2+(b+c)^2\geqslant\frac{2}{3}(a+b+c)^2$.

同理 $2b^2+(c+a)^2\geqslant\frac{2}{3}(a+b+c)^2$，$2c^2+(a+b)^2\geqslant\frac{2}{3}(a+b+c)^2$.

若 $4a\geqslant b+c$，$4b\geqslant c+a$，$4c\geqslant a+b$， ①

则
$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=2+\frac{(4a-b-c)(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}$$
$$\leqslant 2+\frac{3(4ab+4ac-b^2-2bc-c^2)}{2(a+b+c)^2}.$$

同理 $\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}\leqslant 2+\frac{3(4bc+4ba-a^2-2ac-c^2)}{2(a+b+c)^2}$，

$\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 2+\frac{3(4ca+4cb-a^2-2ab-b^2)}{2(a+b+c)^2}$. 以上三式相加，得

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$$
$$\leqslant 6+\frac{3(6ab+6bc+6ca-2a^2-2b^2-2c^2)}{2(a+b+c)^2}$$
$$=6+\frac{3[3(a+b+c)^2-5a^2-5b^2-5c^2]}{2(a+b+c)^2}$$
$$=6+\frac{9}{2}-\frac{15}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$$
$$\leqslant\frac{21}{2}-\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{3}=8.$$

若①不成立，不妨设 $4a<b+c$，则 $4a(b+c)<(b+c)^2$，两边同时加上 $4a^2+(b+c)^2$，得

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}<2.$$

由柯西不等式，得

$$[b+b+(c+a)^2]\leqslant[b^2+b^2+(c+a)^2]\cdot(1+1+1),$$

故 $\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}\leqslant 3$.

同理，$\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 3$.

所以 $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}<8$.

综上，原不等式成立，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

证法 2 注意到在探索证明中既从变更问题着手，又从美学角度考虑，则可简证如下：

因 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$ 及 a、b、c 的对称性，可对 a、b、c 乘一个合适的因子，满足 $a+b+c=3$，故原问题变更为证明：

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2}\leqslant 8.$$

令 $f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x^2)}$，则问题又变更为证明：

$f(a)+f(b)+f(c)\leqslant 8.$

由于

$$f(x)=\frac{x^2+6x+9}{3(x^2-2x+3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+3}$$
$$=\frac{1}{3}(1+\frac{8x+6}{x^2-2x+3})=\frac{1}{3}[1+\frac{8x+6}{(x-1)^2+2}]$$
$$\leqslant\frac{1}{3}(1+\frac{8x+6}{2})=\frac{1}{3}(4x+4).$$

从而 $f(a)+f(b)+f(c)\leqslant\frac{1}{3}(4a+4+4b+4+4c+4)=8.$ 其中等号不发且仅当 $a=b=c=x=1$ 时取得.

9. 探索须充分利用已有信息

单墫教授阐述探索法时，曾说过①，老练的解题者喜欢将信息重新编排（题目的复述，各种各样的解释等），变为容易记忆、便于运用的形式. 已知条件是信息；在中间过程得到的结果或引理也是信息；要证的结论，要求解的目标等更是重要的信息. 如果题做不出，最好再看看这些东西，或许会有新的启发.

例 33 （2003 年全国高中联赛题）过抛物线 $y^2=8(x+2)$ 的焦点 F 作倾斜角为 60° 的直线. 若此直线与抛物线交于 A、B 两点，弦 AB 的中垂线与 x 轴交于点 P，则线段 PF 的长等于（　　）.

A. $\dfrac{16}{3}$　　B. $\dfrac{8}{3}$　　C. $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$　　D. $8\sqrt{3}$

解 选 A. 理由：充分发掘题设信息，知抛物线焦点与坐标原点重合，故直线 AB 的方程为 $y=\tan 60^\circ\cdot x=\sqrt{3}x$.

因此，A、B 两点的横坐标满足方程 $3x^2-8x-16=0$（即将 $y=\sqrt{3}x$ 代入 $y^2=8(x+2)$ 得）. 由此求得弦 AB 中点的横坐标 $x_0=\frac{1}{2}(x_A+x_B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$，纵坐标 $y_0=\sqrt{3}x_0=\frac{4}{\sqrt{3}}$，进而求得其中垂线方程为 $y-\frac{4}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{4}{3})$. 令 $y=0$，得点 P 的横坐标 $x=4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$，即 $PF=\frac{16}{3}$.

例 34 （2002 年中国西部数学奥林匹克）设 α、β 为方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根，令 $a_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$，$n=1,2,\cdots$.

(1)证明：对任意正整数 n，有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$；

(2)求所有正整数 a、b，$a<b$，满足对任意正整数 n，有 b 整除 a_n-2na^n.

---

① 单墫. 数学竞赛研究教程[M]. 南京：江苏教育出版社，1993：9

解 (1)由题设条件可知 $\alpha^2=\alpha+1$,$\beta^2=\beta+1$,即有 $\alpha^{n+2}=\alpha^{n+1}+\alpha^n$,$\beta^{n+2}=\beta^{n+1}+\beta^n$,从而

$$a_{n+2}=\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha^{n+1}+\alpha^n)-(\beta^{n+1}+\beta^n)}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=a_{n+1}+a_n.$$

(2)由条件可知 $b|(a_1-2a)|$,由 $a_1=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}$,$a_2=\frac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}$及韦达定理可知 $a_1=a_2=1$. 于是,$b|(1-2a)$,注意到 $1\leqslant 2a-1<2b-1<2b$,而 $2a-1$ 是 b 的倍数,故 $b=2a-1$.

又利用题设信息,有 $b|(a_3-6a^3)$,注意到 $a_3=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=2$,即有$(2a-1)|(6a^3-2)$.

而 $6a^3-2=3a^2(2a-1)+3a^2-2$,故$(2a-1)|(3a^2-2)$. 从而$(2a-1)|(6a^2-4)$.

从而,$(2a-1)|(2a-6)$,而 $2a-b=(2a-1)+5$,于是$(2a-1)|5$.

所以,$2a-1=1$ 或 5. 但 $2a-1=1$ 推出 $a=b=1$,与 $a<b$ 矛盾.

故 $2a-1=5$,进而 $a=3,b=5$.

下面证明:对任意 $n\in\mathbf{N}$,均有 $5|(a_n-2n\cdot 3^n)$.

对此,可利用数学归纳法予以证明(以下略).

10. 探索也可以尝试"跟着感觉走"

探索,就意味着必须自己去找路①."从某种程度上,从某种意义上说,解题者必须靠他的无法说清的感觉."(波利亚语)"感觉,常可以帮助你估计方向或猜出结果."事实上,"任何认真考虑过他的问题的人对于解的接近程度和问题进展的步子都会有一种明确的感觉,他或许没有用言词去表达,但是他会敏感到比如:'这样做是对的,解可能就在这附近',或者'这样太慢了,解还是离得很远',或者'我卡住了,一点没有进展',或者'我正在偏离问题的解',等等."(波利亚语)事实上,头脑灵活,感觉敏锐的人,往往会考虑到各种不同的途径,以供选择. 当一条途径行不通时,便转向其他途径.

例 35 (2002 年全国高中联赛题)如图 1-12,由曲线 $x^2=4y$,$x^2=-4y$,$x=4$,$x=-4$ 围成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_1;满足 $x^2+y^2\leqslant 16$,$x^2+(y-2)^2\geqslant 4$,$x^2+(y+2)^2\geqslant 4$ 的点(x,y)组成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_2,则(　　).

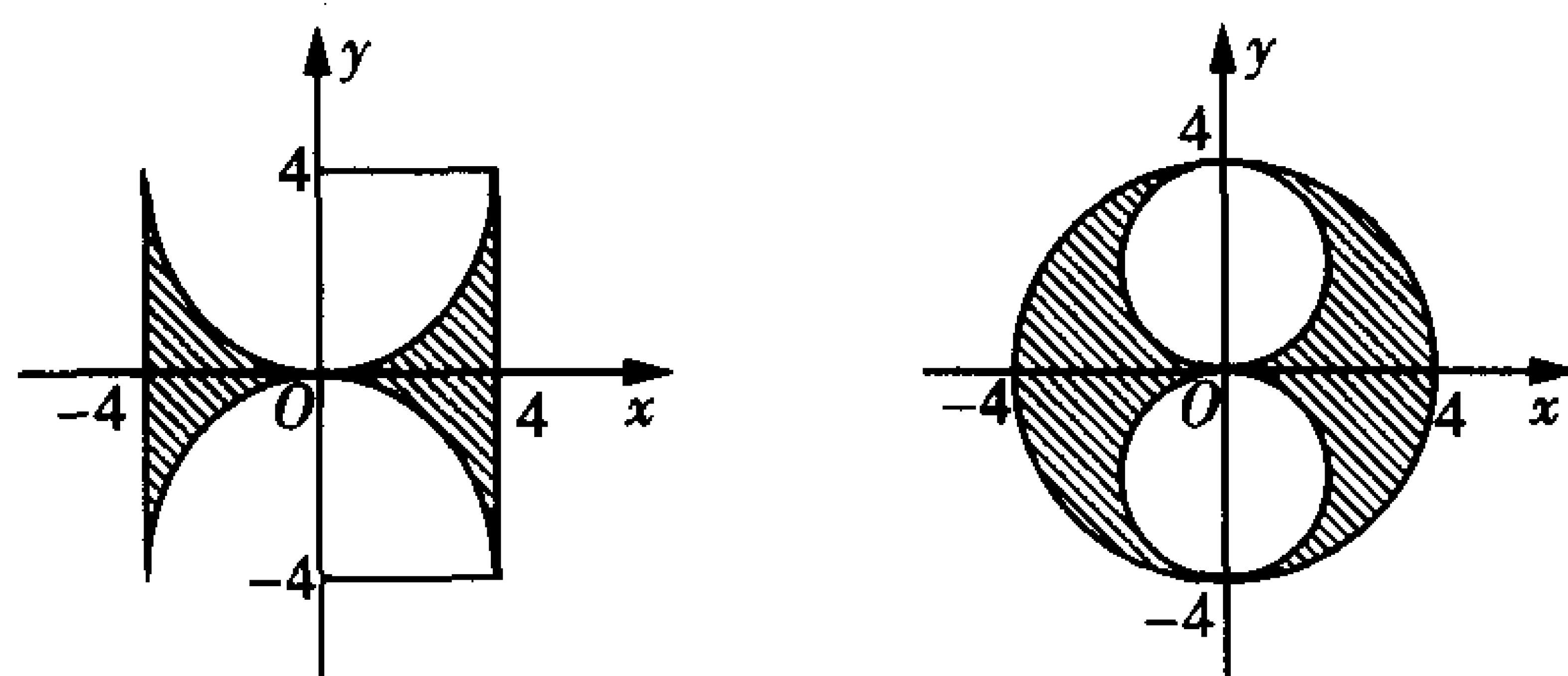


图 1-12

A. $V_1=\frac{1}{2}V_2$　　B. $V_1=\frac{2}{3}V_2$　　C. $V_1=V_2$　　D. $V_1=2V_2$

解 选 C. 理由:观察图 1-12,感觉阴影部分的两图面积似乎相等,且变化趋势都是由小增大,再减小,答案可能应选 C. 下面,我们实际推导看看:

---

① 单墫. 数学竞赛研究教程[M]. 南京:江苏教育出版社,1993:11

如图1-12，两图形绕 y 轴旋转所得旋转体夹在两相距为8的平行平面之间. 用任意一个与 y 轴垂直的平面截这两个旋转体，设截面与原点距离为 $|y|$，则所得截面积

$S_1=\pi(4^2-4|y|)$，$S_2=\pi(4^2-y^2)-\pi[4-(2-|y|^2)]=\pi(4^2-4|y|)$. 故 $S_1=S_2$.

由祖暅原理知，两几何体体积相等，即 $V_1=V_2$.

例36 （1992年日本数学奥林匹克题）设以 $t:(1-t)$ 的比例内分 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 的点为 P、Q、R，以线段 AP、BQ、CR 为三边的三角形面积为 K，$\triangle ABC$ 的面积为 L. 求 $\frac{K}{L}$（用 t 表示）.

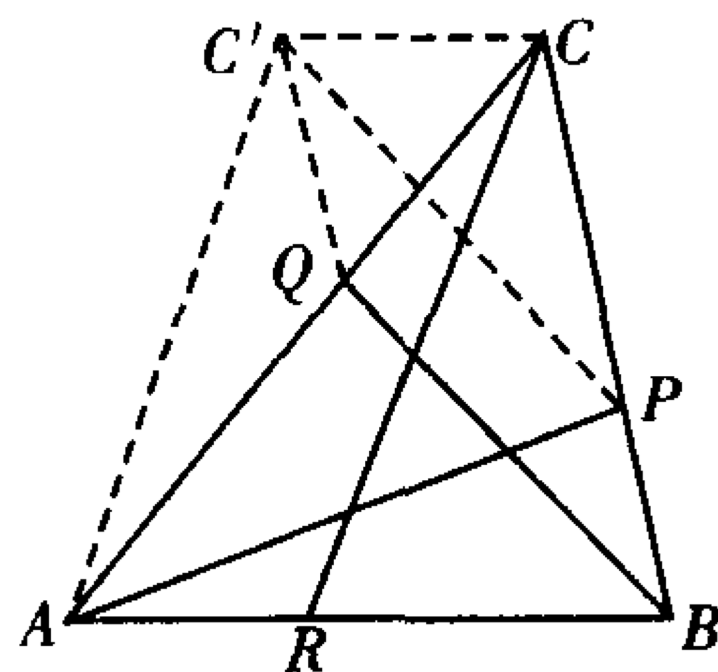


图1-13

解 由题设，感觉到线段 AP、BQ、CR 可移动而组成一个可以计算其面积的三角形，这样便可求出比例 $\frac{K}{L}$.

如图1-13，平移线段 CR 至 $C'A$ 处，则得平行四边形 $ARCC'$. 如果连结 PC'，且有 $PC'=BQ$ 便可达到初步目标. 事实上，连 $C'Q$ 在 $\triangle CC'Q$ 和 $\triangle ABC$ 中，令 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，由 $CQ=tb$，$CC'=AR=tc$，$\angle QCC'=\angle CAB$，知 $\triangle CC'Q\backsim\triangle ABC$.

因此，$C'Q=ta$，即 $C'Q=PB$.

又由三角形相似，有 $\angle CC'Q=\angle ABP$，则 $C'Q\parallel PB$.

于是，知 $BPC'Q$ 为平行四边形. 故有 $C'P=QB$.

因此，以 AP、BQ、CR 为三边的三角形是 $\triangle APC'$.

从而，
$$\begin{aligned}K&=S_{\triangle APC'}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACC'}-S_{\triangle ABP}-S_{\triangle PCC'}\\&=L+S_{\triangle ARC}-S_{ABP}-\frac{1}{2}(1-t)a\cdot tc\cdot\sin(\pi-B)\\&=L+tL-tL-t(1-t)L\\&=(t^2-t+1)L.\end{aligned}$$

故 $\frac{K}{L}=t^2-t+1$ 为所求.

例27 （2004年第33届美国数学奥林匹克题）设 a、b、c 为正实数，证明：

$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\geqslant(a+b+c)^3$

分析 欲证不等式左边的三个因式，每一个均是关于一个字母独立的形式相同的因式，且字母的次数较高，这使我们感觉到：可先单独考察一个因式，且应关注减小目标和变更问题的探索方法的运用，即若能找到某一个其值小于这个5次式的3次式，来变更这个不等式. 我们试试看能否成功，还会遇到什么挫折？

证明 注意到 $a>0$，有
$$\begin{aligned}(a^5-a^2+3)-(a^3+2)&=a^5-a^3-a^2+1\\&=a^3(a^2-1)-(a^2-1)=(a^3-1)(a^2-1)\\&=(a-1)^2(a+1)(a^2+a+1)\geqslant0.\end{aligned}$$

所以 $a^5-a^2+3\geqslant a^3+2$.

同理 $b^3-b^2+3\geqslant b^3+2$，$c^3-c^2+3\geqslant c^3+2$.

从而，只需证明 $(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)\geqslant(a+b+c)^3$. （*）

为证（*）式，我们可考虑更一般的结论：对任意正实数 x_i、y_i、z_i（$i=1,2,3$）. 均有

$(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3)\geqslant(\sqrt[3]{x_1x_2x_3}+\sqrt[3]{y_1y_2y_3}+\sqrt[3]{z_1z_2z_3})^3$. （**）

事实上，$\dfrac{\sqrt[3]{x_1x_2x_3}}{\sqrt{(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3)}}$

$$=\sqrt[3]{\frac{x_1}{x_1+y_1+z_1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x_2}{x_2+y_2+z_2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x_3}{x_3+y_3+z_3}}$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_1+y_1+z_1}+\frac{x_2}{x_2+y_2+z_2}+\frac{x_3}{x_3+y_3+z_3}\right)$$

同理 $\dfrac{\sqrt[3]{y_1y_2y_3}}{\sqrt[3]{(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3)}}$

$$\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{y_1}{x_1+y_1+z_1}+\frac{y_2}{x_2+y_2+z_2}+\frac{y_3}{x_3+y_3+z_3}\right),$$

$$\frac{\sqrt[3]{z_1z_2z_3}}{\sqrt[3]{(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3)}}$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{z_1}{x_1+y_1+z_1}+\frac{z_2}{x_2+y_2+z_2}+\frac{z_3}{x_3+y_3+z_3}\right)$$

上述三式相加，取 $x_1=a^3,y_1=z_1=1;y_2=b^3,x_2=z_2=1;z_3=c^3,x_3=y_3=1$，即证得(*)式成立.

从而，原不等式成立.

注 对于(*)式，也可以直接运用卡尔松不等式(即 $n\times m$ 非负实数矩阵中，m 列每列元素之和的几何平均值不小于矩阵中 n 行每行元素的几何平均值之和)即证. 构造矩阵 $\begin{bmatrix}a^3 & 1 & 1\\ 1 & b^3 & 1\\ 1 & 1 & c^3\end{bmatrix}$，应用卡尔松不等式，即得(*)式.

以上，我们从十个方面，简介了探索法的一些规律. 从列举的例子中，也可以看到：在探索中常会遇到一些挫折，但这种情况不一定有害. 因为，这便于我们总结经验教训，权衡利弊，保留成功的部分，修正失败的部分，这正是通向成功的必由之路. 有些挫折，也许正反映了解题者知识结构方面的缺陷，它可以催人奋发，去攀登新的高峰.

从广义上说，一切解题的方法都可以说是探索法. 但从思维、思路、操作等各个不同层面考虑的侧重点不同又可有各种称呼的解题方法. 这就是我们在后面各章所介绍的一些解题方法.

【解题尝试】

A 组

1. (2000 年河北省竞赛题)当 $0<x\leqslant1$ 时，下列不等式正确的是(　　).

A. $\dfrac{\sin x}{x}<\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\leqslant\dfrac{\sin x^2}{x^2}$　　B. $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2<\dfrac{\sin x}{x}\leqslant\dfrac{\sin x^2}{x^2}$

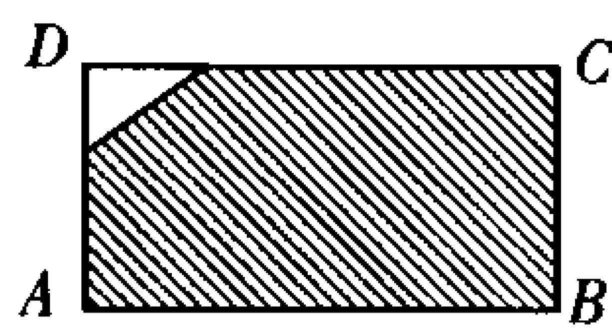
C. $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2<\dfrac{\sin x^2}{x^2}\leqslant\dfrac{\sin x}{x}$　　D. $\dfrac{\sin x^2}{x^2}\leqslant\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2<\dfrac{\sin x}{x}$

2. (2001 年湖南省竞赛题)若 $\log_a\dfrac{3}{5}<1$，则 a 的取值范围是(　　).

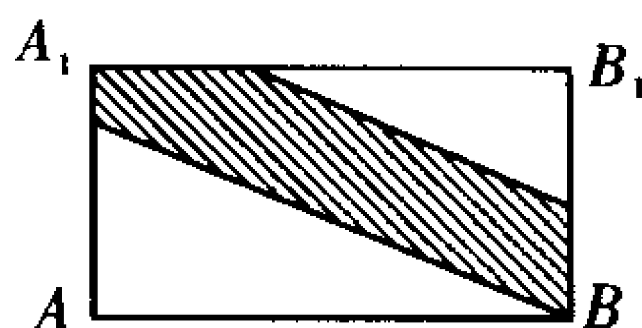
A. $0<a<\frac{3}{5}$　　　　B. $a>\frac{3}{5}$且$a\neq1$

C. $\frac{3}{5}<a<1$　　　　D. $0<a<\frac{3}{5}$或$a>1$

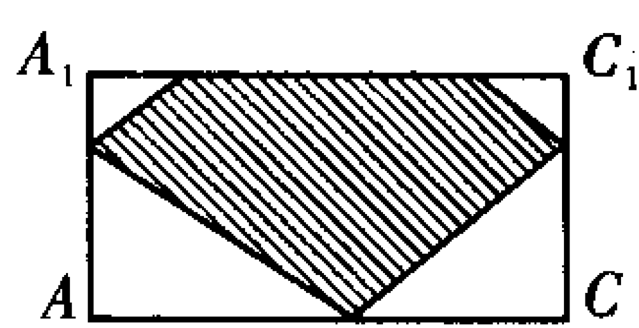
3.（2001年湖南省竞赛题）正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为A_1A的三等分点，F为C_1C的三等分点，$AE=2A_1E$，$CF=2C_1F$. 过B、E、F作正方体的截面. 下列所示的截面在相应面上的投影图中，错误的是（　　）.



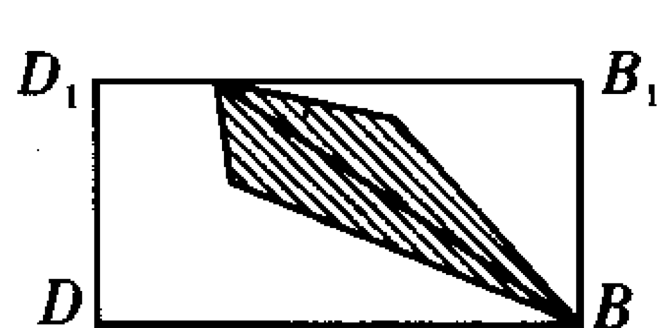
(A)



(B)



(C)



(D)

4.（2002年安徽省竞赛题）一个三棱锥的三个侧面中有两个是等腰直角三角形，另一个是边长为1的正三角形，那么，这个三棱锥的体积大小（　　）.

A. 有惟一确定的值　　　　B. 有2个不同值

C. 有3个不同值　　　　D. 有3个以上不同值

5.（2003年山东省竞赛题）已知α、β均为锐角，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{4}{5}$. 若设$\sin\beta=x$，$\cos\alpha=y$，则$y$与$x$的函数关系式为（　　）.

A. $y=-\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{5}x(0<x<1)$　　　　B. $y=-\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{5}x(\frac{4}{5}<x<1)$

C. $y=-\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{5}x(\frac{4}{5}<x<1)$　　　　D. $y=-\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{5}x(0<x<1)$

6.（2003年山东省竞赛题）设等差数列的前四项的和为26，后四项的和为110，这个数列的所有各项的和为187. 那么，这个数列的项数是（　　）.

A. 11　　　　B. 22　　　　C. 8　　　　D. 16

7. 已知x、y、z为互不相等的实数，且$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$，求证：$x^2y^2z^2=1$.

8.（第31届IMO国家集训队试题）实数x、y、z满足$x+y=z-1$　　①

$xy=z^2-7z+14$　　②

问x^2+y^2的最大值是什么？在z为何值时x^2+y^2取最大值？

9.（2003年安徽省竞赛题）设$a\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=ax^2+x-a(|x|\leqslant1)$.

（1）若$|a|\leqslant1$，求证：$|f(x)|\leqslant\frac{5}{4}$；

（2）求使函数$f(x)$有最大值$\frac{17}{8}$的a的值.

10. 已知函数$f(x)=x^2+x-2$.

（1）试求函数$g(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}$的解析式；

（2）若$a>0$时，直线$y=ax+b$与曲线$y=g(x)$交于三个不同的点，试确定a与b的关系式，并画

图表示以 a、b 为坐标的点 (a,b) 所在的区域.

B组

1. (第28届俄罗斯数学奥林匹克题)设 a、b、c 为正数,有 $a+b+c=3$. 证明:$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geqslant ab+bc+ca$.
2. (第29届俄罗斯数学奥林匹克题)数集 M 由2003个不同的数组成,对于 M 中任何两个不同的元素 a、b,数 $a^2+b\sqrt{2}$ 都是有理数. 证明:对于 M 中任何数 a,数 $a\sqrt{2}$ 都是有理数.
3. (同上)$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于点 A、B,过点 A 所作的两圆的切线分别与 BO_1 和 BO_2 相交于点 K 和 L. 证明:$KL/\!/O_1O_2$.
4. (第28届俄罗斯数学奥林匹克题)试求出具有如下性质的最小的正整数:它可以表示为2002个各位数字和相等的正整数之和,又可以表示为2003个各位数字之和相等的正整数之和.
5. (第26届俄罗斯数学奥林匹克题)设 a、b、c 为三个不同的实数,使得方程 $x^2+ax+1=0$ 和 $x^2+bx+c=0$ 有一个相同的实根,并且使方程 $x^2+x+a=0$ 和 $x^2+cx+b=0$ 也有一个相同的实根. 试求 $a+b+c$.
6. (第26届俄罗斯数学奥林匹克题)设锐角三角形 ABC 的外接圆 ω 的圆心为 O. 经过 A、O、C 三点的圆 ω_1 的圆心为 K,且与边 AB 和 BC 分别相交于 M 和 N,现知点 L 与 K 关于直线 MN 对称. 证明:$BL\perp AC$.
7. (2002,保加利亚国家数学奥林匹克(地区级)题)设 E、F 是 $\square ABCD$ 的边 AD、CD 上的点,$\angle AEB=\angle AFB=90°$,$EG/\!/AB$,且 EG 与 BF 交于点 G. 若 AF 交 BE 于点 H,DH 交 BC 于点 I,证明:$FI\perp GH$.
8. (2002,保加亚利国家数学奥林匹克(地区级)题)定圆上两定点 A、B 及动点 C 构成的 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,AB 的中点 M 在边 AC、BC 上的投影分别为点 E、F. 证明:EF 的中垂线经过一定点.
9. (第19届希腊数学奥林匹克题)设实数 α、β、γ 满足 $\beta\gamma\neq 0$,且 $\frac{1-\gamma^2}{\beta\gamma}\geqslant 0$. 证明:$10(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma^3)\geqslant 2\alpha\beta+5\alpha\gamma$.
10. (希腊第43届IMO选拔考试题)设 x、y、a 是实数,且满足 $x+y=x^3+y^3=x^5+y^5=a$. 求 a 的所有可能的值.
11. (第52届白俄罗斯数学奥林匹克(决赛B类)题)已知正实数 a、b、c、d. 求证:
$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\leqslant\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\leqslant\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}+\frac{2|ad-bc|}{\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}}.$$
12. (第53届罗马尼亚数学奥林匹克(决赛)题)对所有非负整数 x、y,求所有函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,满足 $f(3x+2y)=f(x)f(y)$,其中 $\mathbf{N}$ 为非负整数集.

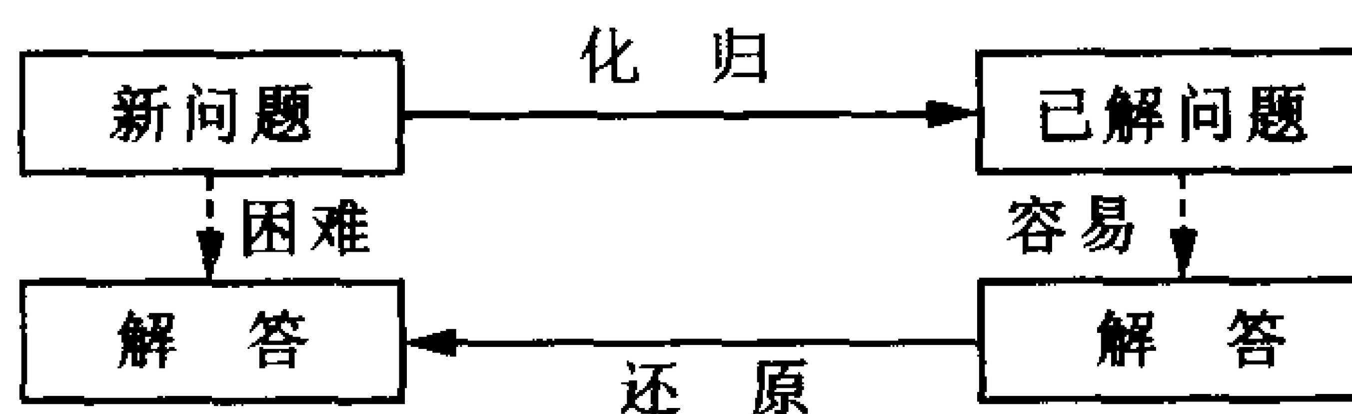
第 2 章　化归法

【学习目标】

前苏联莫斯科大学教授C·A·雅诺夫斯卡娅曾说过："解题就是把题归结为已经解过的题．"这就是说，我们在求解数学问题时，在充分搜集题设信息的基础上，进行一系列的加工处理，并不断地变换输出，一步步地推演，最后使条件和目标建立起和谐的联系而获得问题的解决，但这种加工的方法或变换的手段中，化归法占据着极为重要的地位．

化归法也是数学家处理问题的一种独特的思维方法．匈牙利数学家罗莎·彼得(Rosza Peter)曾对此作过十分生动形象的描述："假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴，现在的任务是要烧水，你应当怎样去做？"问题很简单，谁都知道"先在水壶中放上水，点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上．"接着，罗莎又提出第二个问题："假设所有的条件都和原来一样，只是水壶中已有了足够的水，这时，你又应该怎样去做？"对于这一问题，人们往往会回答说："点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上．"但是，罗莎认为这并不是最好的回答，因为"只有物理学家才会这样做，而数学家则会倒去壶中的水"，并且声称"我已把后一问题化归成先前的问题了．"

罗莎的比喻固然有点夸张，但却道出了化归法的基本特征：在解决一个问题时，人们的眼光并不落在问题的结论上，而是去寻觅、追溯一些已知的结果，尽管向前走几步也许能达到目的，但我们也情愿退一步回到熟悉的、原来已知的问题上去．化归法解题的基本过程如下：



数学竞赛中的问题，基本上都是一些新问题．在求解这些新问题时，我们应在对问题作细致观察的基础上，展开丰富的联想(譬如接近联想、类似联想、对比联想、关系联想、特征联想等)，以求唤起对有关旧知识的回忆，开启思维的大门，侧重于顺利地借助旧知识、旧经验来解决面临的新问题的解题方法，我们称之为"化归法"．

【解题钥匙】

化归法的应用十分广泛，采用的方式也各种各样．在这里，我们从思维的角度介绍化归法运用的四种形式．

1. 横向化归

横化化归就是通过对问题的有关量进行代换或转换、等价变换论题或运用同构变换等手法将生疏、复杂、困难的问题化归为熟悉、简单、容易的问题来达到简捷求解目的．

例 1 （2004 年全国高中联赛题）不等式 $\sqrt{\log_2 x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^3+2>0$ 的解集为（　　）.

A. $[2,3)$　　B. $(2,3]$　　C. $[2,4)$　　D. $(2,4]$

解 选 C. 理由：原不等式可化归为等价的不等式组 $\begin{cases}\sqrt{\log_2 x-1}-\frac{3}{2}\log_2 x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}>0,\\ \log_2 x-1\geqslant 0.\end{cases}$

设 $\sqrt{\log_2 x-1}=t$，则有 $\begin{cases}t-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}>0,\\ t\geqslant 0.\end{cases}$

解得 $0\leqslant t<1$，即 $0\leqslant \log_2 x-1<1$. 所以

$2\leqslant x<4$.

例 2 （2000 年河北省竞赛题）当 $a>1$ 时，若不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{7}{12}\cdot(\log_{a+1}x-\log_a x+1)$ 对于不小于 2 的正整数 n 恒成立，则 x 的范围是（　　）.

A. $2<x<\frac{29}{17}$　　B. $0<x<1$　　C. $0<x<4$　　D. $x>1$

解 选 D. 理由：将原不等式化归为简单的不等式形式. 设 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$，则

$f(n+1)=f(n)+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=f(n)+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>f(n)$.

所以，$f(n)$ 为增函数，故 $f(n)\geqslant f(2)=\frac{7}{12}$.

又已知不等式恒成立，所以

$\frac{7}{12}(\log_{a+1}x-\log_a x+1)<\frac{7}{12}$，即 $\log_{a+1}x<\log_a x$.

由于 $a>1$，从而 $x>1$.

例 3 （2002 年湖南省竞赛题）设长方体的长、宽、高分别为 a、b、c，其对角线长为 l. 试证：$(l^4-a^4)(l^4-b^4)(l^4-c^4)\geqslant 512a^4b^4c^4$.

证明 原不等式等价于

$(\frac{l^4}{a^4}-1)(\frac{l^4}{b^4}-1)(\frac{l^4}{c^4}-1)\geqslant 512$.

设 $x=\frac{a^2}{l^2}$，$y=\frac{b^2}{l^2}$，$z=\frac{c^2}{l^2}$，则 $x+y+z=1$，且原不等式可化归为

$(\frac{1}{x^2}-1)(\frac{1}{y^2}-1)(\frac{1}{z^2}-1)\geqslant 512$.

$$
\begin{aligned}
\text{由}\ \frac{1}{x^2}-1&=\frac{(1-x)(1+x)}{x^2}=\frac{(y+z)(x+y+z+x)}{x^2}\\
&\geqslant\frac{2\sqrt{yz}(2x+2\sqrt{yz})}{x^2}\\
&\geqslant\frac{2\sqrt{yz}\cdot 4\sqrt{x\sqrt{yz}}}{x^2}=\frac{8\sqrt[4]{x^2y^3z^3}}{x^2},
\end{aligned}
$$

其中，等号当且仅当 $x=y=z$ 时取得.

同理，有$\frac{1}{y^2}-1\geq 8\frac{\sqrt[4]{x^3y^2z^3}}{y^2}$，

$\frac{1}{z^2}-1\geq 8\frac{\sqrt[4]{x^3y^3z^2}}{z^2}$.

以上三式相乘，即证得原不等式成立.

例 4 （第53届罗马尼亚数学奥林匹克（决赛））求所有实数a、b、c、d、$e\in[-2,2]$，使得

$a+b+c+d+e=0$，$a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=0$，$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=10$.

解 进行变元代换化归，设$a=2\cos x$，$b=2\cos y$，$c=2\cos z$，$d=2\cos t$，$e=2\cos u$. 由于$2\cos 5x=(2\cos x)^5-5(2\cos x)^3+5(2\cos x)=a^5-5a^3+5a$，所以，记$\sum$表示循环和时，

$\sum 2\cos 5x=\sum a^5-5\sum a^3+5\sum a=10$，即　$\sum\cos 5x=5$.

从而，$\cos 5x=\cos 5y=\cos 5z=\cos 5t=\cos 5u=1$.

由$\cos 5x=1$，得$5x=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为$\cos 0=1$，$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，所以，$a$、$b$、$c$、$d$、$e\in\{2,\frac{\sqrt{5}-1}{2},-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\}$.

由$\sum a=0$知这5个数一定是1个2，2个$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，2个$-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

如上的a、b、c、d、e满足$\sum a^3=0$.

例 5 （2002年罗马尼亚为IMO和巴尔干地区数学奥林匹克选拔考试供题（第二轮））在一次国际会议上，有四种官方语言. 任意两名会议代表可以用这四种语言之一进行讨论. 证明：至少有60%的会议代表能讲同一种语言.

证明 将问题化归：假设这四种语言分别为1，2，3，4.

(1)若存在一名会议代表只会一种语言，则显然其他代表均会这种语言.

(2)每名会议代表至少会两种语言，且只讲两种语言的代表中没有公共语言. 因此，对称地将会议代表分成如下的8类：

(1,2)，(1,3)，(2,3)，(1,2,3)，(1,2,4)，

(1,3,4)，(2,3,4)，(1,2,3,4).

如果能讲语言1，2，3的会议代表少于60%，用$x_{ij\cdots}$表示会讲语言$i,j\cdots$的会议代表的数目，则有

$$x_{12}+x_{13}+x_{123}+x_{124}+x_{134}+x_{1234}<\frac{3}{5}\sum_{i,j\cdots}x_{ij\cdots},$$

$$x_{12}+x_{23}+x_{123}+x_{124}+x_{234}+x_{1234}<\frac{3}{5}\sum_{i,j\cdots}x_{ij\cdots},$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{123}+x_{134}+x_{234}+x_{1234}<\frac{3}{5}\sum_{i,j\cdots}x_{ij\cdots}.$$

以上三式相加得

$$2\sum_{i,j\cdots}x_{ij\cdots}+x_{123}+x_{1234}<\frac{9}{5}\sum_{i,j\cdots}x_{ij\cdots},$$

即　$$\frac{1}{5}\sum_{i,j\cdots}x_{ij\cdots}+x_{123}+x_{1234}<0.$$

矛盾.

(3)每名会议代表至少会两种语言，只讲两种语言的代表中有一种语言是公共的. 类似地，将会

议代表分成如下的 8 类:

(1,2),(1,3),(1,4),(1,2,3),(1,2,4),

(1,3,4),(2,3,4),(1,2,3,4).

若结论不成立,则有

$$x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{123}+x_{124}+x_{134}+x_{1234}<\frac{3}{5}\sum_{i,j\cdots}x_{ij\cdots},$$

$$x_{12}+x_{123}+x_{124}+x_{234}+x_{1234}<\frac{3}{5}\sum_{i,j,\cdots}x_{ij\cdots},$$

$$x_{13}+x_{123}+x_{134}+x_{234}+x_{1234}<\frac{3}{5}\sum_{i,j,\cdots}x_{ij\cdots},$$

$$x_{14}+x_{124}+x_{134}+x_{234}+x_{1234}<\frac{3}{5}\sum_{i,j,\cdots}x_{ij\cdots}.$$

将第一个不等式乘 2 再与其他不等式相加,得

$$3(x_{12}+x_{13}+x_{14})+4(x_{123}+x_{124}+x_{134})+3x_{234}+5x_{1234}<3\sum_{i,j,\cdots}x_{ij\cdots},$$

即 $x_{123}+x_{124}+x_{134}+2x_{1234}<0.$

矛盾.

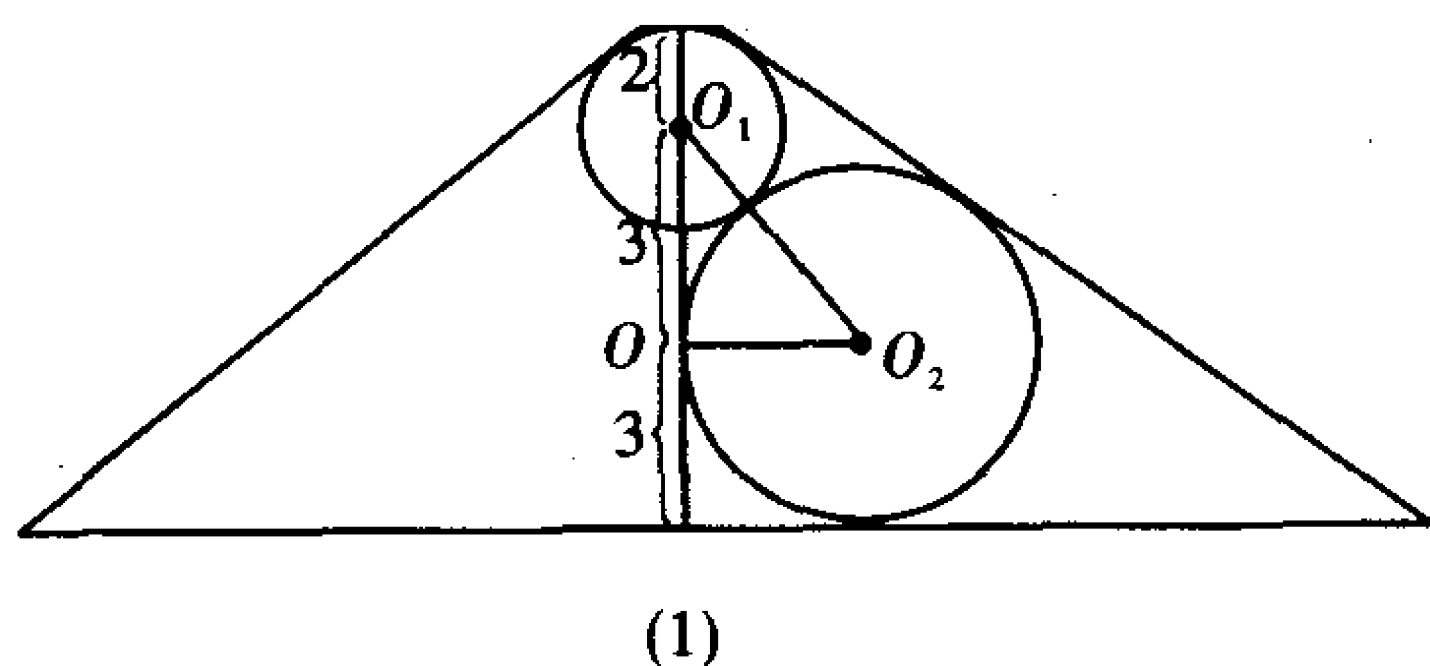
2. 纵向化归

纵向化归是把面临的新问题,通过减元(消元)、降格(或降次、降维、降价)等加工的方法或手段化归为已经解决了的问题,或是化归为熟悉的、简单的、特殊的、具体的问题,通过对新问题的解决而将原问题解决.

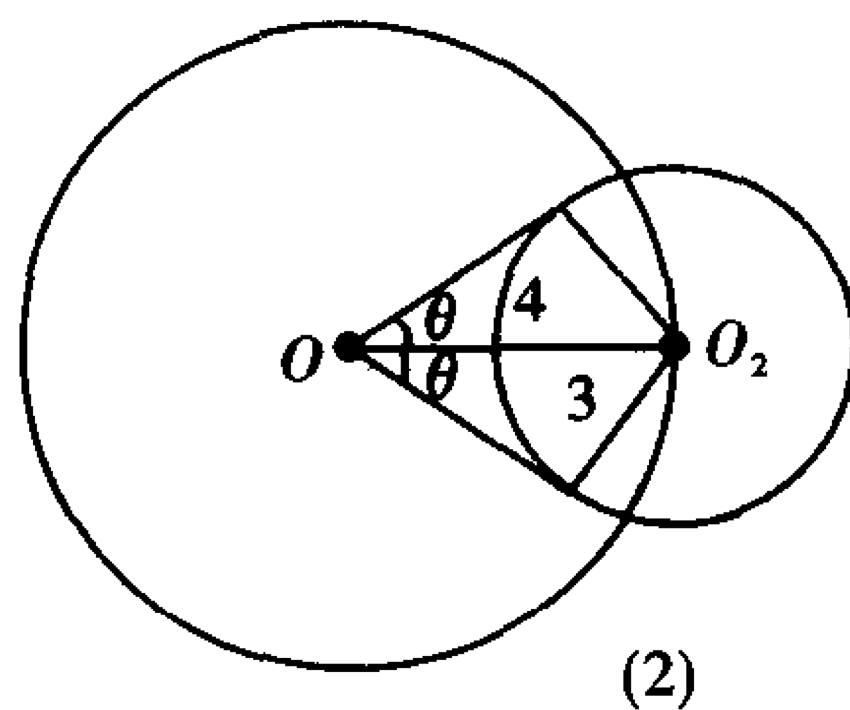
例 6 (1996 年全国高中联赛题)高为 8 的圆台内有一个半径为 2 的球 O_1,球心 O_1 在圆台的轴上,球 O_1 与圆台上底面、侧面都相切.圆台内可再放入一个半径为 3 的球 O_2,使得球 O_2 与球 O_1、圆台的下底面及侧面都只有一个公共点.除球 O_2,圆台内最多还能放入半径为 3 的球的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D.

解 选 B.理由:进行降维化归,作过 O_2 的圆台的轴截面,如图 2-1(1),再作过 O_2 与圆台的轴垂直的截面,过截面与圆台的轴交于圆 O,如图 2-1(2).



(1)



(2)

图 2-1

由图,易求得 $OO_2=4$.

这个问题等价于:连以 O 为圆心,4 为半径的圆上,除 O_2 外最多还可放几个点,使这些点及 O_2 为圆心,3 为半径的圆彼此至多有一个公共点.由图 2-1(1),知 $\sin45°<\sin\theta=\frac{3}{4}<\sin60°$,从而$45°<$

$\theta<60^\circ$，所以最多还可以放入$[\frac{360^\circ}{2\theta}]-1=3-1=2$个点，满足上述要求，即圆台内最多还可以放入半径为3的球2个.

例7 (2003年安徽省竞赛题)曲线$2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$和$3x^2-4xy+y^2-3x+y=0$的交点有(　　)个.

A. 2　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. 无穷多

解 选D. 理由:进行降格化归，由$2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$有$(2x+y+1)(x-y-1)=0$，即由此曲线退化为两条直线$2x+y+1=0$或$x-y-1=0$；由$3x^2-4xy+y^2-3x+y=0$有$(3x-y)(x-y-1)=0$，即此曲线退化为两条直线$3x-y=0$或$x-y-1=0$. 而两曲线退化的直线中有一对直线重合，故两曲线有无穷多个公共点.

例8 (2003年湖南省竞赛题)设x、y、z均取正实数，且$x+y+z=1$，求三元函数

$f(x,y,z)=\frac{3x^2-x}{1+x^2}+\frac{3y^2-y}{1+y^2}+\frac{3z^2-z}{1+z^2}$的最小值，并给出证明.

解 由于三元函数式中的三个分式函数都是独立变元式，且分子分母均含有2次变元，进行降次化归，为此，我们先来考察函数$g(t)=\frac{t}{1+t^2}$，可知$g(t)$为奇函数. 由于当$t>0$时，$\frac{1}{t}+t$在$(0,1)$内递减，易知$g(t)=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}$在$(0,1)$内递增，而对于$t_1$、$t_2\in(0,1)$且$t_1<t_2$时，有

$$(t_1-t_2)[g(t_1)-g(t_2)]\geqslant 0. \qquad (*)$$

所以，对任意$x\in(0,1)$，有

$$(x-\frac{1}{3})(\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{10})\geqslant 0,$$

故$\frac{3x^2-x}{1+x^2}\geqslant\frac{3}{10}(3x-1)$.

同理，$\frac{3y^2-y}{1+y^2}\geqslant\frac{3}{10}(3y-1)$；$\frac{3z^2-z}{1+z^2}\geqslant\frac{3}{10}(3z-1)$.

以上三式相加，有

$$f(x,y,z)=\frac{3x^2-x}{1+x^2}+\frac{3y^2-y}{1+y^2}+\frac{3z^2-z}{1+z^2}\geqslant\frac{3}{10}[3(x+y+z)-3]=0.$$

当$x=y=z=\frac{1}{3}$时，$f(x,y,z)=0$，故所求最小值为0.

注 利用函数的单调性作出形如因式的不等式，是证明不等式及求其些最值的一种重要方法。

例9 (2003年保加利亚国家数学奥林匹克题)求方程组$\begin{cases}x+y+z=3xy, & ①\\ x^2+y^2+z^2=3xz, & ②\\ x^3+y^3+z^3=3yz & ③\end{cases}$的实数解组的个数.

解 这是三元三次方程组，进行减元降次化归求解.

显然，当$y=0$时，由①得$x=-z$，再由②推出$x=z=0$. 于是，三元组$(0,0,0)$满足方程组.

设$y\neq 0$，令$a=\frac{x}{y}$，$b=\frac{z}{y}$. 于是，原方程组化为

$$\begin{cases}1+a+b=3ay,\\1+a^2+b^2=3ab,\\y(1+a^3+b^3)=3b.\end{cases}$$ 用$\frac{1+a+b}{3a}$替换 y,可得

$$\begin{cases}(1+a+b)(1+a^3+b^3)=9ab,\\1+a^2+b^2=3ab.\end{cases}$$

取 $u=a+b, v=ab$,可得

$$\begin{cases}(1+u)(1+u^3-3uv)=9v,\\1+u^2-2v=3v.\end{cases}$$

因此,$v=\frac{u^2+1}{5}$. 于是,

$0=u^4+u^3-6u^2+u-2=(u-2)(u^3+3u^2+1)$.

当 $u=2$ 时,可推出 $v=1$,即有 $a=b=1$.

于是得到一组解$(x,y,z)=(1,1,1)$.

再考虑函数 $f(u)=u^3+3u^2+1$,当 $u=-2$ 时,取得局部最大值;当 $u=0$ 时,取得局部最小值.

由于 $f(0)=1>0$,方程 $f(u)=0$ 有惟一的实根 u_0,其中 $u_0<-2$. 于是

$u_0^2-4\cdot\frac{u_0^2+1}{5}=\frac{u_0^2-4}{5}>0$. 从而,

方程组$\begin{cases}a+b=u_0\\ab=\frac{u_0^2+1}{5}\end{cases}$有两组解.

因此,我们得到了给定方程组的另外两组解. 故所给方程组共有 4 组实数解.

3. 同向化归

同向化归就是把面临的新问题进行命题分割成分解,化归为某一(或几)个可简捷求解的子问题,通过解决这一(或几)个子问题,从而也就可解决所有子问题;或者在推演中,进行同理推导,同解变形化简等. 这种化归就是在同一层次上"平行转化".

例 10 (1998 年全国高中联赛题)在正方体的 8 个顶点,12 条棱的中点,6 个面的中心及正方体的中心共 27 个点中,共线的三点组的个数是(　　).

A. 57　　B. 49　　C. 43　　D. 37

解 选 B. 理由:进行情形分割化归. 两端皆为顶点的共线三点组共有$\frac{8\cdot 7}{2}=28$(个);两端皆为面的中心的共线三点组共有$\frac{6\cdot 1}{2}=3$(个);两端点皆为各棱中点的共线三点组共有$\frac{12\cdot 3}{2}=18$(个),且没有别的类型的共线三点组,所以总共有 $28+3+18=49$ 个共线的三点组.

例 11 (1981 年全国高中联赛题)给出长方体 $ABCD-A'B'C'D'$,下列 12 条直线:AB'、BA'、CD'、DC'、AD'、DA'、BC'、CB'、AC、$A'C'$、BD、$B'D'$中有多少对异面直线?(　　).

A. 30 对　　B. 60 对　　C. 24 对　　D. 48 对

解 选 A. 理由:进行分解化归,所给 12 条直线都为长方体 $ABCD-A'B'C'D'$各侧面上的对角线. 先考虑直线 AB',与它相交的对角线有 AC、AD'、$B'D'$、$B'C$、$A'B$,与它平行的对角线有 DC',所以与 AB'异面的对角线共有 5 条:CD'、$A'C'$、BD、BC'、$A'D$. 同样地,对于长方体侧面上的每条对角线,都有另五个侧面上的 5 条对角线与它异面. 这样,12 条侧面对角线将形成 60 对异面直线组(有重复

的计算). 但在上述计数中,每对异面直线都计算了两次(相互计算一次),因此,只有 30 对异面直线.

例 12 (2001 年全国高中联赛题)用电阻值分别为 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6($a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6$)的电阻组装成一个如图 2-2 的组件,在组装中应如何选取电阻,才能使该组件总电阻值最小? 证明你的结论.

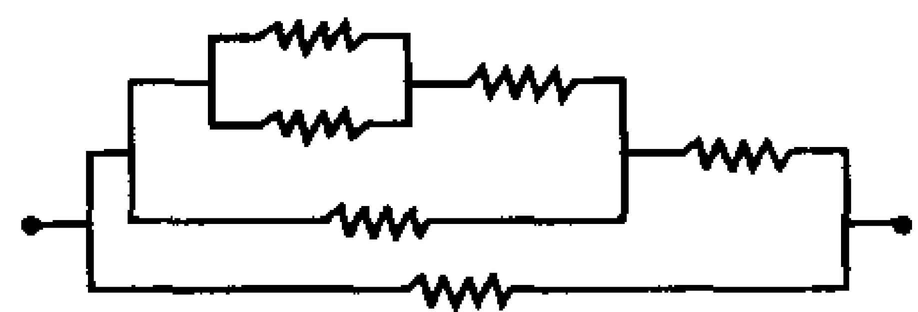


图 2-2

解 设 6 个电阻的组件,如图 2-3 的总电阻为 R_{FG},当 $R_i=a_i$,$i=2,3,4,5,6,$,R_1、R_2 是 a_1、a_2 的任意排列时,R_{FG} 最小.

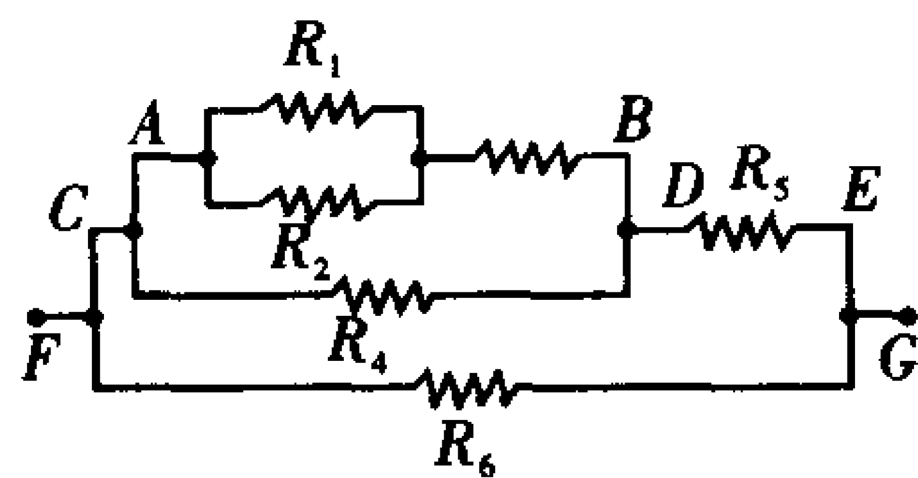


图 2-3

证明如下:

(1)设当两个电阻 R_1、R_2 并联时,所得组件 阻值为 R. 则 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. 故交换二电阻的位置,不改变 R 值,且当 R_1 或 R_2 变小时,R 也减小,因此不妨取 $R_1>R_2$.

(2)设 3 个电阻的组件如图 2-4 的总电阻为 R_{AB},有

$$R_{AB}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3$$

$$=\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1+R_2}$$

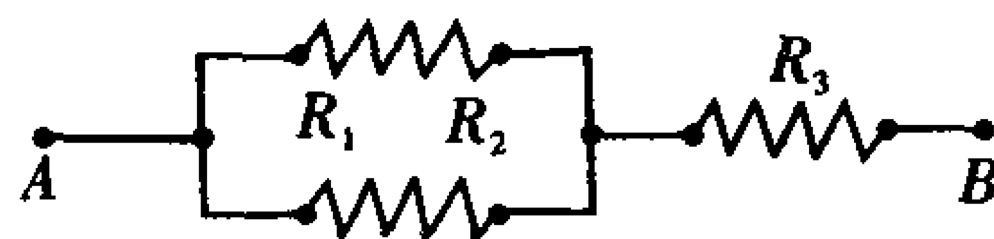


图 2-4

显然,R_1+R_2 越大,R_{AB} 越小. 所以,为使 R_{AB} 最小,必须取 R_3 为所取三个电阻中阻值最小的一个.

(3)设 4 个电阻的组件如图 2-5 的总电阻为 R_{CD},有

$$\frac{1}{R_{CD}}=\frac{1}{R_{AB}}+\frac{1}{R_4}$$

$$=\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_1R_4+R_2R_3+R_2R_4}{R_1R_2R_4+R_1R_3R_4+R_2R_3R_4}$$

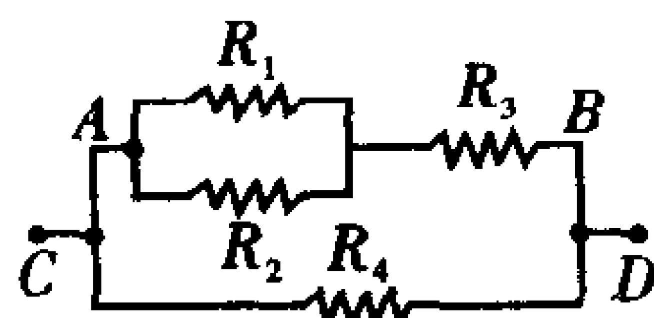


图 2-5

若记 $S_1=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}R_iR_j$,$S_2=\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}R_iR_jR_k$,则 S_1、S_2 为定值.

于是,$R_{CD}=\frac{S_2-R_1R_2R_3}{S_1-R_3R_4}$.

只有当 R_3R_4 最小,$R_1R_2R_3$ 最大时,R_{CD} 最小,故应取 $R_4<R_3$,$R_3<R_2$,$R_3<R_1$,即得总电阻的阻值最小.

(4)对于图 2-3,把由 R_1、R_2、R_3 组成的组件用等效电阻 R_{AB} 代替. 要使 R_{FG} 最小,由(3)必须使 $R_6<R_5$;且应(1),应使 R_{CE} 最小. 由(2)知要使 R_{CE} 最小,必须使 $R_5<R_4$,且应使 R_{CD} 最小.

而由(3),要使 R_{CD} 最小,应使 $R_4<R_3<R_2$ 且 $R_4<R_3<R_1$.

这就说明,要证结论成立.

例 13 (1986 年首届中国数学奥林匹克题)已知四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的四个顶点位于$\triangle ABC$ 的边上. 求证:四个三角形$\triangle P_1P_2P_3$、$\triangle P_1P_2P_4$、$\triangle P_1P_3P_4$ 以及$\triangle P_2P_3P_4$ 中,至少有一个的面积不大于$\triangle ABC$ 的面积的 1/4.

证明 四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的四个顶点落在$\triangle ABC$ 的边上,有两种情形:如图 2-6. 不过图中(2)可以化归到图中(1)的情形:去掉四边形 AP_1P_4C,即把 A 移到 P_1,C 移到 P_4,便得到. 此时,$\triangle ABC$ 的面积还减小了,从而只须证明图中(1)的情形即可.

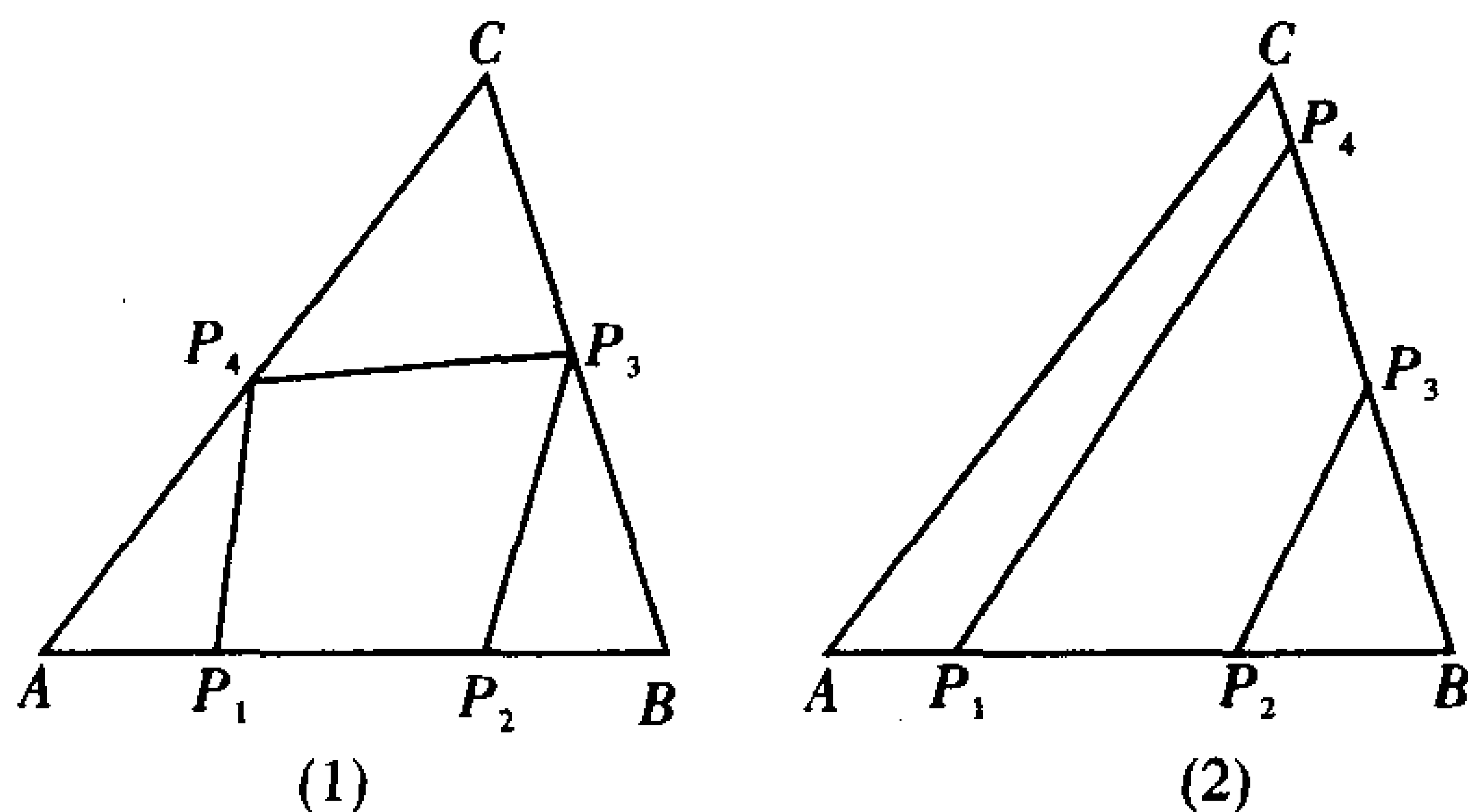


图 2-6

(1)当 $P_3P_4 /\!/ P_1P_2$ 时,若 P_3P_4 为其中位线,则有 $S_{\triangle CP_3P_4}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,而

$S_{\triangle P_1P_3P_4}=S_{\triangle CP_3P_4}$,故 $S_{\triangle P_1P_3P_4}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

此时结论成立.

当 P_3P_4 平移到 $P'_3P'_4$ 时,$\triangle P_1P'_3P'_4$ 的面积不增,即 $S_{\triangle P_1P'_3P'_4}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

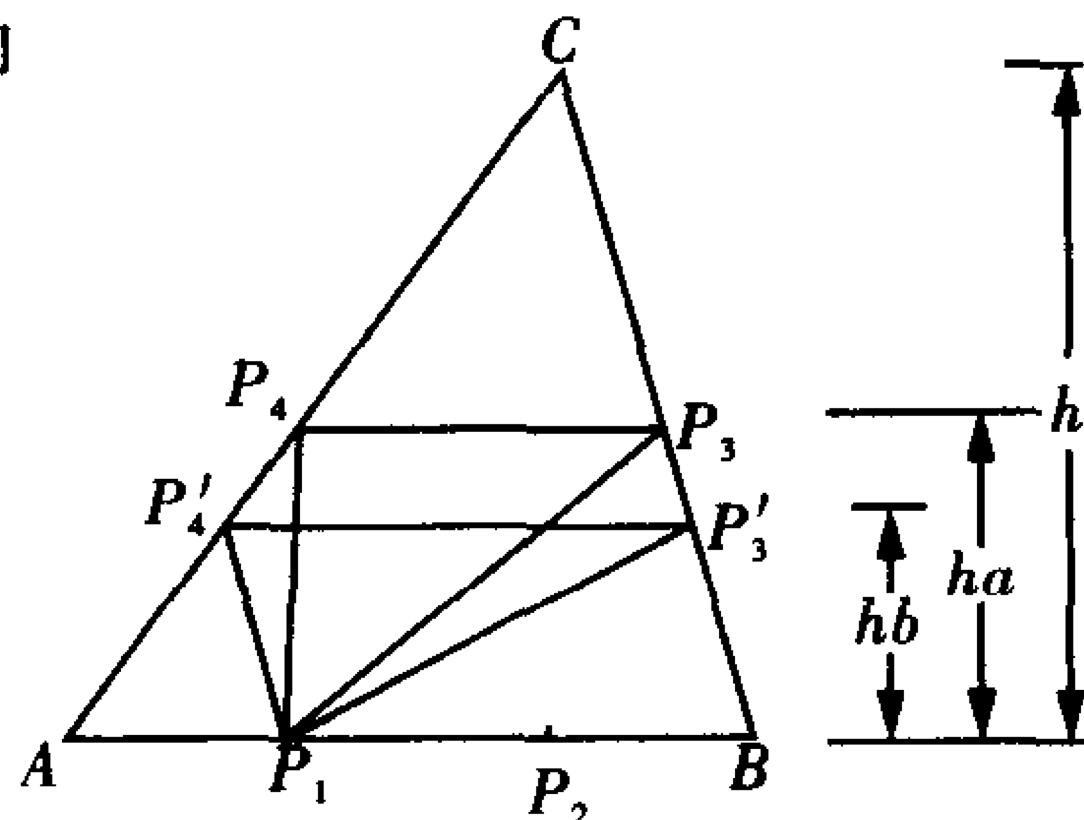


图 2-7

这是因为 $$\frac{S_{\triangle P_1P'_3P'_4}}{S_{\triangle P_1P_3P_4}}=\frac{\frac{1}{2}P'_3P'_4\cdot h_b}{\frac{1}{2}P_3P_4\cdot h_a}=\frac{P'_3P'_4\cdot h_b}{\frac{1}{2}AB\cdot\frac{1}{2}h}=4\frac{h-h_b}{h}\cdot\frac{h_b}{h}=4(1-\lambda)\lambda\leqslant4\cdot\left(\frac{1-\lambda+\lambda}{2}\right)^2=1.$$

(2)当 P_3P_4 与 AB(或 P_1P_2)不平行时,如图 2-8,过 P_4 作 $P_4P'_3 /\!/ AB$ 交 P_2P_3 于点 P,则 P 在 P_2、P_3 之间,P 到 P_1P_4 的距离介于 P_2、P_3 到 P_1P_4 的距离之间,

则 $S_{\triangle PP_1P_4}\geqslant\min\{S_{\triangle P_2P_1P_4},S_{\triangle P_3P_1P_4}\}$.

又 $S_{\triangle PP_1P_4}\leqslant S_{\triangle P_1P'_3P_4}$($P$ 在线段 $P_4P'_3$ 上),

从而,$\min\{S_{\triangle P_1P_2P_4},S_{\triangle P_1P_3P_4}\}\leqslant S_{\triangle PP_1P_4}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

故命题获证.

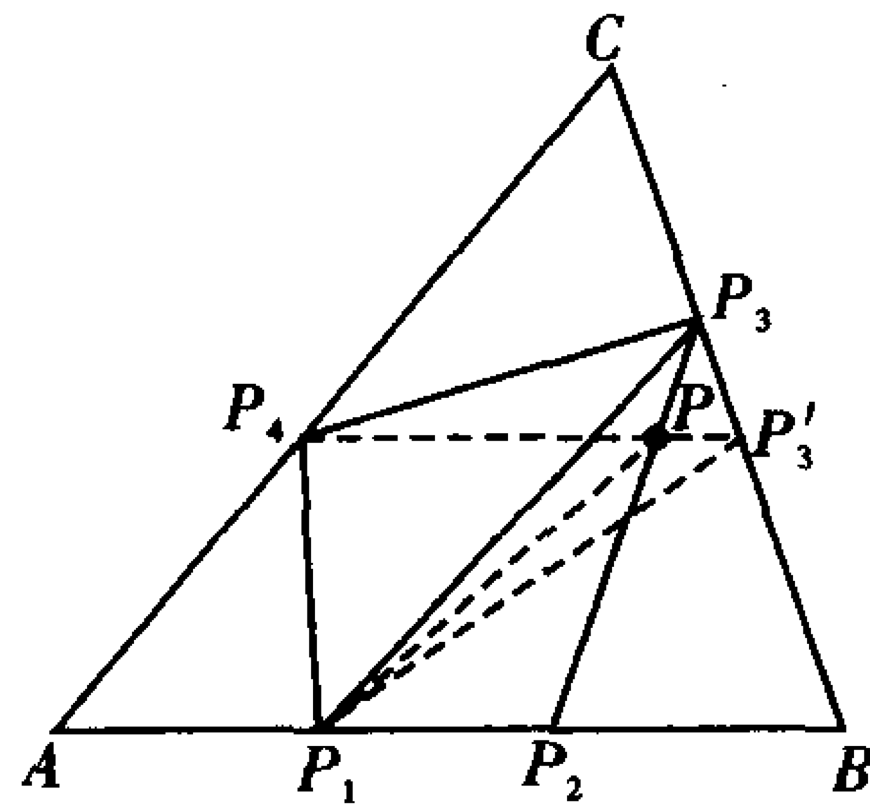


图 2-8

4. 逆向化归

我们在解决数学竞赛时,一般是按照习惯的思维途径去进行思考,运用习惯的化归方法去转化问题.但按照这种思考方式或化归方式在很多时候也会出现较繁或较难入手的情形,或出现一些逻辑上的困惑.这时,从辩证思维的观点出发,从问题或其中的某个方面的

另一面入手进行思考,例如针对常规解法,针对问题条件、结论、程序、推理步骤进行逆向化归,采取顺繁则逆、正难则反的适时化归措施,如升格(升维、升次、增项、增元、补形、扩域等)、倒推、反求、举反例、反证等等.

例 14 (1982 年全国高中联赛题)如果凸 n 边形 $F(n\geqslant4)$ 的所有对角线都相等,那么(　　).

A. $F\in\{$四边形$\}$

B. $F\in\{$五边形$\}$

C. $F\in\{$四边形$\}\cup\{$五边形$\}$

D. $F\in\{$边相等的多边形$\}\cup\{$内角相等的多边形$\}$

解 选 C. 理由:用正五边形作反例可否定结论 A;用正方形作反例可否定结论 B;用等腰梯形作反例可否定结论 D. 因此正确的结论只能是 C. 事实上,如果要从正面肯定 C 正确,尚须证明,$n<6$. 我们用反证法证. 假设 $n<6$ 不成立,则 $n\geqslant6$ 成立,即存在在 6 边以上的凸多边形,它的所有对角线都相等,这时我们选 $A_1A_2A_3\cdots A_n(n\geqslant6)$ 这个凸多边形的边 A_1A_n 和 A_3A_4,如

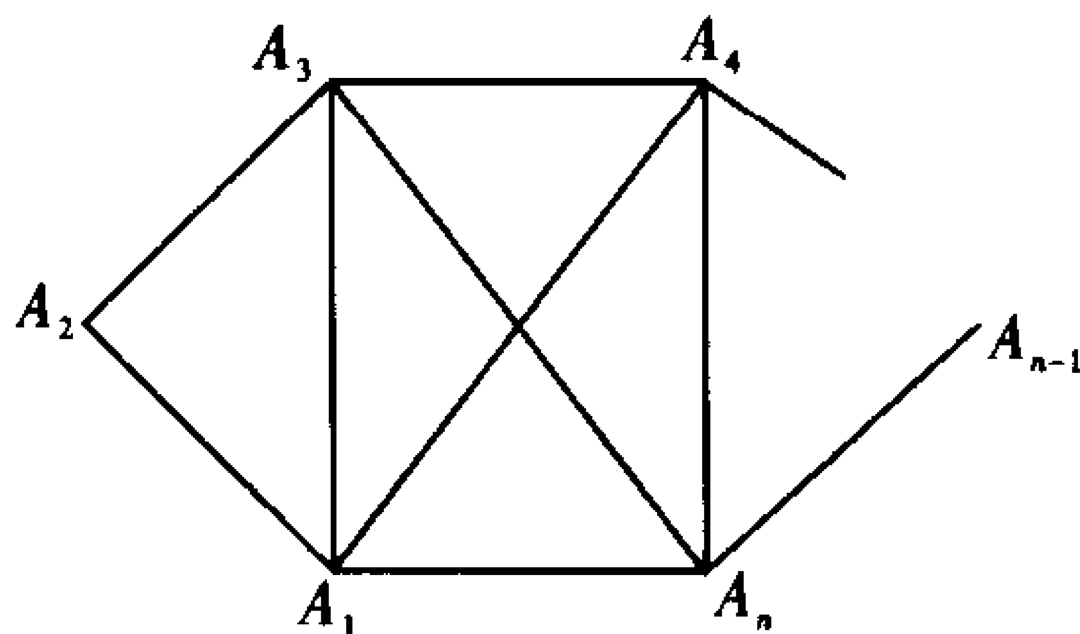


图 2-9

图 2-9. 连 A_1A_3、A_4A_n,则 A_1A_3 左侧有顶点 A_2,A_4A_n 右侧至少要有一个顶点 A_5,换言之,A_1A_3、A_1A_4、A_nA_3、A_nA_4 都是凸多边形的对角线. $A_1A_3=A_1A_4=A_3A_n=A_4A_n\Rightarrow A_1A_4+A_3A_n=A_1A_3+A_4A_n$,但由四边形性质,$A_1A_4+A_3A_n>A_1A_3+A_4A_n$,得出矛盾. 所以,所有对角线都相等的凸多边形的边数不能$\geqslant6$,即只能是四边形或五边形. 由正方形及正五边形为例表明,所有对角线相等的凸四边形与凸五边形是存在的.

例 15 (2003 年全国高中联赛题)在四面体 $ABCD$ 中,设 $AB=1$,$CD=\sqrt{3}$,直线 AB 与 CD 的距离为 2,夹角为 $\frac{\pi}{3}$. 则四面体 $ABCD$ 的体积等于(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解 选 B. 理由:进行补形化归. 如图 2-10,过 C 作 CE 瘙綊 AB,以$\triangle CDE$ 为底面,BC 为侧棱作棱柱 $ABF-ECD$,则所求四面体的体积 V_1 等于上述棱柱体积 V_2 的 $\frac{1}{3}$. 而 $S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}CE\cdot CD\sin\angle ECD$,$AB$ 与 CD 的公垂线 MN 就是棱柱 $ABF-ECD$ 的高,故

$$V_2=\frac{1}{2}MN\cdot CE\cdot CD\sin\angle ECD=\frac{3}{2}.$$

因此,$V_1=\frac{1}{3}V_2=\frac{1}{2}$.

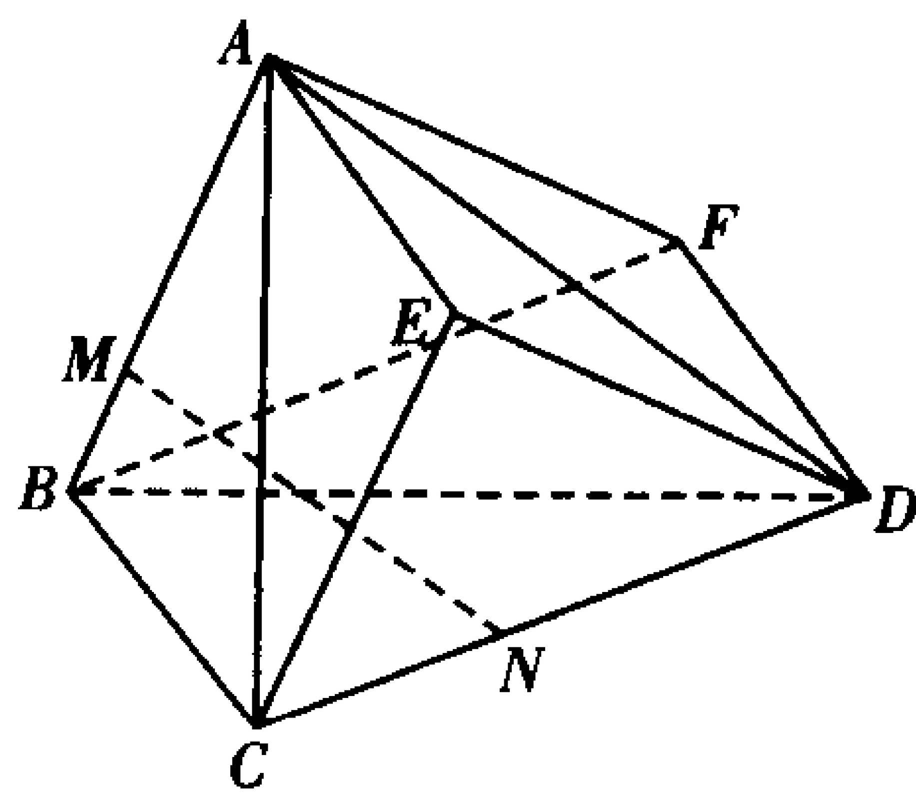


图 2-10

例 16 甲、乙、丙三堆棋子按如下方式挪动:先从甲堆中取出棋子,按乙、丙两堆中的棋子数目放入乙、丙两堆;再从乙堆中取出棋子,按甲、丙两堆中的棋子数目放入甲、丙两堆;最后从丙堆中取出棋子,按甲、乙两堆中的棋子数目放入甲、乙两堆. 经过这样挪动之后,三堆棋子都是 8 颗,问各堆原有棋子多少颗?

解 按照挪动顺序求解,不易入手,由于知道三堆棋子挪动后最终都是 8 颗,故可反推化归求解,列表反推如下:

	甲	乙	丙
第三次挪动后数值	8	8	8
第二次挪动后数值	4	4	16
第一次挪动后数值	2	14	8
初始数值	13	7	4

故 甲、乙、丙三堆原有棋子分别为 13,7,4 颗.

例 17 （第 2 届全苏数学奥林匹克题）已知数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$，其中 $a_1=1,a_2=a_1+\frac{1}{a_1},\cdots,a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$. 证明：$14<a_{100}<18$.

证明 若考虑求出通项公式，再求 a_{100} 的范围，则不易着手，不妨从求 a_n 的一般范围考虑.

当 $k>1$ 时，$a_k^2=(a_{k-1}+\frac{1}{a_{k-1}})^2=a_{k-1}^2+2+\frac{1}{a_{k-1}^2}$ 且 $a_k>1$，

从而 $a_k^2=a_{k-1}^2+2+\frac{1}{a_{k-1}^2}>a_{k-1}^2+2$，

$a_k^2<a_{k-1}^2+2+1=a_{k-1}^2+3$.

于是 $2<a_k^2-a_{k-1}^2<3$.

即有 $2<a_n^2-a_{n-1}^2<3$，

$2<a_{n-1}^2-a_{n-2}^2<3$，

…

$2<a_3^2-a_2^2<3$，

$2<a_2^2-a_1^2<3$.

将上述 $n-1$ 个不等式相加，得

$2(n-1)<a_n^2-a_1^2<3(n-1)$.

而 $a_1=1$，有 $2n-1<a_n^2<3n-2$.

即 $\sqrt{2n-1}<a_n<\sqrt{3n-2}$.

故当 $n=100$ 时，有 $\sqrt{199}<a_{100}<\sqrt{298}$.

从而 $14<a_{100}<18$.

例 18 （2002 年罗马尼亚为 IMO 和巴尔干地区数学奥林匹克选拔考试供题（第三轮））设整数 $n\geqslant4$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数，使得 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$. 证明：

$$\frac{a_1}{a_2^2+1}+\frac{a_2}{a_3^2+1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n^2+1}+\frac{a_n}{a_1^2+1}\geqslant\frac{4}{5}(a_1\sqrt{a_1}+a_2\sqrt{a_2}+\cdots+a_n\sqrt{a_n})^2.$$

证明 进行这样的逆向化归：对欲证不等式左边进行等价变形后看能否应用什么不等式得出与欲证不等式右边比较接近的结果. 于是，

由柯西(Cauchy)不等式，得

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{x_n}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n},$$

其中，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为任意正实数. 从而，有

$$\frac{a_1}{a_2^2+1}+\frac{a_2}{a_3^2+1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n^2+1}+\frac{a_n}{a_1^2+1}=\frac{a_1^3}{a_1^2a_2^2+a_1^2}+\frac{a_2^3}{a_2^2a_3^2+a_2^2}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_n^2a_1^2+a_n^2}$$

$$\geqslant\frac{(a_1\sqrt{a_1}+a_2\sqrt{a_2}+\cdots+a_n\sqrt{a_n})^2}{a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+\cdots+a_n^2a_1^2+1}.$$

因此，只须证明 $a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+\cdots+a_n^2a_1^2\leqslant\frac{1}{4}$，其中 $n\geqslant4$，且 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$.

一般地，对于正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，当 $n\geqslant4$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 时，有

$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1\leqslant\frac{1}{4}$.

当 n 为偶数时，有

$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1\leqslant(x_1+x_3+\cdots+x_{n-1})(x_2+x_4+\cdots+x_n)\leqslant\frac{1}{4}$.

当 n 为奇数，且 $n\geqslant5$ 时，不妨假设 $x_1\geqslant x_2$. 因为 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4\leqslant x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)x_4$，用 $x_1,x_2+x_3,x_4,\cdots,x_n$ 代替 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，所证不等式的左端变大，利用项数为偶数时的情形即知结论成立.

例 19 (《数学通报》数学问题 1478 题)a,b 为正整数. 试证：$a^3+(a+b)^2+b\neq b^3+a+2$.

证法 1 对需证不等式进行如下可逆推演：

$a^3+(a+b)^2+b\neq b^3+a+2$

$\Leftrightarrow a^3-b^3+(a+b)^2-a+b-1\neq1$

$\Leftrightarrow a^3-b^3+(a^2+ab+b^2)-a+b-1\neq1-ab$

$\Leftrightarrow(a-b)(a^2+ab+b^2)+(a^2+ab+b^2)-a+b-1\neq1-ab$

$\Leftrightarrow(a^2+ab+b^2)(a-b+1)-(a-b+1)\neq1-ab$

$\Leftrightarrow(a-b+1)(a^2+ab+b^2-1)\neq1-ab.$ $\qquad(*)$

考察不等式(*)：当 a,b 同为 1 时，A 的右端为 0，左端为 2. 当 a,b 不同为 1 时，A 的右端为负数，由于 $a^2+ab+b^2-1>0$，若要 A 的两端相等，则必须 $a-b+1<0$，此时 A 左端的绝对值 $|(a-b+1)(a^2+ab+b^2-1)|\geqslant a^2+ab+b^2-1>ab-1=$ 右端的绝对值. 于是(*)式成立. 欲证不等式获证.

证法 2 (1)a,b 都是 1 时，不等式经验证是成立的.

(2)当 a,b 不同为 1 时，显然 $a^2+b^2<a^2+b^2+ab-1$. 因此 $\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+ab-1}$ 是真分数. 而 $a-b+2$ 是整数. 故恒有：$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+ab-1}\neq a-b+2$. 移项整理后即得 $a^3+(a+b)^2+b\neq b^3+a+2$. 问题获证.

逆向化归，也可以是逆用公式. 下面，我们逆用等比数列各项和公式证一类分式不等式.

例 20 (《数学通报》数学问题 845 题)已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，求证：

$\frac{x_1^2}{1-x_1}+\frac{x_2^2}{1-x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{1-x_n}\geqslant\frac{1}{n-1}$.

证明 因为 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，所以 $0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1$，

$$\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{1-x_i}=\sum_{i=1}^n(x_i^2+x_i^3+x_i^4+\cdots)=\sum_{i=1}^nx_i^2+\sum_{i=1}^nx_i^3+\sum_{i=1}^nx_i^4+\cdots$$

$$\geqslant\frac{(\sum_{i=1}^nx_i)^2}{n}+\frac{(\sum_{i=1}^nx_i)^3}{n^2}+\frac{(\sum_{i=1}^nx_i)^4}{n^3}+\cdots$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\cdots=\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{n-1}$$（当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号）.

【解题尝试】

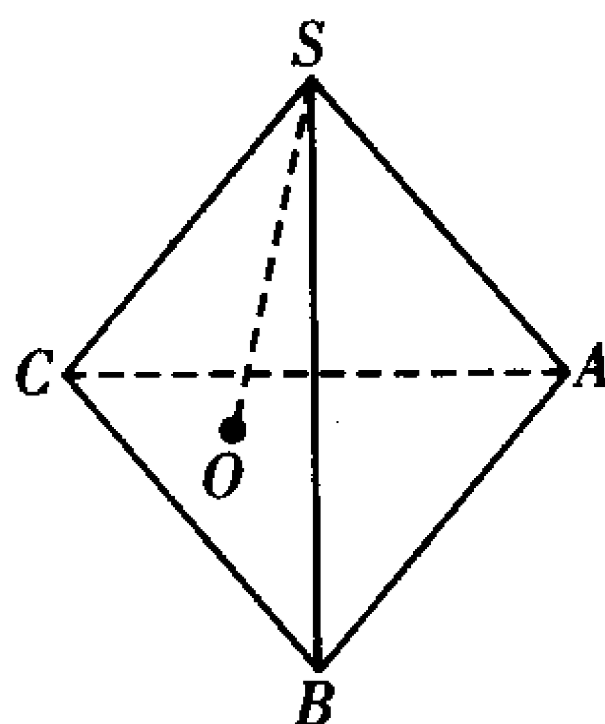
A组

1. （1999年河南省竞赛组）化简$\dfrac{\sqrt{1-2\sin20^\circ\cos20^\circ}}{\cos20^\circ-\sqrt{1-\cos^2160^\circ}}$得（　　）.

A. $\sqrt{1-\sin40^\circ}$　　B. $\dfrac{1}{\cos20^\circ-\sin20^\circ}$

C. 1　　D. -1

2. （2003年湖南省竞赛题）如图，$S-ABC$ 是三条棱两两互相垂直的三棱锥，O 为底面 ABC 内一点. 若 $\angle OSA=\alpha$，$\angle OSB=\beta$，$\angle OSC=\gamma$，那么，$\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$ 的取值范围是（　　）.



A. $[2\sqrt{2},+\infty]$　　B. $(0,2\sqrt{2})$

C. $[1,2\sqrt{2}]$　　D. $(1,2\sqrt{2})$

3. （2003年北京市竞赛题）如果 a、b、c 是正数，求证：
$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

4. 已知：$a+b>2$. 求证：$a^4+b^4>2$.

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列. 对于 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列，求和式 $s=|a_1-1|+|a_2-2|+\cdots+|a_n-n|$ 的最大值.

6. 在同一平面上，有三个半径各不相同的圆且两两不相交，每两个圆的两条外公切线相交于一点，可得三个这样的点. 求证这三点共线.

7. （2002年全国高中联赛题）使不等式 $\sin^2x+a\cos x+a^2\geqslant1+\cos$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的负数 a 的取值范围.

8. （2002年湖南省竞赛题）已知 $a_1=1,a_2=3,a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$. 若当 $m\geqslant n$ 时，a_m 的值都能被9整除，求 n 的最小值.

9. 设 $n\in\mathbf{N}^+$，求证：$\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}<\dfrac{3}{4}$.

10. （2001年全国高中联赛题）设曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a$ 为正常数）与 $C_2:y^2=2(x+m)$ 在 x 轴上方仅有一个公共点 P.

（1）求实数 m 的取值范围（用 a 表示）；

（2）O 为原点，若 C_1 与 x 轴的负半轴交于点 A，当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，试求 $\triangle OAP$ 的面积的最大值（用 a 表示）.

B组

1. (第29届俄罗斯数学奥林匹克题)数集 M 由 2003 个不同的正数组成,对于 M 中任何三个不同的元素 a、b、c,数 a^2+bc 都是有理数. 证明:可以找到一个正整数 n,使得对于 M 中任何数 a,数 $a\sqrt{n}$ 都是有理数.
2. (2003 年天津市竞赛题)关于 x 的不等式 $a^2+2a-\sin^2 x-2a\cos x>2$ 的解集是全体实数. 求实数 a 的取值范围.
3. (2003 年天津市竞赛题)已知 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的两个动点,O 为坐标原点,且 $OA\perp OB$. 求线段 AB 长的最小值.
4. (2001 年上海市竞赛题)实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2001}$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{2000}|x_k-x_{k+1}|=2001$.

   令 $y_k=\frac{1}{k}(x_1+x_2+\cdots+x_k)$,$k=1,2,\cdots,2001$. 求 $\sum\limits_{k=1}^{2000}|y_k-y_{k+1}|$ 的最大可能值.
5. (2003 年湖南省竞赛题)设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,当 $x<0$ 时 $f(x)>1$,且对任意的实数 x、$y\in\mathbf{R}$,有 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 成立. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=f(0)$,且

   $f(a_{n+1})=\frac{1}{f(-2-a_n)}(n\in\mathbf{N})$.
6. (2003 年全国高中联赛加试题)设三角形的三边长分别是整数 l、m、n,且 $l>m>n$. 已知 $\left\{\frac{3^l}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^m}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^n}{10^4}\right\}$,其中 $\{x\}=x-[x]$,而 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 求这种三角形周长的最小值.
7. (2003 年全国女子数学奥林匹克题)对于任意正整数 n,记 n 的所有正约数组成的集合为 S_n. 证明:S_n 中至多有一半元素的个位数为 3.
8. (第26届俄罗斯数学奥林匹克题)求和 $\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\left[\frac{2^3}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{1000}}{3}\right]$.
9. (第28届俄罗斯数学奥林匹克题)希腊神话中的"多头蛇"神由一些头和颈子组成,每一条颈子连接两个头. 每砍下一剑,可以斩断由某一个头 A 所连出的所有的颈子,但是由头 A 立即长出一些新的颈子联向所有原来不与它相连的头(每个头只连一条颈子). 只有把"多头蛇"斩为两个互不连通的部分,才算战胜了它. 试找出最小的自然数 N,使得对任何长有 100 个颈子的"多头蛇"神,至多只要砍不多于 N 剑,就可以战胜它.
10. (2003 年美国数学奥林匹克)平面上的一个凸多边形 P,被它的所有对角线分割成小凸多边形. 若多边形 P 的所有边和角线的长度都是有理数. 证明:分割而成的所有小多边形的边长也都是有理数.

第3章 转换法

【学习目标】

在数学解题的思维活动中，侧重于实现问题的规范化、模式化的考虑，来进行一系列加工处理题设信息而解决问题的方法，我们称之为“转换法”.

转换可以是将某一原型迅速恰当地提炼转变到某一模式上；或可以是将一个领域内的模式快捷、灵活地转移到另一个领域；也可以是将某个具体、形象的模式创造性地转换成其他的或抽象综合的模式.

转换具有双向或多向性、层次性和重复性等特点. 为了实现有效的转换，既可以变更问题的外部形式，也可以变换问题的内部结构；既可以变换问题的条件，也可以变换问题的结论；既可以从问题的原始形态着手，又可以从问题的变化形态入手等. 这就是转换的双向或多向性. 转换的方法既可应用于沟通数学各分支学科的联系，从宏观上实现学科间的转换，又能调动各种方法与技术，从微观上解决多种具体问题，这是转换的层次性. 而解决问题中可以多次使用转换，使问题逐次达到规范化，这是转换方法应用的重复性.

转换方法有三个基本要素：转换的对象、转换的目标和转换的方法. 在求解数学竞赛问题中，我们侧重于转换方法的掌握与灵活运用.

【解题钥匙】

1. 命题转换

例 1 (1993年全国高中联赛题)已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$($a,b$ 为实数)且 $f(\lg\log_3 10)=5$，则 $f(\lg\lg 3)$的值是(　　).

A. -5　　　　B. 0　　　　C. 3　　　　D. 随 a,b 取不同值而取不同值

解 选 C. 理由：因为 $f(x)-4=a\sin x+b\sqrt[3]{x}=g(x)$ 是奇函数，故 $g(-x)=-g(x)$，即 $f(-4)-4=-[f(x)-4]$，即 $f(-x)=-f(x)+8$，而 $\lg\lg 3=-\lg\lg 310$，从而，$f(\lg\lg_3)=f(-\lg\log_3 10)=-f(\lg\log_3 10)+8=-5+8=3$.

例 2 已知$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}$，求证：$x$、$y$、$z$ 中至少有 2 个相等.

证明 命题转换成只要证出$(x-y)(y-z)(z-x)$的乘积为 0 即可.

事实上，因$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}$，所以 $x^2z+y^3x+z^2y=z^2x+y^2z+x^2y$，

$(x-y)(y-z)(z-x)=xyz+(x^2z+y^2x+z^2y)-(z^2x+y^2z+x^2y)-xyz=0$，

则$(x-y)$、$(y-z)$、$(z-x)$中至少有 1 个等于 0，故 x,y,z 中至少有 2 个相等.

例 3 (2003年中国数学奥林匹克题)设点 I、H 分别为锐角$\triangle ABC$ 的内心和垂心，点 B_1、C_1 分

别为边 AC、AB 的中点. 已知射线 B_1I 交边 AB 于点 $B_2(B_2\neq B)$，射线 C_1I 交 AC 的延长线于点 C_2，B_2C_2 与 BC 相交于 K，A_1 为$\triangle BHC$ 的外心. 试证：A、I、A_1 三点共线的充分必要条件是$\triangle BKB_2$ 和$\triangle CKC_2$ 的面积相等.

证明 命题转换成证两个充要条件.

首先，证明 A、I、A_1 三点共线$\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

如图 3-1，设 O 为$\triangle ABC$ 的外心，连 BA_1，CA_1，则连 BH，HC，有$\angle BHC=180°-\angle BAC$.

又 $\angle BA_1C=2(180°-\angle BHC)=2\angle BAC$.

因此，$\angle BAC=60°\Leftrightarrow\angle BAC+\angle BA_1C=180°$

$\Leftrightarrow A_1$ 在$\triangle ABC$ 的外接圆$\odot O$ 上

$\Leftrightarrow AI$ 与 AA_1 重合

$\Leftrightarrow A$、I、A_1 三点共线.

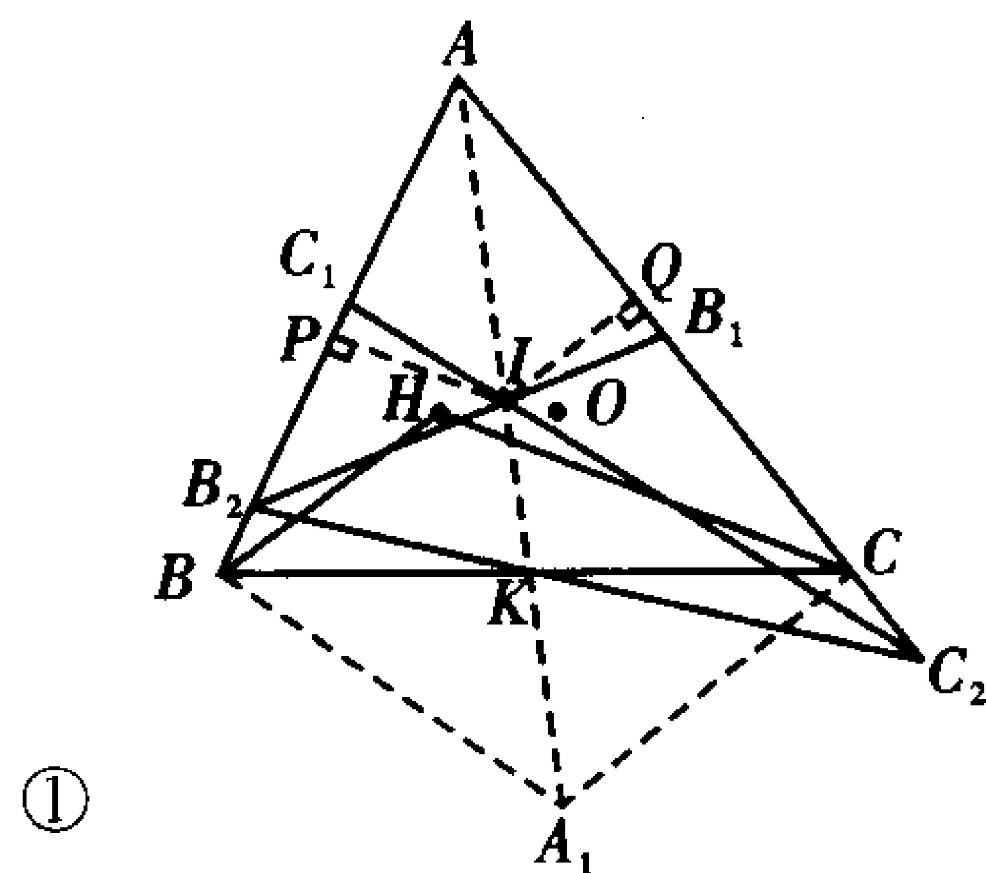


图 3-1

其次，再证 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

作 $IP\perp AB$ 于点 P，$IQ\perp AC$ 于点 Q，则

$$S_{\triangle AB_1B_2}=\frac{1}{2}IP\cdot AB_2+\frac{1}{2}IQ\cdot AB_1. \quad ①$$

设 $IP=r$（r 为$\triangle ABC$ 的内切圆半径），则 $IQ=r$.

又令 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，则 $r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$.

注意到 $S_{\triangle AB_1B_2}=\frac{1}{2}AB_1\cdot AB_2\cdot\sin A.$ ②

由①、②及 $AB_1=\frac{b}{2}$，$2AB_1\cdot\sin A=h_c=\frac{2S_{\triangle ABC}}{c}$.

则 $AB_2=\frac{bc}{a+b-c}$.

同理，$AC_2=\frac{bc}{a+c-b}$.

由 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}$，有 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}$.

于是，$bc=\frac{bc}{a+b-c}\cdot\frac{bc}{a+c-b}$，

即 $a^2=b^2+c^2-bc\Leftrightarrow$由余弦定理，$\angle BAC=60°$.

注 两个充要条件的其他证法可参见《中等数学》2003 年第 6 期.

例 4 （2002 年 IMO 中国国家队集训选拔赛试题）设凸四边形 $ABCD$ 的两组对边所在的直线分别交于 E、F 两点，两对角线的交点为 P，过 P 作 $PO\perp EF$ 于 O. 求证：$\angle BOC=\angle AOD$.

证明 把证$\angle BOC=\angle AOD$ 转换为证明 OP 既是$\angle AOC$ 的平分线，也是$\angle DOB$ 的平分线即可.

如图 3-2. 不妨设 AC 交 EF 于 Q，考虑$\triangle AEC$ 和点 F，由塞瓦定理可得

$$\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CD}{DE}=1. \quad ①$$

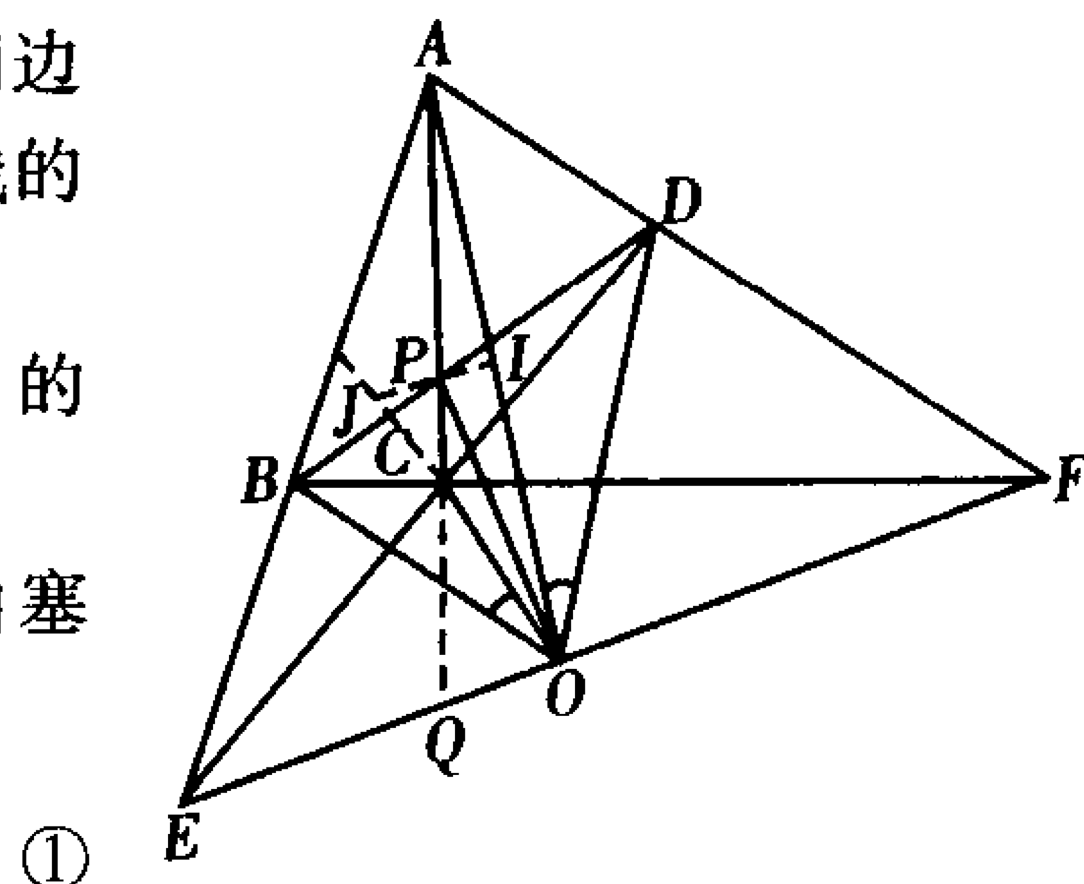


图 3-2

再考虑$\triangle AEC$与截线BPD，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{ED}{DC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AB}{BE}=1. \quad ②$$

比较①、②两式可得

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{PC}{QC}. \quad ③$$

过P作EF的平分线分别交OA、OC于I、J，则有

$$\frac{PI}{QO}=\frac{AP}{AQ},\frac{JP}{QO}=\frac{PC}{QC}. \quad ④$$

由③、④可得

$$\frac{PI}{QO}=\frac{JP}{QO}\Rightarrow PI=PJ.$$

又$OP\perp IJ$，则OP平分$\angle IOJ$，

即　OP平分$\angle AOC$.

同理可证：当BD与EF相交时，OP平分$\angle DOB$；而当$BD/\!/EF$时，过B作ED的平行线交AC于G，如图3-3，则

$$\frac{AG}{AC}=\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AF}.$$

故$GD/\!/CF$，

从而，$BCDG$为平行四边形.

于是，P为BD的中点.

因此，OP平分$\angle DOB$.

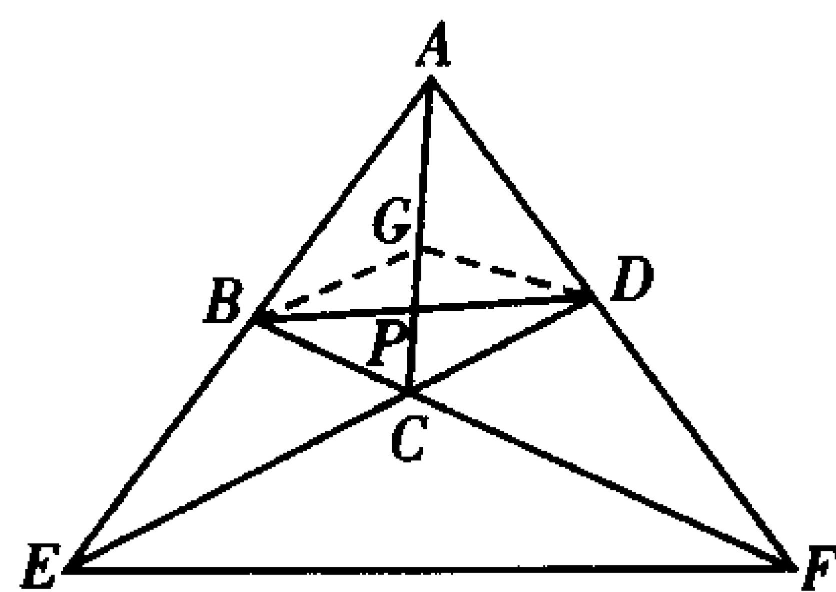


图3-3

例5　(2002年IMO中国国家队集训选拔赛题)设$a_1=\frac{1}{4}$，$a_n=\frac{1}{4}(1+a_{n-1})^2$，$n\geqslant 2$. 求最小实数$\lambda$，使得对任意非负实数$x_1,x_2,\cdots,x_{2002}$，有

$$\sum_{k=1}^{2002}A_k\leqslant\lambda a_{2002}.$$

其中$A_k=\dfrac{x_k-k}{\left(x_k+\cdots+x_{2002}+\frac{k(k-1)}{2}+1\right)^2}$，$k\geqslant 1$.

证明　根据题意，原问题转换成问题链的证明.

此时，令$\delta(k)=\frac{1}{2}k(k-1)$，下面考虑一系列引理：

引理1　对任意实数$a\geqslant 0$，$c>0$，$b>0$，函数$f(x)=\frac{a}{x+b}+\frac{x-c}{(x+b)^2}$.

当$x=\frac{(1-a)b+2c}{1+a}$时，取最大值$\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+a)^2}{b+c}$.

事实上，令$y=\frac{1}{x+b}$，则

$$f(x)=-(b+c)y^2+(1+a)y=-(b+c)\left(y-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+a}{b+c}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+a)^2}{b+c}.$$

于是，当$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+a}{b+c}$，则$x=\frac{(1-a)b+2c}{1+a}$时，

$$f(x)_{\min}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+a)^2}{b+c}.$$

引理 2 设 $a_1=\frac{1}{4}, a_n=\frac{1}{4}(1+a_{n-1})^2, n\geqslant 2$. 则 a_n 满足 $0<a_n<1$.

引理 3 对任意 $n\geqslant 1, \sum\limits_{k=1}^{n}A_k\leqslant\frac{1}{\delta(n+1)+1}a_n$, 且可以取等号.

事实上,由引理 1,有

$$\frac{x_1-1}{(x_1+\cdots+x_n+1)^2}\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x_2+\cdots+x_n+2}=\frac{a_1}{x_2+\cdots+x_n+2}, \quad ①$$

且当 $x_1=x_2+\cdots+x_n+3$ 时,取最大值

$$\frac{a_1}{x_2+\cdots+x_n+2}\cdot\frac{a_1}{x_2+\cdots+x_n+2}+\frac{x_2-2}{(x_2+\cdots+x_n+2)^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+a_1)^2}{x_3+\cdots+x_n+4}=\frac{a_2}{x_3+\cdots+x_n+4}, \quad ②$$

且当 $x_2=\frac{(1-a_1)(x_3+\cdots+x_n+4)+4}{1+a_1}$ 时,取最大值 $\frac{a_2}{x_3+\cdots+x_n+4}$.

…

$$\frac{a_{n-2}}{x_{n-1}+x_n+\delta(n-1)+1}+\frac{x_{n-1}-(n-1)}{(x_{n-1}+x_n+\delta(n-1)+1)^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+a_{n-2})^2}{x_n+\delta(n)+1}=\frac{a_{n-1}}{x_n+\delta(n)+1},$$

且当 $x_{n-1}=\frac{[(1-a_{n-2})(x_n+\delta(n-1)+1)+2(n-1)]}{1+a_{n-2}}$

时,取最大值 $\frac{a_{n-1}}{x_n+\delta(n)+1}$.

$$\frac{a_{n-1}}{x_n+\delta(n)+1}+\frac{x_n-n}{(x_n+\delta(n)+1)^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+a_{n-1})^2}{\delta(n+1)+1}=\frac{a_n}{\delta(n+1)+1},$$

且当 $x_n=\frac{(1-a_{n-1})(\delta(n)+1)+2n}{1+a_{n-1}}$ 时,取最大值 $\frac{a_n}{\delta(n+1)+1}$.

由①,②,…, 相加,得

$$\sum_{k=1}^{n}A_k\leqslant\frac{1}{\delta(n+1)+1}a_n,$$

且当 $x_n=\frac{(1-a_{n-1})(\delta(n)+1)+2n}{1+a_{n-1}}$,

$$x_{n-1}=\frac{(1-a_{n-2})(x_n+\delta(n-1)+1)+2(n-1)}{1+a_{n-2}},$$

…

$$x_2=\frac{(1-a_1)(x_3+\cdots+x_n+4)+4}{1+a_1},$$

$$x_1=x_2+\cdots+x_n+3$$

时,等号成立.

由引理 3,我们得到

$$\lambda=\frac{1}{\delta(2003)+1}=\frac{1}{2003\times 1001+1}.$$

2. 模型转换

形态各异的数学问题实质上是数学模式或数学模型的组合与转移、变更与转换. 数学模型的转换形式是多方面的,可以是学科转换、结构转换、形态转换等等.

例 6 (2000 年河北省竞赛题)已知 $a、b\in\mathbf{R}^+$, $m、n\in\mathbf{R}$, $m^2n^2>a^2m^2+b^2n^2$,令 $M=\sqrt{m^2+n^2}$, $N=a+b$,则 M 与 N 的关系是(　　).

A. $M>N$　　B. $M<N$　　C. $M=N$　　D. 不能确定

解 选 A. 理由:由题设模型 $m^2n^2>a^2m^2+b^2n^2$,知 $m^2n^2\neq 0$. 对这个不等式两边同除以 m^2n^2,得 $\frac{a^2}{n^2}+\frac{b^2}{m^2}<1$. 此不等式两边再同乘 m^2+n^2,得模型

$$\begin{aligned}m^2+n^2&>(m^2+n^2)\left(\frac{a^2}{n^2}+\frac{b^2}{m^2}\right)\\&=a^2+b^2+\frac{m^2}{n^2}a^2+\frac{n^2}{m^2}b^2\\&\geqslant a^2+b^2+2ab=(a+b)^2.\end{aligned}$$

例 7 (2003 年全国高中联赛题)已知 $a、b、c、d$ 均为正整数,且 $\log_a b=\frac{3}{2}$, $\log_c d=\frac{5}{4}$,若 $a-c=9$,则 $b-d=$________.

解 填 93. 理由:将题设对数模式条件转换成指数模式条件,有 $a^{\frac{3}{2}}=b$, $c^{\frac{5}{4}}=d$,即 $a=\left(\frac{b}{a}\right)^2$, $c=\left(\frac{d}{c}\right)^4$. 因此,$a|b$, $c|d$. 又由于 $a-c=9$,易得模型

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{d^2}{c^2}\right)\left(\frac{b}{a}-\frac{d^2}{c^2}\right)=9.$$ 从而

$$\begin{cases}\frac{b}{a}+\frac{d^2}{c^2}=9,\\ \frac{b}{a}-\frac{d^2}{c^2}=1.\end{cases}\quad 因而\begin{cases}\frac{b}{a}=5,\\ \frac{d^2}{c^2}=4.\end{cases}$$

由 $\frac{b}{a}=5$ 及 $a^{\frac{3}{2}}=b$ 解得　$a=25$,从而 $b=125$, $c=16$, $d=32$.

例 8 (2004 年全国高中联赛题)已知 $\alpha、\beta$ 是方程 $4x^2-4tx-1=0(t\in\mathbf{R})$ 的两个不等实根,函数 $f(x)=\frac{2x-t}{x^2+1}$ 的定义域为$[\alpha,\beta]$.

(1)求 $g(t)=\max f(x)-\min f(x)$;

(2)证明:对于 $u_i\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)(i=1,2,3)$,若 $\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3=1$,则 $\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}<\frac{3}{4}\sqrt{6}$.

解 由于题设条件是一种模型的组合模式,从而在求解时,应恰当地进行模式的变更与转换.

(1)设 $\alpha\leqslant x_1<x_2\leqslant\beta$,则 $4x_1^2-4tx_1-1\leqslant 0$, $4x_2^2-4tx_2-1\leqslant 0$. 所以,

$4(x_1^2+x_2^2)-4t(x_1+x_2)-2\leqslant 0$,

$2x_1x_2-t(x_1+x_2)-\frac{1}{2}<0$.

而 $f(x_2)-f(x_1)=\frac{2x_2-t}{x_2^2+1}-\frac{2x_1-t}{x_1^2+1}$

$$=\frac{(x_2-x_1)[t(x_1+x_2)-2x_1x_2+2]}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}>0.$$

因此,$f(x)$在区间$[\alpha,\beta]$上是增函数.

因为 $\alpha+\beta=t,\alpha\beta=-\frac{1}{4}$,所以,

$$g(t)=\max f(x)-\min f(x)=f(\beta)-f(\alpha)$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)[t(\alpha+\beta)-2\alpha\beta+2]}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1}$$

$$=\frac{8\sqrt{t^2+1}(2t^2+5)}{16t^2+25}.$$

(2)注意到平均值不等式模型,有

$$t(\tan u_i)=\frac{\frac{8}{\cos u_i}(\frac{2}{\cos^2 u_i}+3)}{\frac{16}{\cos^2 u_i}+9}$$

$$=\frac{\frac{16}{\cos u_i}+24\cos u_i}{16+9\cos^2 u_i}\geqslant\frac{2\sqrt{16\times 24}}{16+9\cos^2 u_i}$$

$$=\frac{16\sqrt{6}}{16+9\cos^2 u_i}(i=1,2,3).$$

故 $\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{1}{g(\tan u_i)}\leqslant\frac{1}{16\sqrt{6}}\sum\limits_{i=1}^{3}(16+9\cos^2 u_i)$

$$=\frac{1}{16\sqrt{6}}(16\times 3+9\times 3-9\sum_{i=1}^{3}\sin^2 u_i).$$

因为由柯西不等式模型有 $3\sum\limits_{i=1}^{3}\sin^2 u_i\geqslant(\sum\limits_{i=1}^{3}\sin u_i)^2=1$. 而柯西不等式与均值不等式中,等号不能同时成立,故

$$\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}<\frac{1}{16\sqrt{6}}(75-9\times\frac{1}{3})=\frac{3}{4}\sqrt{6}.$$

例 9① 已知椭圆$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$过点 $P(3\sqrt{3},1)$,求 $m+n$ 的最小值,并求出 $m+n$ 取最小值时的椭圆方程.

解法 1 将 P 点坐标代入椭圆方程

$$n=\frac{m}{\sqrt{m^2-27}},$$

---

① 刘赋声,李家权. 趣解点系椭圆[J]. 中学数学,2001(11):30

则 $(m+n)^2=m^2+\dfrac{2m^2}{\sqrt{m^2-27}}+\dfrac{m^2}{m^2-27}$

$=m^2+\dfrac{2(m^2-27)+54}{\sqrt{m^2-27}}+\dfrac{m^2-27+27}{m^2-27}$

$=m^2+2\sqrt{m^2-27}+\dfrac{27}{\sqrt{m^2-27}}+\dfrac{27}{\sqrt{m^2-27}}+\dfrac{27}{m^2-27}+1$

$=[(m^2-27)+\dfrac{27}{\sqrt{m^2-27}}+\dfrac{27}{\sqrt{m^2-27}}]+[\sqrt{m^2-27}+\sqrt{m^2-27}+\dfrac{27}{m^2-27}]+28$

$\geqslant 3\sqrt[3]{27^2}+3\sqrt[3]{27}+28=64$,

从而，$m+n\geqslant 8$.

此时 $m^2-27=\dfrac{27}{\sqrt{m^2-27}}$(或 $\sqrt{m^2-27}=\dfrac{27}{m^2-27}$)，

于是，$m=6$.

进而求出 $n=2$，故所求的椭圆方程是

$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

解法 2 设$\dfrac{3\sqrt{3}}{m}=\cos\alpha$，$\dfrac{1}{n}=\sin\alpha$，

则 $m=\dfrac{3\sqrt{3}}{\cos\alpha}$，$n=\dfrac{1}{\sin\alpha}$，

于是 $(m+n)^2=\dfrac{27}{\cos^2\alpha}+\dfrac{6\sqrt{3}}{\sin\alpha\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{27(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}+\dfrac{6\sqrt{3}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{27\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{6\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{6\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+28$

$=(\dfrac{27\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{3\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{3\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\alpha})+(\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{3\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{3\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha})+28$

$\geqslant 3\sqrt[3]{27^2}+3\sqrt[3]{27}+28=64$.

从而，$m+n\geqslant 8$，

此时 $3\sqrt{3}\sin^3\alpha=\cos^3\alpha$，

于是，$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

进而推出 $m=6$，$n=2$.(下略)

解法 3 因$\dfrac{27}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}=1$，

则 $(m+n)^2=(m+n)^2(\dfrac{27}{m^2}+\dfrac{1}{n^2})$

$=(m^2+2mn+n^2)(\dfrac{27}{m^2}+\dfrac{1}{n^2})$

$=27+\frac{m^2}{n^2}+\frac{54n}{m}+\frac{2m}{n}+\frac{27n^2}{m^2}+1$

$=(\frac{m^2}{n^2}+\frac{27n}{m}+\frac{27n}{m})+(\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{27n^2}{m^2})+28$

$\geqslant 3\sqrt[3]{27^2}+3\sqrt[3]{27}+28=64.$

从而，$m+n\geqslant 8$，此时 $m^3=27n^3$.

于是，$m=3n$，

从而解出 $m=6,n=2$.（下略）

例 10 （2003 年中国数学奥林匹克题）设 a、b、c、d 为正实数，满足 $ab+cd=1$，点 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4)$ 是以原点为圆心的单位圆周上的四个点. 求证：

$$(ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2+(ax_4+bx_3+cx_2+dx_1)^2\leqslant 2(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}).$$

证法 1 将欲证不等式左边结构形态进行替换、变更、转换，即

令 $u=ay_1+by_2$，$v=cy_3+dy_4$，$u_1=ax_4+bx_3$，$v_1=cx_2+dx_1$，则

$u^2\leqslant(ay_1+by_2)^2+(ax_1-bx_2)^2=a^2+b^2+2ab(y_1y_2-x_1x_2)$，

即 $x_1x_2-y_1y_2\leqslant\frac{a^2+b^2-u^2}{2ab}$. ①

$v_1^2\leqslant(cx_2+dx_1)^2+(cy_2-dy_1)^2=c^2+d^2+2cd(x_1x_2-y_1y_2)$，

即 $y_1y_2-x_1x_2\leqslant\frac{c^2+d^2-v_1^2}{2cd}$. ②

①+②得

$0\leqslant\frac{a^2+b^2-u^2}{2ab}+\frac{c^2+d^2-v_1^2}{2cd}$，

即 $\frac{u^2}{ab}+\frac{v_1^2}{cd}\leqslant\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}$.

同理，$\frac{v^2}{cd}+\frac{u_1^2}{ab}\leqslant\frac{c^2+d^2}{cd}+\frac{a^2+b^2}{ab}$.

由柯西不等式，有

$$(u+v)^2+(u_1+v_1)^2=(\sqrt{ab}\cdot\frac{u}{\sqrt{ab}}+\sqrt{cd}\cdot\frac{v}{\sqrt{cd}})^2+(\sqrt{ab}\cdot\frac{u_1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{cd}\cdot\frac{v_1}{\sqrt{cd}})^2$$

$$\leqslant(ab+cd)(\frac{u^2}{ab}+\frac{v^2}{cd})+(ab+cd)(\frac{u_1^2}{ab}+\frac{v_1^2}{cd})=\frac{u^2}{ab}+\frac{v^2}{cd}+\frac{u_1^2}{ab}+\frac{v_1^2}{cd}\leqslant 2[\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}].$$

证法 2 将欲证不等式左边形态进行恒等变形转换. 令 $ay_1+by_2+cy_3+dy_4=\alpha$，$ax_4+bx_3+cx_2+dx_1=\beta$.

由柯西不等式模型，有

$\alpha^2=(ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2$

$$=(\sqrt{ad}y_1\cdot\sqrt{\frac{a}{d}}+\sqrt{bc}y_2\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{bc}y_3\cdot\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{ad}y_4\cdot\sqrt{\frac{d}{a}})^2$$

$$\leqslant[(\sqrt{ad}y_1)^2+(\sqrt{bc}y_2)^2+(\sqrt{bc}y_3)^2+(\sqrt{ad}y_4)^2][(\sqrt{\frac{a}{d}})^2+(\sqrt{\frac{b}{c}})^2+(\sqrt{\frac{c}{b}})^2+(\sqrt{\frac{d}{a}})^2]$$

$=(ady_1^2+bcy_2^2+bcy_3^2+ady_4^2)(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a})$.

同理，$\beta\leqslant(adx_1^2+bcx_3^2+bcx_2^2+adx_1^2)(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a})$.

以上两式相加，并利用 $x_i^2+y_i^2=1(i=1,2,3,4)$，$ab+cd=1$ 得

$$\alpha^2+\beta^2=(2ad+2bc)(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a})=2(ad+bc)(\frac{ab+cd}{ac}+\frac{ab+cd}{bd})$$

$$=2(ad+bc)(\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd})=2(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c}+\frac{b}{a})=2(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}).$$

例 11 已知 AA_1、BB_1、CC_1 是△ABC 的三条角平分线，A_1、B_1、C_1 分别在边 BC,CA,AB 上. 记 $BC=a$,$CA=b$,$AB=c$. 若 A_1、B_1、C_1、B 四点共圆，试求$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$的最小值.

解 如图 3－4，设 A_1、B_1、C_1、B 四点确定的圆交直线 AC 于一点 D. 因为点 A、C 在圆外，B_1 在圆上，且 B_1 在边 AC 上，从而 D 也一定在边 AC 上.

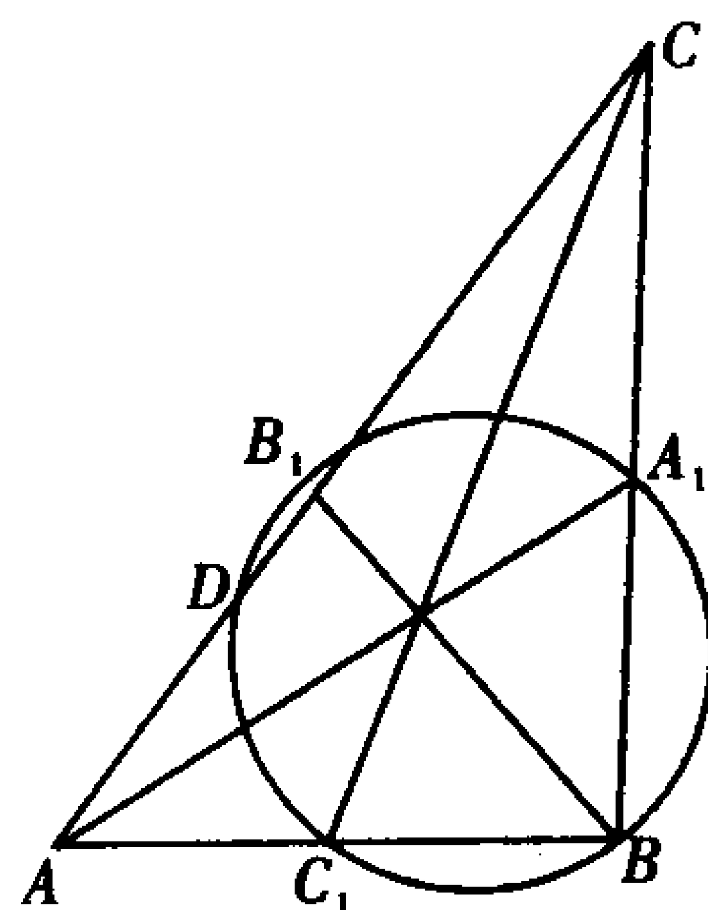


图 3－4

由割线定理，有 $AC_1\cdot AB=AD\cdot AB_1$.

又由角平分线性质，有 $AC_1=(AC_1+C_1B)\cdot\frac{AC}{AC+CB}=\frac{bc}{a+b}$，$AB_1=(AB_1+B_1C)\cdot\frac{AB}{AB+BC}=\frac{bc}{c+a}$.

因此，$AD=\frac{AC_1\cdot AB}{AB_1}=\frac{bc}{a+b}\cdot c\cdot\frac{c+a}{bc}=(a+c)\cdot\frac{c}{a+b}$.

同理，$CD=(a+c)\cdot\frac{a}{b+c}$.

从而 $b=AC=AD+DC=(a+c)(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c})$，

即 $$\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}.\qquad(*)$$

于是，模型$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$转换成$\frac{2b}{c+a}$.

令 $a+b=x$,$b+c=y$,$c+a=z$，则 $a+b+c=\frac{1}{2}(x+y+z)$，即有 $a=\frac{x+z-y}{2}$,$b=\frac{x+y-z}{2}$,$c=\frac{y+z-x}{2}$，此时由(＊)式转换并得

$$\frac{x+y}{z}=\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}-1=\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}-1$$

$$\geqslant\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\geqslant z\cdot\frac{4}{x+y}+1,$$

其中等号当且仅当 $x=y$ 时取得.

再令$\frac{x+y}{z}=t$，则上式又转换为 $t\geqslant\frac{4}{t}+1$.

由上式求得 $t\geqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})$或$t\leqslant\frac{1}{2}(1-\sqrt{17})$(舍去).

从而，$\frac{b}{a+c}=\frac{x+y-z}{2z}=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1)$.

故 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{2b}{a+c}\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{17}-1)$.

其中等号取得充要条件由 $x=y$ 得 $a=c$.

3. 变换转换

变换有几何变换与代数变换.

解数学竞赛题的几何变换,主要有平移、旋转、反射(轴对称)、相似(包括位似)、位似旋转、等积、反演等变换;代数变换主要有同解变换、同构变换、等价变换等.

例 12 (2003 年全国高考题)已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$,$B(2,0)$,$C(2,1)$,$D(0,1)$.一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 夹角为 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后,依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4(入射角等于反射角).若 P_4 与 P_0 重合,则 $\tan\theta=$( ).

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

解 选 C.理由:根据题意,按步可以求解,但就是步骤太多,运算太繁.事实上,对图形实施轴反射变换如图 3-5 所示的拼接(翻折四个矩形,且各矩形长均为 2,宽均为 1),则 $CP'_2=CP_2$,$D_1P'_3=DP_3$,$A_1P'_4=AP_4(AP_0)$,容易发现 P_0,P_1,P_2,P_3,P_4 在一条直线上.由题设可知点 P_0 的坐标是(1,0),P_4 的坐标是(5,2),这样可求得 $\tan\theta=\frac{2-0}{5-1}=\frac{1}{2}$.

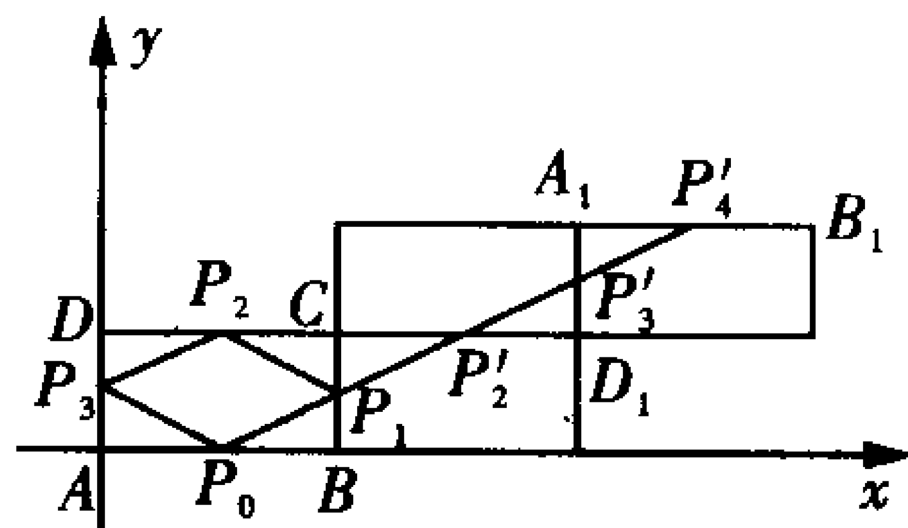


图 3-5

例 13 (2003 年全国高中联赛题)过圆外一点 P 作圆的两条切线和一条割线,切点为 A、B,所作割线交圆于 C、D 两点,C 在 P、D 之间,在弦 CD 上取一点 Q,使 $\angle DAQ=\angle PBC$.求证:$\angle DBQ=\angle PAC$.

证明 如图 3-6,连 AB.

由 $\angle ABC=\angle ADQ$,$\angle BAC=\angle PBC=\angle DAQ$,

知 $\triangle ABC\backsim\triangle ADQ$,即有 $\frac{BC}{DQ}=\frac{AC}{AQ}$. ①

又由 $\triangle PAC\backsim\triangle PDA$,有 $\frac{PA}{PD}=\frac{AC}{DA}$.

由 $\triangle PBC\backsim\triangle PDB$,有 $\frac{PB}{PD}=\frac{BC}{DB}$.

注意到 $PA=PB$,则 $\frac{AC}{DA}=\frac{BC}{DB}$. ②

由①、②得 $\frac{AQ}{DQ}=\frac{DA}{DB}$.

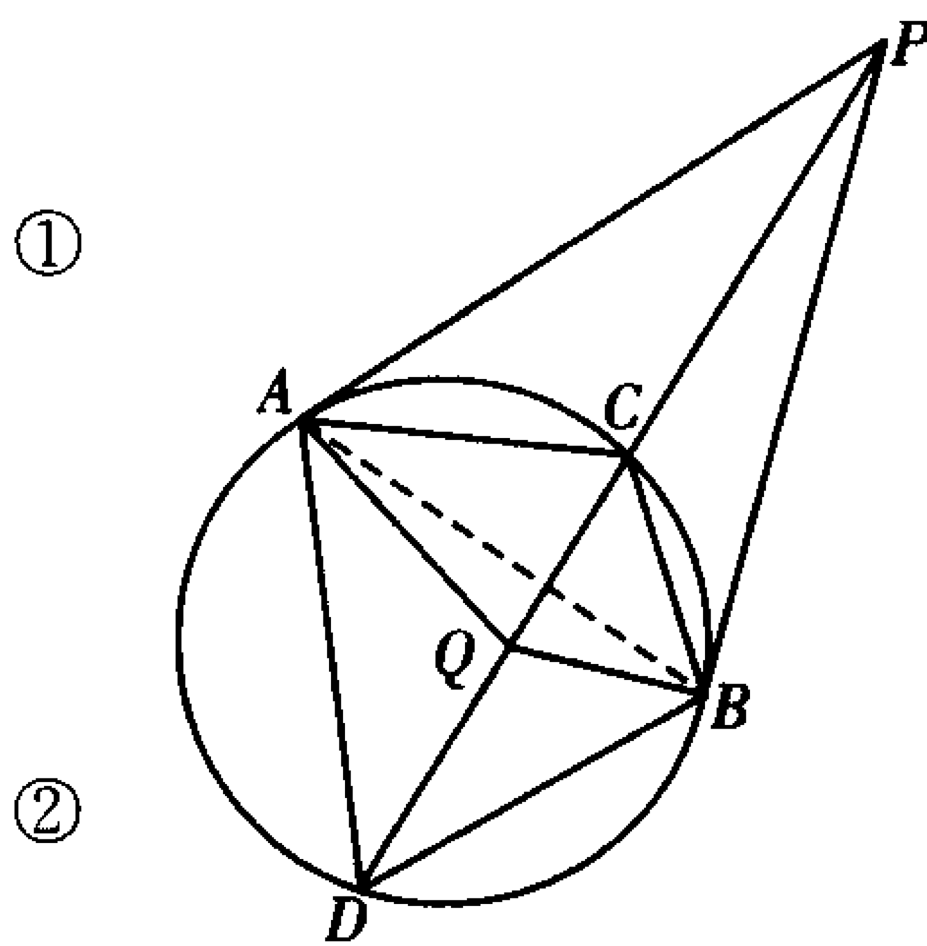


图 3-6

又 $\angle DAQ=\angle PDB$,故 $\triangle ADQ\backsim\triangle DBQ$.

于是,$\angle QBD=\angle ADP=\angle PAC$.

例 14 (第 41 届 IMO 预选题)已知两圆相交于 X、Y.证明:存在四个点满足:对于每一与两个给定的圆分别相切于 A、B 的圆交直线 XY 于 C、D,则 AC、AD、BC、BD 经过这四个点之一.

证明 设 Ω 是一个与给定两圆相切于 A、B 的圆,因为与直线 XY 相交,则与两给定的圆要么都外切,要么都内切.内切时也有两种情况,不妨只对其中的一种情况给予证明.

如图 3-7,设 CA 交圆 AXY 于 P,CB 交圆 BXY 于 Q,则 $CA\cdot CP=CX\cdot CY=CB\cdot CQ$,所以,

A、B、P、Q四点共圆，于是，$\angle CAB=\angle CQP$.

过C作圆Ω的切线CR，R与B在直线XY的同侧，有$\angle BCR=\angle CAB=\angle CQP$. 所以，$CR/\!/PQ$.

考虑分别以A和B为位似中心的两个位似变换，将圆Ω变为两个给定的圆. 以A为位似中心的位似变换将直线CR变为圆AXY在点P的切线；以B为位似中心的位似变换将直线CR变为圆BXY在点Q的切线，且这两条切线均平行于CR. 因此，这两条切线与直线PQ重合，即这两个圆的公切线. 所以，CA、CB分别过点P、Q.

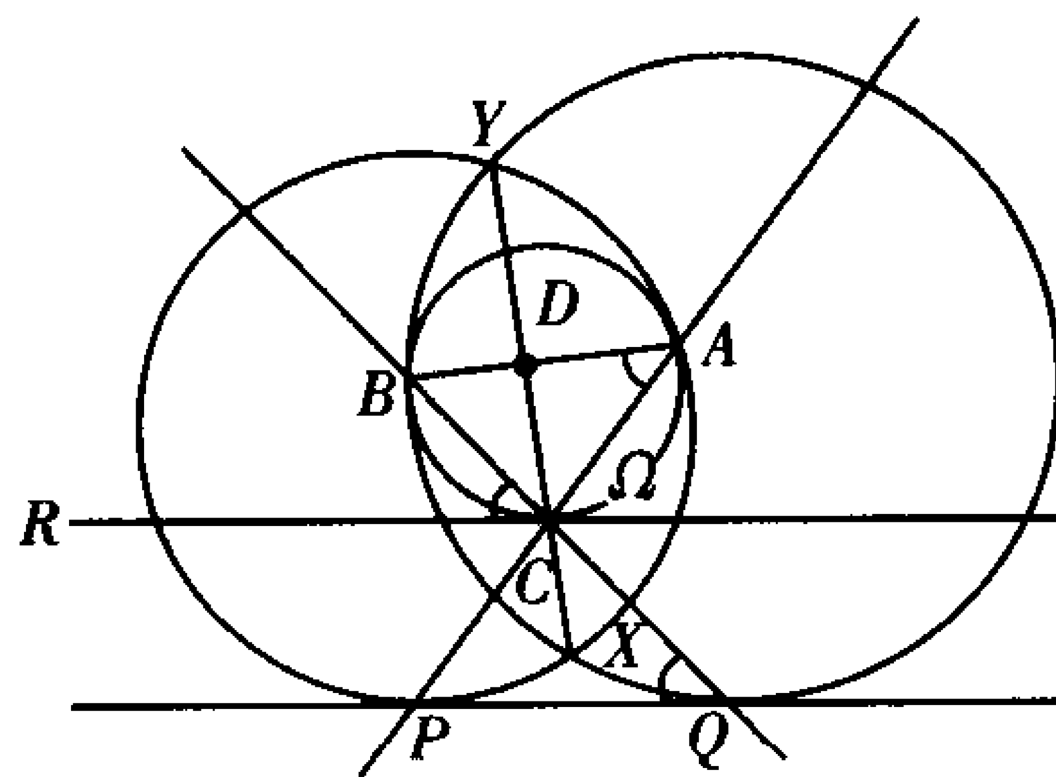


图 3－7

综上所述，两个给定圆的两条外公切线与这两个圆的四个切点即为满足条件的四个点.

例 15 （第42届IMO预选题）设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是任意实数. 证明：

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}<\sqrt{n}.$$

证明 由柯西不等式，对于任意实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant\sqrt{n}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

令 $a_k=\frac{x_k}{1+x_1^2+\cdots+x_k^2}$，$k=1,2,\cdots,n$.

因此，原不等式变换转换为证明

$$\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)^2<1.$$

当$k\geqslant2$时，有

$$\left(\frac{x_k}{1+x_1^2+\cdots+x_k^2}\right)^2\leqslant\frac{x_k^2}{(1+x_1^2+\cdots+x_{k-1}^2)(1+x_1^2+\cdots+x_k^2)}$$
$$=\frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_{k-1}^2}-\frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_k^2}.$$

当$k=1$时，$\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}\right)^2\leqslant1-\frac{1}{1+x_1^2}$，因此，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{1+x_1^2+\cdots+x_k^2}\right)^2\leqslant1-\frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}<1.$$

4. 映射转换

映射，是现代数学中一个极重要的概念.

映射，是一种特殊的对应关系.

映射转换的主要形式就是数学方法论中的关系——映射——反演原理：在一个数学问题里，常有一些已知元素与未知元素（都称为“原象”），它们之间有一定的关系，我们希望由此求得未知元素. 如果直接求解比较困难，可寻找一个映射（最好是一一映射即双射），把“原象关系”映射成“映象关系”，通过映象关系求得未知元素的映象，最后以未知元素的映象通过“反演”求得未知元素.

例 16 （2002年全国高中联赛题）已知两个实数集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$与$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_{50}\}$. 若从$A$到$B$的映射$f$使得$B$中每个元素都有原象，且$f(a_1)\leqslant\cdots\leqslant f(a_2)\leqslant f(a_{100})$，则这样的映射共有(　　)个.

A. C_{100}^{50}　　　　B. C_{99}^{18}　　　　C. C_{100}^{49}　　　　D. C_{99}^{49}

解　选D. 理由：不妨设 $b_1<b_2<\cdots<b_{50}$，将 A 中元素 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 按顺序分为非空的50组. 定义映射 $f:A\to B$，使第 i 组的元素在 f 之下的象都是 $b_i(i=1,2,\cdots,50)$. 易知这样的 f 满足题设要求，每个这样的分组都一一对应满足条件的映射. 于是，满足题设要求的映射 f 的个数与 A 按足码顺序分为50组的分法数相等，而 A 的分法数为 C_{99}^{49}，则这样的映射共有 C_{99}^{49} 个.

例 17　(第43届IMO预选题)求函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对于任意实数 x,y，有 $f(f(x)+y)=2x+f(f(y)-x)$.

解　设 $y=-f(x)$，则 $f(0)=2x+f(f(-f(x))-x)$，

即　$f(0)-2x=f(f(-f(x))-x)$，

对所有 x 成立.

从而，对任意实数 $f(0)-2x=y$，存在实数 z，使得 $y=f(z)$，即函数 f 是满射.

因此，存在实数 a，使得 $f(a)=0$.

设 $x=a$，则原函数方程转换为

$f(y)=2a+f(f(y)-a)$，

即　$f(y)-a=f(f(y)-a)+a$.

由于 f 是满射，对于每个实数 x，存在一个实数 y，使得 $x=f(y)-a$. 所以，$x=f(x)+a$，即 $f(x)=x-a$ 对所有实数 x 成立.

经验证 a 为任意实数，$f(x)=x-a$ 均满足原函数方程.

例 18　(1991年全国高中联赛题)设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，A 为至少含有两项、公差为正的等差数列，其项数都在 S 中且当将 S 的其他元素置于 A 前或后时，均不能构成与 A 有相同公差的等差数列. 求这种 A 的个数(只有两项的数列也看作等差数列).

解　当 $n=2k$ 为偶数时，满足要求的每个数列 A 中必有连续两项，前一项在$[1,2,\cdots,k]$中，后一项在$\{k+1,k+2,\cdots,n\}$中. 反之，从$\{1,2,\cdots,k\}$和$\{k+1,k+2,\cdots,n\}$中各任取一数，并以二者之差为公差可作出一个满足要求的数列 A. 这个对应是双射(或一一映射). 故知 A 的个数为 $k^2=\frac{1}{4}n^2$.

当 $n=2k+1$ 为奇数时，情况完全类似. 惟一的不同在于这时$\{k+1,k+2,\cdots,n\}$有 $k+1$ 个元素，故 A 的个数为 $k(k+1)=\frac{1}{4}(n^2-1)$.

例 19　(1990年全国高中联赛题)8个女孩和25个男孩围成一圈，任意两个女孩之间至少站两个男孩，问共有多少种不同的排列方法(只要把圈旋转一下就重合的排法认为是同一种).

解　固定女孩中的一个记为 A，对任何一个满足要求的圆排列，从 A 开始按顺时针方向将它变成一个直排. 由于每个女孩后面至少有两个男孩，我们将每个女孩连同紧跟其后的两个男孩对应于一个黑球，而其余的9个男孩每人对应于一个白球，则不妨只计男孩与女孩的不同而不计女孩与女孩、男孩与男孩之间的不同时，这个对应是双射. 由此导致的排列间的对应也是双射. 于是问题转换为8个黑球与9个白球且第一球为黑球的所有排列数的计算，显然，这时不同排列方法共有 C_{16}^{7} 种.

对于黑球与白球的每种排列，其中每个黑球对应于一个三人组，其中第一人为女孩，后两个为男孩. 将除 A 以外的7个女孩分别排列后7个三人组中，共有 $7!$ 种排列法；将25个男孩排入到25个位置，计有 $25!$ 种不同排法. 由乘法原理便知，所求的排列共有 $\frac{16!\cdot 25!}{9!}$ 种.

5. 领域转换

运用某一学科的知识将面临另一学科的新问题转换，我们称之为领域转换. 例如代数问题的几何方法求解以及平面几何问题的三角法、解析法、向量法等求解都是领域转换法求解.

例 20 （1992 年全国数学竞赛题）函数

$f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$的最大值是________.

解 填$\sqrt{10}$. 理由：先对函数的表达式进行有目的的转换.

$$f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$$

$$=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-2)^2}-\sqrt{(x-0)^2+(x^2-1)^2},$$

再把它看作几何问题.

它的几何意义是抛物线 $y=x^2$ 上的点 $P_1(x,x^2)$到点 $A(3,2)$与 $B(0,1)$的距离之差. 如图 3-8，连接 AB 并延长交抛物线于 P，由三角形性质可知：

$$|P_1A|-|P_1B|\leqslant|AB|=\sqrt{(3-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}.$$

所以函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$的最大值是$\sqrt{10}$.

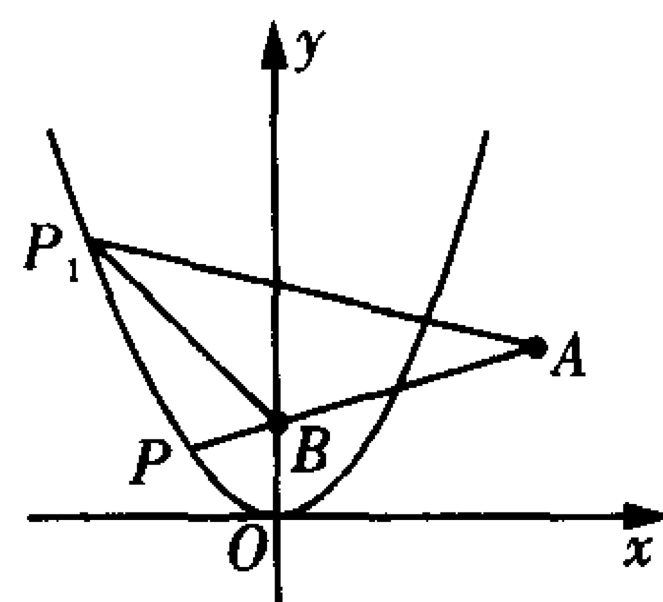


图 3-8

例 21 （2001 年全国高中联赛加试题）$\triangle ABC$ 中，O 为外心，三条高 AD、BE、CF 交于点 H，直线 ED 和 AB 交于点 M，直线 FD 和 AC 交于点 N. 求证：

(1)$OB\perp DF$，$DC\perp DE$；

(2)$OH\perp MN$.

证法 1（三角法） (1)过 C 作$\odot O$ 的切线 CT. 如图 3-9，则 $OC\perp CT$，且$\angle TCA=\angle ABC=\angle DEC$，则 $DE/\!/CT$，故 $OC\perp DE$. 同理 $OB\perp DF$.

(2)过 M 作 $MK/\!/AC$，交 DF 延长线于点 K. 下证$\triangle OBH\backsim\triangle NKM$.

因$\dfrac{MK}{\sin\angle MFK}=\dfrac{KF}{\sin\angle KMA}$，

又$\angle KMA=\angle BAC$，

则$\dfrac{MK}{\sin C}=\dfrac{KF}{\sin A}$.

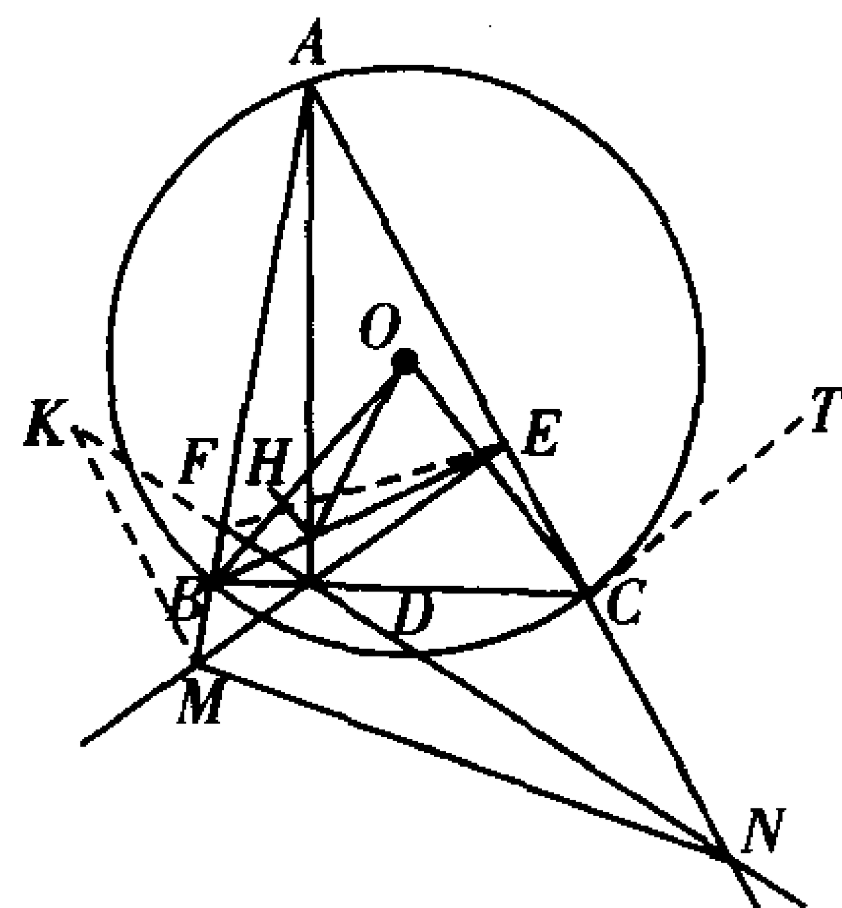


图 3-9

连 FE，由$\dfrac{MF}{\sin\angle FEM}=\dfrac{FE}{\sin\angle FME}$，以及共圆知$\angle FEM=180^\circ-2\angle B$，$\angle FME=\angle B-\angle A$，

从而$\dfrac{MF}{\sin(180^\circ-2B)}=\dfrac{FE}{\sin(B-A)}$.

又$\dfrac{MA}{\sin B}=\dfrac{AE}{\sin(B-A)}$，

则$\dfrac{MF}{MA}=\dfrac{FE}{AE}\cdot\dfrac{\sin 2B}{\sin B}$.

又$\dfrac{AE}{\sin C}=\dfrac{EF}{\sin A}$，

则$\dfrac{MF}{MA}=2\cos B\cdot\dfrac{\sin A}{\sin C}$.

由 $MK/\!/AC$，有$\dfrac{KF}{KN}=\dfrac{MF}{MA}$.

则 $KF=KN\cdot 2\cos B\cdot\dfrac{\sin A}{\sin C}$.

故$\dfrac{MK}{\sin C}=\dfrac{KF}{\sin A}=KN\cdot\dfrac{2\cos B}{\sin C}$.

于是，$\dfrac{MK}{KN}=2\cos B$.

又$\dfrac{BH}{OB}=\dfrac{2R\cos B}{R}=2\cos B$，

则$\dfrac{BH}{OB}=\dfrac{MK}{KN}$.

又$\angle MKN=\angle FNA=\angle C-\angle A$，

$\angle OBH=(90^\circ-\angle A)-(90^\circ-\angle C)=\angle C-\angle A$，

从而$\angle MKN=\angle OBH$.

因此，$\triangle OBH\backsim\triangle NKM$.

又 $OB\perp KN$，$BH\perp KM$，

故 $OH\perp MN$.

证法 2(向量法) (1)设$\triangle ABC$外接圆半径为 R，则有

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF})$

$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BF}$

$=|\overrightarrow{BO}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\cdot\cos\angle DBO-|\overrightarrow{BO}|\cdot|\overrightarrow{BF}|\cdot\cos\angle FBO$

$=R\cdot|\overrightarrow{BD}|\sin\angle BAC-R\cdot|\overrightarrow{BF}|\sin\angle ACB$

$=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|-\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{BA}|$.

因四边形 $AFDC$ 为圆内接四边形，

则$|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|$.

从而$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{DF}=0$.

故$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{DF}$，即 $OB\perp DF$.

同理，$OC\perp DE$.

(2)$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM}$.

而$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AN}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AN}$

$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AN}$

$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AN}$ [因$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\perp\overrightarrow{AN}$]

$=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{FN}-\overrightarrow{FA})$

$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{FN}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{FA}$

$=-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{FA}$ (因$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{FN}$)

$=\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{FA}=|\overrightarrow{BO}|\cdot|\overrightarrow{FA}|\cdot\cos\angle OBA$

$=R\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle BAC\cdot\sin\angle ACB$

$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle BAC=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}.$

同理，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}.$

则$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{MN}=0.$

有$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{MN}$. 即 $OH\perp MN$.

证法3(解析法) (1)建立直角坐标系如图3-10，设 $A(0,a)$，$B(b,0)$，$C(c,0)$. 则

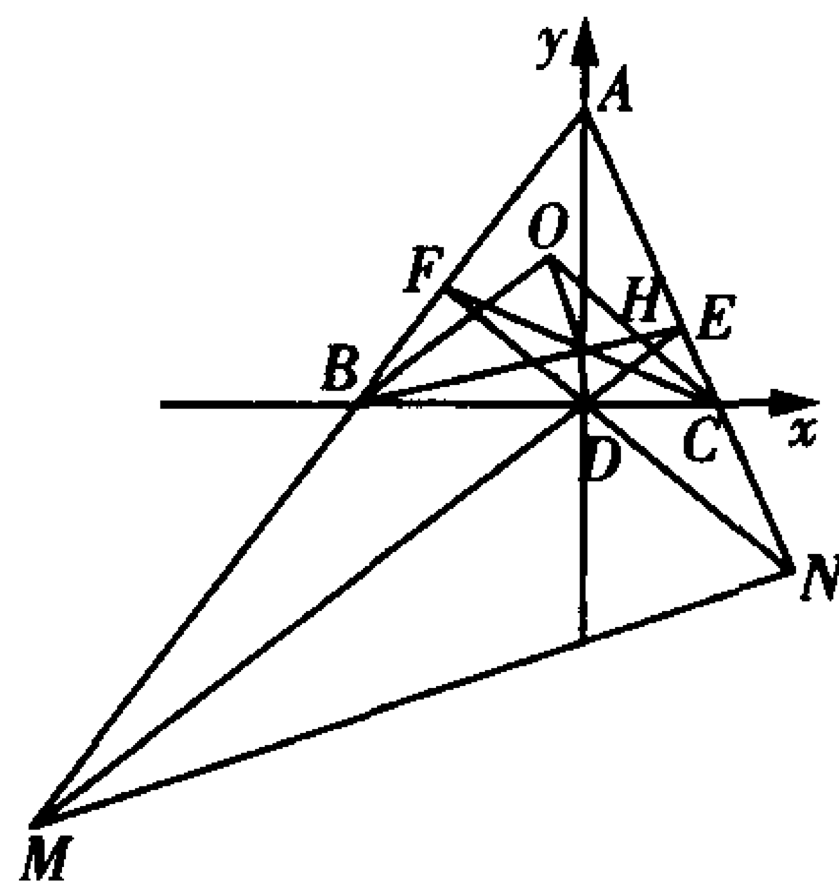


图3-10

AB 方程为 $ax+by-ab=0$，①

AC 方程为 $ax+cy-ac=0$，②

CF 方程为 $bx-ay-bc=0$，

BE 方程为 $cx-ay-bc=0$.

因 BC 中垂线方程为 $x=\frac{b+c}{2}$，

AC 中垂线方程为 $y-\frac{a}{2}=\frac{c}{a}(x-\frac{c}{2})$，

则 $H(0,-\frac{bc}{a})$，$O(\frac{b+c}{2},\frac{a^2+bc}{2a})$.

又因 FD 为过 F 的直线，其方程为

$(ax+by-ab)+\lambda(bx-ay-bc)=0$，

FD 过原点，

则 $\lambda=-\frac{a}{c}$.

整理得 FD 的方程为 $(ac-ab)x+(bc+a^2)y=0$. ③

由 $\angle EDC=\angle FDB$（$\angle EDC=\angle EHC$，$\angle FDB=\angle FHB$），

知 DE 的方程为 $(ab-ac)x+(bc+a^2)y=0$. ④

则 $k_{FD}\cdot k_{OB}=\frac{ab-ac}{bc+a^2}\cdot\frac{bc+a^2}{ac-ab}=-1.$

故 $OB\perp DF$.

同理，$OC\perp DE$.

(2)MN 为既过 N 又过 M 的直线，故存在实数 λ_1、λ_2，使

$$\begin{cases}(ax+cy-ac)+\lambda_1\cdot[(ac-ab)x+(bc+a^2)y]=0,\\(ax+by-ab)+\lambda_2\cdot[(ab-ac)x+(bc+a^2)y]=0\end{cases}$$

成立.

整理得

$$\begin{cases}a[1+\lambda_1(c-b)]x+[c+\lambda_1(bc+a^2)]y-ac=0,\\a[1+\lambda_2(b-c)]x+[b+\lambda_2(bc+a^2)]y-ab=0.\end{cases}$$

化简为

$$\begin{cases}ab[1+\lambda_1(c-b)]=ac[1+\lambda_2(b-c)],\\b[c+\lambda_1(bc+a^2)]=c[b+\lambda_2(bc+a^2)],\end{cases}$$

即 $\begin{cases}1=\lambda_1 b+c\lambda_2,\\ b\lambda_1=c\lambda_2.\end{cases}$

从而 $\lambda_1=\dfrac{1}{2b}$.

MN 的方程整理为

$(ac+ab)x+(a^2+3bc)y-2abc=0.$

于是 $k_{MN}\cdot k_{OH}=-\dfrac{ac+ab}{a^2+3bc}\cdot\dfrac{a^2+3bc}{ac+ab}=-1.$

故 $OH\perp MN$.

6. 思维转换

唯物辩证法认为，质量互变规律、对立统一规律和否定之否定规律是支配自然界、社会和人类思维最一般的规律. 解数学竞赛题的思维转换法就是遵循这些规律，对数学问题对象矛盾双方的相互联系和相互制约关系进行认识的思维方式. 思维转换要求我们善于从不同的角度、不同的侧面去观察、分析问题，产生新的联想，理出思路. 思维转换的常用形式有：一般与特殊的转换、抽象与具体的转换、整体与部分的转换、正与逆的转换、低与高的转换、直与曲的转换、动与静的转换等等.

例 22 （2002 年湖南省竞赛题）在如图 3-11 所示的 6 块地上，种上甲或乙两种蔬菜（可只种其中一种，也可两种都种）. 要求相邻 2 块土地上不都种甲种蔬菜，则共有种蔬菜的方案数为________.

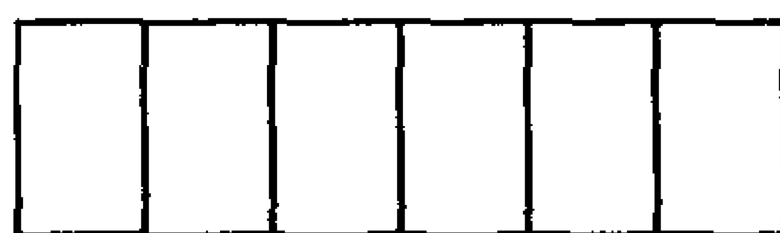


图 3-11

解 填 21. 理由：在 6 块地上种甲种蔬菜的块数可能是 0,1,2,3（最多只能为 3）.

先把 $6-n(n=0,1,2,3)$ 块种上乙种蔬菜，再用 n 块甲种蔬菜插到它们形成的含两端在内的空当中去，得到选用 n 块种甲蔬菜的方案有 C_{6-n+1}^{n} 种. 令 $n=0,1,2,3$，得共有方案数为 $C_7^0+C_6^1+C_5^2+C_4^3=21$.

例 23 （2002 年全国高中联赛加试题）在世界杯足球赛前，F 国教练为了考察 $A_1,A_2,\cdots,A_7$ 这七名队员，准备让他们在三场训练比赛（每场 90 分钟）都上场，假设在比赛的任何时刻，这些队员中有且仅有一人在场上，并且 A_1,A_2,A_3,A_4 每人上场的总时间（以分钟为单位）均能被 7 整除，A_5,A_6,A_7 每人上场的总时间（以分钟为单位）均能被 13 整除. 如果每场换人次数不限，那么按每名队员上场的总时间计算，共有多少种不同的情况？

解 设 A_1,A_2,A_3,A_4 的时间分别为 $7k_1,7k_2,7k_3,7k_4$，和为 x；A_5,A_6,A_7 的时间分别为 $13k_5,13k_6,13k_7$，和为 y.

则原题即为满足 $7(k_1+k_2+k_3+k_4)+13(k_5+k_6+k_7)=3\times 90=270$ 的正整数组 $(k_1,k_2,\cdots,k_7)$ 的总组数.

对 $7x+13y=270$，$x=\dfrac{270-13y}{7}\geqslant 4$，解得

$\begin{cases}x=33,\\ y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=20,\\ y=10;\end{cases}$ $\begin{cases}x=7.\\ y=17.\end{cases}$

故满足题意的只有三组 (x,y).

解方程组 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=33;\\ k_5+k_6+k_7=3;\end{cases}$

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=20,\\ k_5+k_6+k_7=10;\end{cases}\quad \begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=7,\\ k_5+k_6+k_7=17.\end{cases}$$

共有正整数解 $C_{32}^{3}C_{2}^{2}+C_{19}^{3}C_{9}^{2}+C_{6}^{3}C_{16}^{2}=42244$ 组，且每组解对应着一种时间分布情况．

故共有 42244 种情况．

【解题尝试】

A 组

1. 定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 为增函数，偶函数 $g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的图象与 $f(x)$ 的图象重合，设 $a>b>0$，给出下列不等式：

   (1) $f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$；　　(2) $f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$；

   (3) $f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$；　　(4) $f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$；

   其中成立的是（　　）．

   A. (1)、(4)　　B. (2)、(3)　　C. (1)、(3)　　D. (2)、(4)

2. 解方程 $(x^2+3x-4)^2+(2x^2-7x+6)^2=(3x^3-4x+2)^2$．

3. 已知：a、$b\in\mathbf{R}$，设 $f(x)=x^2+ax+b$，则 $|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$ 中至少有 1 个不小于 $\frac{1}{2}$．

4. 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b+c=1$，$y=\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$．

   求证：$y>5$．

5. 已知 $\odot C$：$x^2+y^2-2x-6y-15=0$，直线 l：$(1+3k)x+(3-2k)y+4k-17=0$．求证：对任意实数 k，l 与 $\odot C$ 总有两个交点．

6. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是边长为 $4\sqrt{2}$ cm 的正三角形，棱 $SC\perp$ 底面 ABC，其长为 2 cm，D、E 分别是 AB、BC 的中点，若 P 在 SE 上移动，求 $\triangle PCD$ 面积的最小值．

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 是其前 n 项的和，若 $S_p=q$，$S_q=p(p\neq q)$，试求 S_{p+q} 的值．

8. 如图 3-12，若椭圆集点为 F_1、F_2，P 为椭圆上任一点，$\triangle F_1PF_2$ 中 $\angle P$ 的平分线交椭圆长轴于 D．求证：$\triangle F_1PF_2$ 的内心 I 分 PD 为定比．

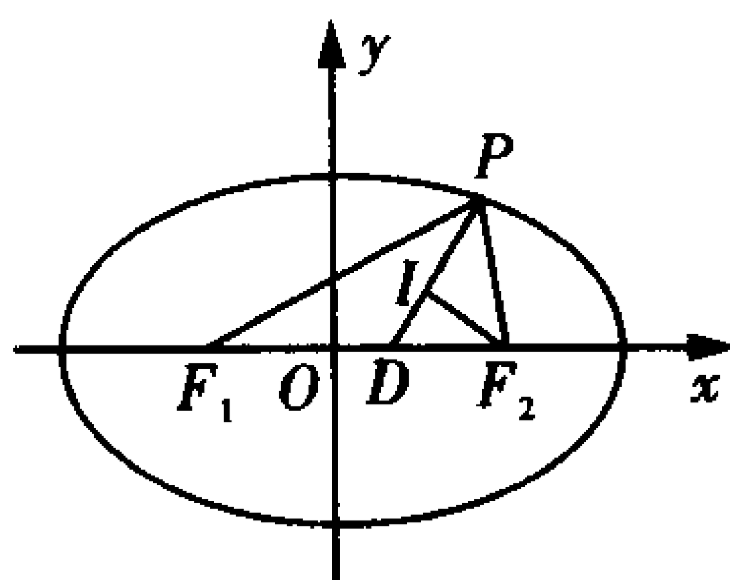


图 3-12

9. (1977 年第 9 届加拿大数学奥林匹克题) 已知正圆锥的底面半径是 1 cm，母线长是 3 cm，P 是底面圆周上一点，由 P 绕着圆锥回到 P 的最短路线如图 3-13 所示，由顶点 V 到这条路线的最小距离是多少？

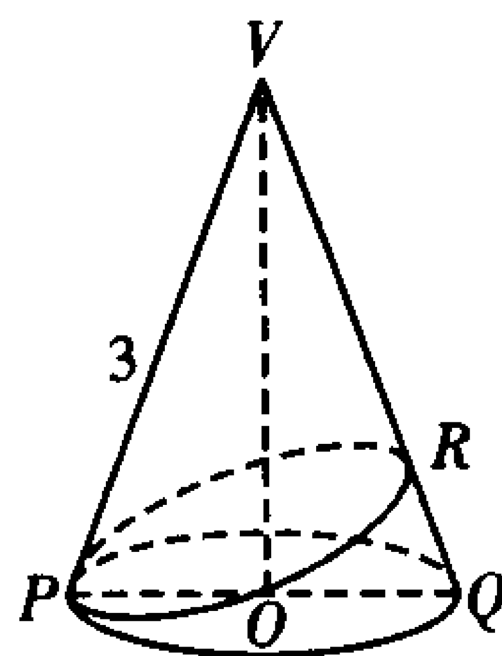


图 3-13

10. (2002 年首届女子数学奥林匹克题) 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n(n\geqslant2)$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任意一个排列．求证：

$$\frac{1}{P_1+P_2}+\frac{1}{P_2+P_3}+\cdots+\frac{1}{P_{n-2}+P_{n-1}}+\frac{1}{P_{p-1}+P_n}>\frac{n-1}{n+2}.$$

11. (2001 年中国西部数学奥林匹克题) 求所有的实数 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得 $(2-\sin2x)$

$\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$，并证明你的结论.

12. 设 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4\geqslant 2$ 且 $x_2+x_3+x_4\geqslant x_1$.
求证：$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\leqslant 4x_1x_2x_3x_4$.

B组

1. (第29届俄罗斯数学奥林匹克题)设 α、β、γ、τ 为正数，对一切实数 x，都有 $\sin\alpha x+\sin\beta x=\sin\gamma x+\sin\tau x$. 证明：$\alpha=\gamma$ 或 $\alpha=\tau$.
2. (第51届捷克和斯洛伐克数学奥林匹克(决赛))已知 $\triangle KLM$，A 在 LK 的延长线上. 试构造矩形 $ABCD$，使得 B、C、D 分别在边 KM、KL、LM 所在的直线上.
3. (第42届IMO试题)在 $\triangle ABC$ 中，AP 平分 $\angle BAC$，交 BC 于 P，BQ 平分 $\angle ABC$，交 CA 于 Q. 已知 $\angle BAC=60^\circ$，且 $AB+BP=AQ+BQ$. 问 $\triangle ABC$ 各角的度数的可能值是多少？
4. (第53届罗马尼亚数学奥林匹克(决赛))求所有实多项式 f 和 g，使得对所有 $x\in\mathbf{R}$，有 $(x^2+x+1)f(x^2-x+1)=(x^2-x+1)g(x^2+x+1)$.
5. (2002年中国台湾数学奥林匹克题)对于坐标平面上的格点 X，若线段 OX 上不含其他格点，则称点 X 从原点 O 可见. 证明：对任意正整数 n，存在面积为 n^2 的正方形 $ABCD$，使得在此正方形内部无从原点可见的格点.
6. (第44届IMO预选题)已知 n 是正整数，$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 是两个正实数列. 若 $\{z_1,z_2,\cdots,z_{2n}\}$ 是满足 $z_{i+j}^2\geqslant x_iy_j$ 的正实数列，其中 $1\leqslant i,j\leqslant n$，设 $M=\max\{z_2,z_3,\cdots,z_{2n}\}$. 证明：$(\frac{M+z_2+z_3+\cdots+z_{2n}}{2n})^2\geqslant(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})(\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n})$.
7. (第44届IMO预选题)Γ_1、Γ_2、Γ_3、Γ_4 分别为四个不同的圆，且 Γ_1 与 Γ_3 外切于点 P，Γ_2 与 Γ_4 也外切于点 P. 假设 Γ_1 与 Γ_2，Γ_2 与 Γ_3，Γ_3 与 Γ_4，Γ_4 与 Γ_1 分别交于异于 P 的点 A、B、C、D. 证明：$\frac{AB\cdot BC}{AD\cdot DC}=\frac{PB^2}{PD^2}$.
8. (第42届IMO试题)对所有正实数 a、b、c，证明：
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1.$$
9. (第44届IMO试题)设 n 为正整数，实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$.
(a)证明：$(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|x_i-x_j|)^2\leqslant\frac{2(n^2-1)}{3}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2$.
(b)证明：上式等号成立的充分必要条件是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为等差数列.
10. (2004年中国数学奥林匹克题)已给正整数 c，设数列 $x_1,x_2,\cdots$ 满足 $x_1=c$，且 $x_n=x_{n-1}+[\frac{2x_{n-1}-(n+2)}{n}]+1$，$n=2,3,\cdots$，其中$[x]$表示不大于 x 的最大整数. 求数列$\{x_n\}$的通项公式.

第4章　构造法

【学习目标】

化归或转换的一种重要手段,就是构造.

构造法在数学竞赛中是常用的解法,这种方法就是在面对新问题时,从新的角度,用新的观点观察、分析、解释对象,别开生面地依据题设条件的特点,用已知条件中的元素为"元件",用已知数学关系式为"支架",在思维中构造出一新的数学形式,或者直接构造出有关结论、模型、辅助问题等,使新问题中隐晦不清的关系和性质在新构造中清楚地展现出来,从而简捷地解决问题.

构造法解题贵在"创新",在解题时常打破常规,另辟蹊径,表现出简捷、明快、精巧等特色.

构造法的核心是"构造",即直接构造有关结论、指标、算法、程序而立即将问题解决,或构造模型、图形、实例、中介辅助元素(辅助命题、函数、方程、数列、不等式、向量、特殊曲线等),沟通数学的条件与结论间的内在联系而使问题解决.

构造法解题能力的提高,除了在于解题者基础知识的扎实、经验的广博及解题意志的顽强外,还要学习一些构造方法与技巧.

【解题钥匙】

1. 构造欲求数学对象

有一些数学竞赛题是断言存在着具有某种性质的数学对象,或者断言某种数学对象具有某种特定的性质等.对于这种类型问题的求解,关键往往能否构造出符合要求的数学对象.

例1　(1997年全国高中联赛题)在平面直角坐标系中,若方程 $m(x^2+y^2+2y+1)=(x-2y+3)^2$ 表示的是曲线椭圆,则 m 的取值范围为(　　).

A. $(0,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(0,5)$　　D. $(5,+\infty)$

解　选D.理由:若直接化椭圆为标准方程 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$,但在化的过程中要出现 xy 项,需要旋转,而高中阶段未学.因此,只能利用圆锥曲线的定义,通过率心率 e 满足 $0<e<1$ 而求出 m 的取值范围.因而求解的难点是符合定义中定点和定直线的构造.这需要对原方程进行巧妙变形,使左端为到定点和定直线之比,右端为带有参数 m 的"常数",即直接构造出符合椭圆、双曲线等圆锥曲线的统一定义的比例式:$\frac{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}{\left|\frac{x-2y+3}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\right|}=\sqrt{\frac{5}{m}}$,这表明点 (x,y) 到定点 $(0,-1)$ 与到定直线 $x-2y+3=0$ 的距离之比为常数 $\sqrt{\frac{5}{m}}$,由椭圆定义得 $\sqrt{\frac{5}{m}}<1$,故得 $m>5$.

例2　能否在无穷大的方格纸的每个方格中放"+"或"-",使每一行、每一列及每条(与水平方

向夹角为 45°或 135°的)对角线上,每三个连续的方格中符号不全相同?

解 能.奇数行的符号为

…++−−++−−++…,

偶数行的符号为

…−−++−−++−−…,

则每行、每列均符合要求.

如果一条对角线上出现两个++,那么上(下)一个+号的下(上)移两格任为+号,由它再向左或右移两格均为−号,所以不会出现三个连续的+号.同样也不会出现三个连续的−号.

例 3 (2003 年北京市竞赛题)设有两两不等的 n 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,则在形如 $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n$(其中 t_i 取 1 或 −1,$i=1,2,\cdots,n$)的整数中,存在 $\frac{n^2+n+2}{2}$ 个不同的整数,要么同时为奇数,要么同时为偶数.

解 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,则 $a=-a_1-a_2-\cdots-a_n$ 是形如 $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n$ 的整数中的最小数,$a+2a_1=a_1-a_2-\cdots-a_n$ 也是形如 $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n$ 的正整数.一般地,$a+2a_1+2a_2$ 也是形如 $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n$ 的整数.依此类推,则

$$\begin{aligned}&a<\underbrace{a+2a_1<a+2a_2<\cdots<a+2a_n}_{n\text{个}}\\&<\underbrace{a+2a_n+2a_1<\cdots<a+2a_n+2a_{n-1}}_{n-1\text{个}}\\&<\underbrace{a+2a_n+2a_{n-1}+2a_1<\cdots<a+2a_n+2a_{n-1}+2a_{n-2}}_{n-2\text{个}}\\&<\cdots\\&<\underbrace{a+2a_n+\cdots+2a_3+2a_1<a+2a_n+\cdots+2a_3+2a_2}_{2\text{个}}\\&<\underbrace{a+2a_n+2a_{n-1}+\cdots+2a_2+2a_1}_{1\text{个}}\\&=a+2(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\&=a_1+a_2+\cdots+a_n.\end{aligned}$$

上式中的每一个整数都是形如 $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n$(其中 t_i 取 1 或 −1,$i=1,2,\cdots,n$)的整数中的不同的数,它们共有

$$1+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$$

个彼此不同的数.

易见,当 a 是偶数时,这 $\frac{n^2+n+2}{2}$ 个不同的整数都是偶数;当 a 是奇数时,这 $\frac{n^2+n+2}{2}$ 个不同的整数都是奇数.

例 4 (2002 年中国西部数学奥林匹克题)考虑复平面上的正方形,它的 4 个顶点所对应的复数恰好是某个整系数一元四次方程 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 的 4 个根.求这种正方形面积的最小值.

解 依题意,可知方程的 4 个根只能是下面的两种情形:2 个实根与 1 对共轭虚根;2 对共轭虚根.

(1)若方程的 4 个根是 2 个实根与 1 对共轭虚根,则可设此 4 个根为 $\pm b,a\pm bi$.于是,原方程为

$(x-a)^4=b^4$,

即 $x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4-b^4=0$.

由 $-4a\in\mathbf{Z}$,且 $4a^3\in\mathbf{Z}$,可知 $a\in\mathbf{Z}$. 由 $a^4-b^4\in\mathbf{Z}$ 知 $b^4\in\mathbf{Z}$,所以,$b^4\geqslant1$,$b^2\geqslant1$. 此时正方形的面积为 $2b^2\geqslant2$,当 $a\in\mathbf{Z}$,$b=\pm1$ 时等号成立.

(2)若方程的 4 个根为 2 对共轭虚根,则可设此 4 个根为 $a\pm bi$,$a+2b\pm bi$. 这 4 个根为方程 $(x-(a+b))^4=-4b^4$ 的 4 个根. 同上讨论可知 $4b^4\in\mathbf{Z}$,进而 $4b^4\geqslant1$,$b^2\geqslant\frac{1}{2}$. 于是,正方形的面积为 $4b^2\geqslant2$. 当 $b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,$a+b\in\mathbf{Z}$ 时等号成立.

综上可知,这样的正方形的面积大于等于 2. 又方程 $x^4=1$ 的 4 个根为复平面上一个面积等于 2 的正方形的 4 个顶点,所以,这种正方形面积的最小值为 2.

2. 构造辅助元素

构造辅助元素是构造法解题的最常用最基本的形式之一. 构造辅助元素也是多种多样的,常见的有构造函数、方程(组)、对偶(称)式、数组(数列)、不等式、复数、向量、圆锥曲线以及辅助命题等.

例 5 (2003 年湖南省竞赛题)设 $x,y\in\mathbf{R}$,且满足

$$\begin{cases}(x-1)^{2003}+2002(x-1)=-1,\\(y-2)^{2003}+2002(y-2)=1.\end{cases}$$

则 $x+y=$________.

解 填 3. 理由:构造函数 $f(t)=t^{2003}+2002t$,易知 $f(t)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,也是单调函数. 由此可得 $f(x-1)=-f(y-2)$,即 $f(x-1)=f(2-y)$. 故 $x-1=2-y$,即 $x+y=3$.

例 6 若 $|a|<1$,$|b|<1$,$|c|<1$,a,b,c 为实数,求证:$ab+bc+ca>-1$.

证明 构造一次函数

$f(x)=(b+c)x+bc+1$,

则有 $f(1)=(b+c)+bc+1$

$=(1+b)(1+c)>0$,

$f(-1)=(-b-c)+bc+1$

$=(1-b)(1-c)>0$,

由一次函数的线性性质(即单调性),则对 $-1<a<1$ 都有 $f(a)>0$. 即

$ba+ca+bc+1>0$,

故 $ab+bc+ca>-1$.

例 7 (第 22 届 IMO 试题)在△ABC 中,$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,d_1、d_2、d_3 分别为边 BC、AC、AB 上的高. $S_{\triangle ABC}$ 为△ABC 的面积. 求证:$N=\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2S_{\triangle ABC}}$.

证明 设 $f(t)=2S_{\triangle ABC}\cdot t^2-2(a+b+c)t+N$

$=(ad_1+bd_2+cd_3)t^2-2(a+b+c)t+N$

$=(\sqrt{ad_1}t-\sqrt{\frac{a}{d_1}})^2+(\sqrt{bd_2}t-\sqrt{\frac{b}{d_2}})^2+(\sqrt{cd_3}t-\sqrt{\frac{c}{d_3}})^2(t\in\mathbf{R})$.

从而 $2S_{\triangle ABC}>0$,$f(t)\geqslant0$ 恒成立.

故 $\Delta=4(a+b+c)^2-8N\cdot S_{\triangle ABC}\leqslant0$,

即 $N=\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2S_{\triangle ABC}}$.

例 8 （1986 年全国高中联赛试题）设实数 a,b,c 满足

$$\begin{cases}a^2-bc-8a+7=0,\\b^2+c^2+bc-6a+6=0.\end{cases}$$

那么 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　B. $(-\infty,1]\cup[9,+\infty)$　C. $(0,7)$　D. $[1,9]$

解 选 D. 理由：由已知得 $\begin{cases}bc=a^2-8a+7,\\b+c=\pm(a-1).\end{cases}$

故可构造方程

$x^2\pm(a-1)x+a^2-8a+7=0$,

从而 $\Delta=[\pm(a-1)]^2-4(a^2-8a+7)\geqslant0$,

即 $a^2-10a+9\leqslant0$,

故 $1\leqslant a\leqslant9$.

例 9 在 $\triangle ABC$ 中，证明：

$$\tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}\geqslant4\tan\frac{A}{2}\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}-1\right).$$

证明 $\tan\frac{B}{2}>0$，乘以待证式，即证明

$$\left(\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2-4\tan\frac{B}{2}\tan\frac{A}{2}\cdot\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}-1\right)\geqslant1.$$

构造一元二次方程

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\cdot x^2+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\cdot x+\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}-1\right)=0. \quad ①$$

又 $\cot\frac{B}{2}=\tan\frac{A+C}{2}$

$$=\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}},$$

即 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}-1=0$,

从而 1 是方程①的根. 其判别式 $\Delta\geqslant0$,

故 $\tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}\geqslant4\tan\frac{A}{2}\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}-1\right)$.

例 10 （1991 年亚太地区竞赛题）已知 $a_i、b_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\sum\limits_{i=1}^n a_i=\sum\limits_{i=1}^n b_i$，求证：$\sum\limits_{i=1}^n\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\geqslant\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n a_i$.

证明 记 $\sum\limits_{i=1}^n\frac{a_i^2}{a_i+b_i}=A$，$\sum\limits_{i=1}^n\frac{b_i^2}{a_i+b_i}=B$，

则 $A-B=\sum\limits_{i=1}^n\frac{a_i^2-b_i^2}{a_i+b_i}=\sum\limits_{i=1}^n(a_i-b_i)$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}b_i=0,$$

$$A+B=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2+b_i^2}{a_i+b_i}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i+b_i)^2}{2(a_i+b_i)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i,$$

故 $2A\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i,A\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i$，不等式成立.

例 11 （第 24 届全苏竞赛题）已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，求证：$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}$.

证明 记

$$A=\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1},B=\frac{a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_1^2}{a_n+a_1},$$

则 $$A-B=\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2-a_1^2}{a_n+a_1}$$

$$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_1)=0,$$

$$A+B=\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}$$

$$\geqslant\frac{(a_1+a_2)^2}{2(a_1+a_2)}+\frac{(a_2+a_3)^2}{2(a_2+a_3)}+\cdots+\frac{(a_n+a_1)^2}{2(a_n+a_1)}$$

$$=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}+\cdots+\frac{a_n+a_1}{2}=1,$$

故 $2A\geqslant1,A\geqslant\frac{1}{2}$，不等式成立.

例 12 （第 36 届 IMO 试题）设 a,b,c 为正实数，且 $abc=1$，求证：$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$.

证明 设

$$A=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)},B=\frac{a(b+c)}{4}+\frac{b(c+a)}{4}+\frac{c(a+b)}{4},$$

则 $$A+B=[\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{a(b+c)}{4}]+[\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{b(c+a)}{4}]+[\frac{1}{c^3(a+b)}+\frac{c(a+b)}{4}]$$

$$\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

又因为 $abc=1$，所以 $B=\frac{1}{4}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+\frac{1}{4}(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+\frac{1}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$.

因此 $A\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-B=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}$.

例 13 （1993 年全国高中数学联赛题）实数 x,y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$，设 $s=x^2+y^2$，则 $\frac{1}{s_{\max}}=$________.

解 设 $x^2+y^2=t$，则视 x,y 为一组数据，由方差公式，得

$$s^2=\frac{1}{2}[(x^2+y^2)-2\cdot(\frac{x+y}{2})^2]$$

$$=\frac{1}{2}[(x^2+y^2)-\frac{x^2+2xy+y^2}{2}]$$

$$=\frac{(x^2+y^2)-2xy}{4}=\frac{t-2xy}{4} \quad ①$$

因 $4x^2-5xy+4y^2=5$，

则 $5xy=4(x^2+y^2)-5$.

从而 $xy=\frac{4}{5}(x^2+y^2)-1=\frac{4}{5}t-1$，代入①中，得

$$s^2=\frac{t-\frac{8}{5}t+2}{4}=\frac{-3t+10}{20}\geqslant 0,$$

故 $3t-10\leqslant 0$，即得 $t\leqslant\frac{10}{3}$，

即 $s_{\max}=\frac{10}{3}$，从而 $\frac{1}{s_{\max}}=\frac{3}{10}$.

例 14 （新加坡数学竞赛题）求函数 $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}$ 的最大值.

解 视 $\sqrt{1+\sin x}$、$\sqrt{1-\sin x}$ 为一组数据，则由方差公式，得

$$s^2=\frac{1}{2}[(\sqrt{1+\sin x})^2+(\sqrt{1-\sin x})^2-2(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{2})^2]$$

$$=\frac{1}{2}[1+\sin x+1-\sin x-\frac{(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})^2}{2}]$$

$$=1-\frac{1}{4}(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})^2\geqslant 0,$$

故 $(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})^2\leqslant 4$，

即 $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\leqslant 2$，

因此 $y_{\max}=2$.

例 15 已知 $a>0,b>0$，且 $a+b=1$. 求证：$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geqslant\frac{25}{2}$.

证明 因为 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geqslant 2(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$，

据已知条件 $a+b=1$，或知 $a,\frac{1}{2},b$ 成等差数列，于是可设

$$a=\frac{1}{2}+d,b=\frac{1}{2}-d,$$

其中 $|d|<\frac{1}{2}$，代入上式右边，整理得

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geqslant\frac{8d^4+12d^2+\frac{25}{2}}{1-4d^2}\geqslant\frac{\frac{25}{2}}{1-4d^2}\geqslant\frac{25}{2}.$$

例 16　已知 $x^2+y^2=25$，求函数 $t=\sqrt{18y-6x+50}+\sqrt{8y+6x+50}$ 的最大值.

解　此题中，仔细观察已知式中的"25"与函数式中根号内的"50"的关系：$50=25+25$ 及 $25=x^2+y^2$，这样就启发了我们将"50"换成"25+25"，将其中的一个"25"用"x^2+y^2"代替，就可以得到如下的解法.

此时，由原函数式 $t=\sqrt{8y+6x+50}+\sqrt{8y-6x+50}$ 可构造得函数

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+8y+6x+25}+\sqrt{x^2+y^2+8y-6x+25}$$
$$=\sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2},$$

上式表示圆 $x^2+y^2=25$ 上的动点 $P(x,y)$ 到此圆上的定点 $A(-3,-4)$ 及 $B(3,-4)$ 的距离之和. 求 t 的最大值，转化为求 $\triangle APB$ 的周长的最大值. 易知当 $\triangle APB$ 为等腰三角形时，其周长最大，这时 P 点的坐标为 $(0,5)$，即 $x=0,y=5$ 时，$t_{\max}=6\sqrt{10}$.

例 17　求函数 $y=x-3+\sqrt{10-9x^2}$ 的最大值.

解　由于 $y=x-3+\sqrt{10-9x^2}$ 可变为

$$y=-3+\frac{1}{3}\cdot 3x+\sqrt{10-9x^2},$$

取　$f(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x+\sqrt{10-9x^2}$，

且　$(3x)^2+(\sqrt{10-9x^2})^2=10$，

构造向量　$\vec{a}=(\frac{1}{3},1)$，

$\vec{b}=(3x,\sqrt{10-9x^2})$，由向量公式 $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ 可得

$$f(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x+\sqrt{10-9x^2}$$
$$\leqslant\sqrt{(\frac{1}{3})^2+1^2}\cdot\sqrt{(3x)^2+(\sqrt{10-9x^2})^2}$$
$$=\frac{10}{3},$$

从而　$y\leqslant-3+\frac{10}{3}=\frac{1}{3}$，当且仅当 $\frac{\sqrt{10-9x^2}}{3}=3x$，即 $x=\frac{1}{3}$ 时，$y_{\max}=\frac{1}{3}$.

例 18　若 $x、y、z\in\mathbf{R}^+$，且 $x+y+z=1$，n 是正整数，求证：

$$\frac{x^4}{y(1-y^n)}+\frac{y^4}{z(1-z^n)}+\frac{z^4}{x(1-x^n)}\geqslant\frac{3^n}{3^{n+2}-9}. \quad (*)$$

证明　由已知条件知 $1-x^n>0,1-y^n>0,1-z^n>0$.

构造向量

$$\vec{a}=(\frac{x^2}{\sqrt{y(1-y^n)}},\frac{y^2}{\sqrt{z-(1-z^n)}},\frac{z^2}{\sqrt{x(1-x^n)}}),$$

$\vec{b}=(\sqrt{y(1-y^n)},\sqrt{z-(1-z^n)},\sqrt{x(1-x^n)})$.

由 $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leqslant|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$，得

$(x^2+y^2+z^2)^2$

$$\leqslant\left[\frac{x^4}{y(1-y^n)}+\frac{y^4}{z(1-z^n)}+\frac{z^4}{x(1-x^n)}\right]\cdot[y(1-y^n)+z(1-z^n)+x(1-x^n)].$$

所以$\frac{x^4}{y(1-y^n)}+\frac{y^4}{z(1-z^n)}+\frac{z^4}{x(1-x^n)}$

$$\geqslant\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x+y+z)-(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})}$$

$$\geqslant\frac{\left[3\cdot\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2\right]^2}{(x+y+z)-3\cdot\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n+1}}$$

$$=\frac{\left[3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^2}{1-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}=\frac{3^n}{3^{n+2}-9}.$$

注 在不等式(*)中,若取 $n=1$,即得:

$$\frac{x^4}{y(1-y)}+\frac{y^4}{z(1-z)}+\frac{z^4}{x(1-x)}\geqslant\frac{1}{6}.$$

(《上海中学数学》1993(2)数学问题 1)

在不等式(*),若取 $n=2$,即得:

$$\frac{x^4}{y(1-y^2)}+\frac{y^4}{z(1-z^2)}+\frac{z^4}{x(1-x^2)}\geqslant\frac{1}{8}.$$

(《数学通报》1994(11)数学问题 921)

例 19 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为实数,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=A(A>0)$,$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{A^2}{n-1}(n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$,求证:$0\leqslant a_k\leqslant\frac{2A}{n}.(k=1,2,\cdots,n)$

证明 构造重要不等式如下:

$$\frac{A-a_1}{n-1}\cdot a_2\leqslant\frac{1}{2}\left[\left(\frac{A-a_1}{n-1}\right)^2+a_2^2\right],$$

$$\frac{A-a_1}{n-1}\cdot a_3\leqslant\frac{1}{2}\left[\left(\frac{A-a_1}{n-1}\right)^2+a_3^2\right],$$

$\cdots$

$$\frac{A-a_1}{n-1}\cdot a_n\leqslant\frac{1}{2}\left[\left(\frac{A-a_1}{n-1}\right)^2+a_n^2\right].$$

将上述$(n-1)$个同向不等式相加得:

$$\frac{A-a_1}{n-1}(a_2+a_3+\cdots+a_n)\leqslant\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n-1}{(n-1)^2}\right)(A-a_1)^2+a_2^2+a_3^2+\cdots a_n^2\right],$$

即$\frac{(A-a_1)^2}{n-1}\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{(A-a_1)^2}{n-1}+\frac{A^2}{n-1}-a_1^2\right]\Rightarrow na_1^2-2a_1A\leqslant0\Rightarrow0\leqslant a_1\leqslant\frac{2A}{n}.$

同理可求得 $0\leqslant a_k\leqslant\frac{2A}{n}(k=1,2,\cdots,n)$.

3. 构造辅助图形

例 20 (第 9 届“希望杯”赛培训题)棱锥 P-ABC 中,$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90^\circ$,$D$ 为底面

ABC内一点，$\angle APD=45^\circ$，$\angle BPD=60^\circ$，求$\angle CPD$的余弦值.

解 构建长方体如图4-1，直线PD_1是长方体的对角线，故有$\cos^2\angle APD+\cos^2\angle BPD+\cos^2\angle CPD=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1$，从而得$\cos^2\angle CPD=\frac{1}{4}$，则$\angle CPD$的余弦值为$\frac{1}{2}$.

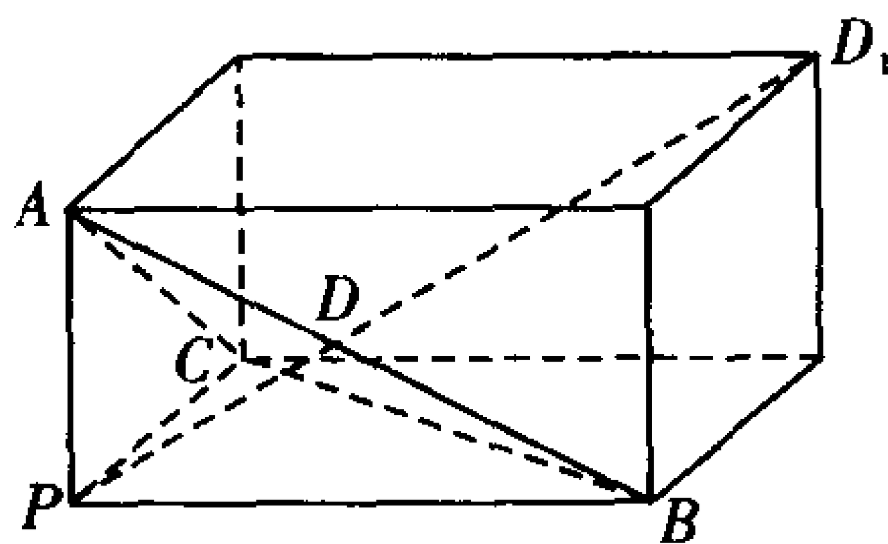


图4-1

例21 （2002年安徽省竞赛题）甲乙二人相约10天之内在某地会面，约定先到的人等候另一个人，经过3天以后方可离开. 若他们在限期内到达目的地是等可能的，则此二人会面的概率为______.

解 填$\frac{51}{100}$. 理由：设甲、乙二人分别在第x、y天到达某地，$0\leqslant x\leqslant 10$，$0\leqslant y\leqslant 10$，他们会面的充要条件是$|x-y|\leqslant 3$，则点(x,y)分布在如图4-2正方形$OABC$内，其基本事件S_1为介于两直线$x-y=\pm 3$之间的阴影内.

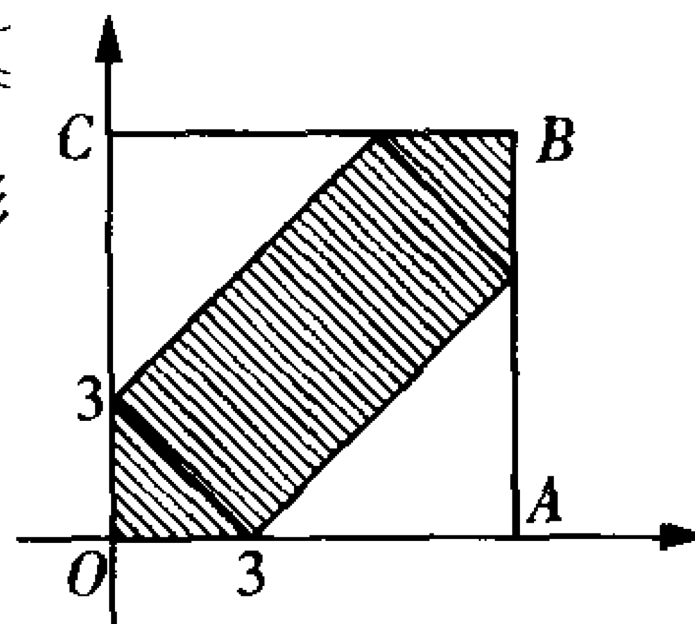


图4-2

故所求概率为$P=\frac{100-(10-3)^2}{100}=\frac{51}{100}$.

例22 异面直线a、b，$a\perp b$，c与a成30°角，求c与b所成角θ的范围.

解 构建圆锥如图4-3：母线为c，高为a，且c与a成30°角，轴截面$PAB\perp$轴截面PCD，且$AB/\!/b$，可得$CD\perp AB$，$AB\perp$轴截面PCD，则c与b所成角θ就是母线c与平行于AB的线所成的角.

当c在PA位置时，因$\angle OPA=30^\circ$，则$\angle PAO=\theta=60^\circ$，此时$\sin\angle PAO=\frac{a}{c}$.

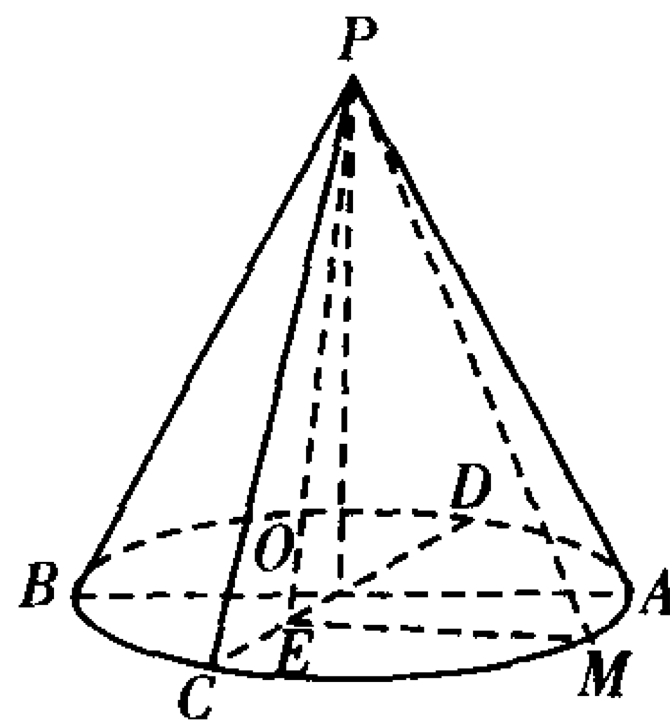


图4-3

当c由PA位置按顺时针转向PM时，过M作$ME/\!/AB/\!/b$，交CD于E得$ME\perp CD$，$\angle PME=\theta$，$\sin\angle PME=\frac{PE}{c}>\frac{PO}{c}=\frac{a}{c}=\sin\angle PAO$.

得$\angle PME>\angle PAO=60^\circ$，即$\theta>60^\circ$.

当c在PC位置时，$CO\perp AB$，由三垂线定理得$c\perp a$，$\theta=90^\circ$，故c与b所成角θ的范围是$[60^\circ,90^\circ]$.

例23 （第31届IMO中国集训队训练题）设$x,y,z\in\mathbf{R}$，$0<z<y<x<\frac{\pi}{2}$，求证：$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$.

证明 由二倍角公式得

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$$

$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}+\sin x\cos y+\sin y\cos z>\sin x\cos x+\sin y\cos y+\sin z\cos z,$$

即证$\frac{\pi}{4}>\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cos z$. 由右端构造一原点为圆心的单位圆，如图4-4，$(\cos x,\sin x)$，$(\cos y,\sin y)$，$(\cos z,\sin z)$为单位圆上三个点，分别过此三点作$x$轴、$y$轴的垂线得三个矩形，而右端为其三个矩形面积之和，它显然小于$\frac{\pi}{4}$.

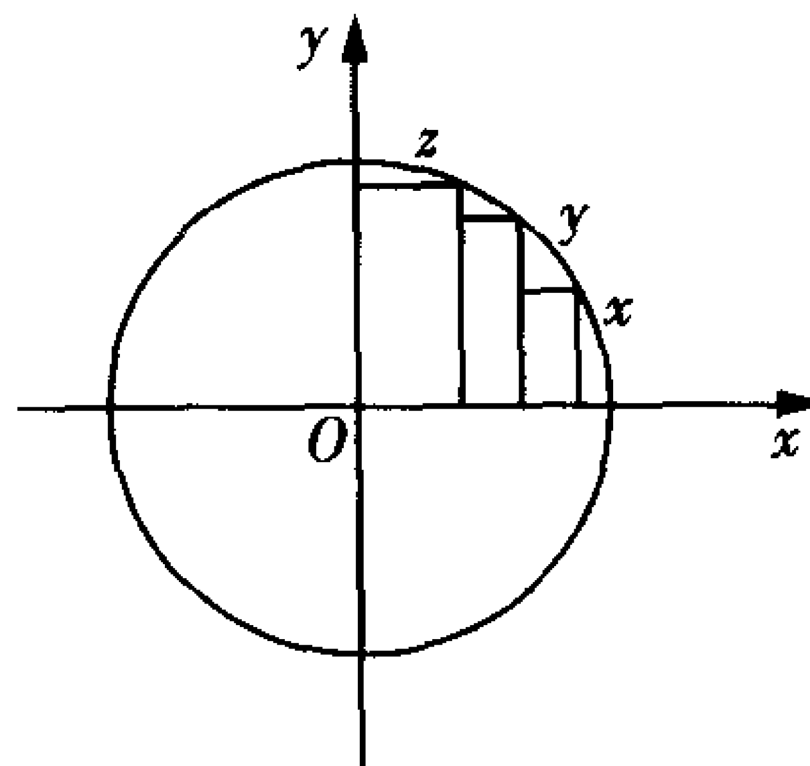


图4-4

4. 构造数学模型

数学模型是由数字、字母或其他数学符号组成的，它可以描述现实对象的数学属性、数量规律等的公式、图形或算法. 实际上，数学的概念、公式、定理、问题、方法等数学知识都是由具体问题抽象出其物质性质而得到的纯粹形式化或量化的数学模型.

构造数学模型的内涵是很丰富的，前面的构造法也都可以看成是构造数学模型.

构造数学模型是通过建立模型来揭示客体的形态、特征和本质的方法. 由于客体的复杂性，所构模型虽不都能作为反映客体一切特征的替代物，但它可以刻画客体的部分特征，使我们从某些侧面来认识客体.

例 24 （2002 年武汉市部分学校高考模拟题）设 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$，A 与 B 是 I 的子集，若 $A\cap B=\{1,3,5\}$，则称 (A,B) 为“理想配集”，所有“理想配集”的个数是(   ).

A. 9　　　　B. 6

C. 27　　　　D. 8

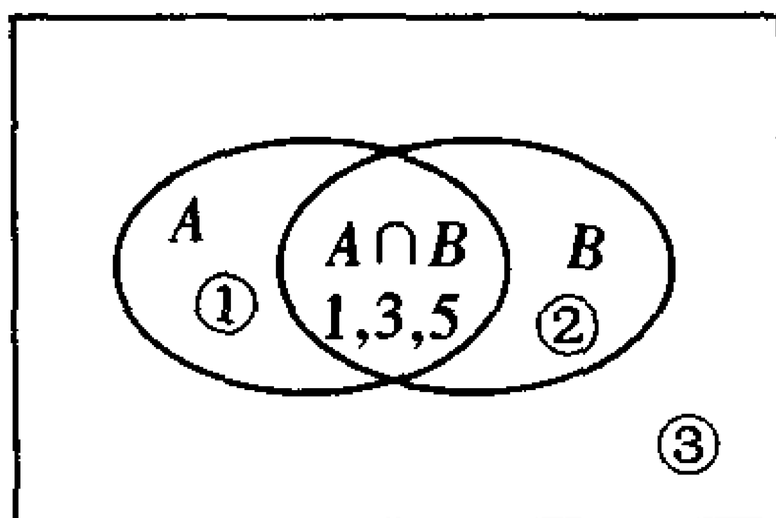


图 4－5

解 选 C. 理由：我们可以建立这样的数学模型：如图 4－5，设 $A\cap(\complement_I B)$ 为邮箱①，$(\complement_I A)\cap B$ 为邮箱②，$\complement_I(A\cup B)$ 为邮箱③，且元素 $1,3,5\in(A\cap B)$，设元素 2，4，6 为三封信，则问题又转化为“把三封信投入到三个邮箱共有多少种投法”的问题. 由乘法原理共有 $C_3^1\times C_3^1\times C_3^1=27$ 种，即所有“理想配集”的个数是 27.

例 25 某中学准备组建一个 18 人的足球队，这 18 人由高一年级 10 个班的学生组成，每个班级至少一个，名额分配方案共有______种.

解 填 24310. 理由：构造一个隔板模型，取 18 个相同的小球排成一列，用 9 块隔板将 18 个小球分隔成 10 个区间，第 $i(1\leqslant i\leqslant 10)$ 个区间的小球数对应第 i 个班级学生的名额，因此，名额分配方案的种数与隔板的插入数相等. 因隔板插入数为 C_{17}^9，故名额分配方案共有 $C_{17}^9=24310$ 种.

例 26 （2002 年全国高中联赛加试第三题，见第 3 章例 22）在世界杯足球赛前，F 国教练为了考察 $A_1,A_2,\cdots,A_7$ 这七名队员，准备让他们在三场训练赛中（每场 90 分钟）都上场. 假设在比赛的任何时刻，这些队员有且只有一个在场上，且 A_1,A_2,A_3,A_4 每人上场的总时间（以分钟为单位）均能被 7 整除，A_5,A_6,A_7 每人上场的总时间（以分钟为单位）均能被 13 整除. 如果每场换人次数不限，那么按每名队员上场的总时间计算，共有多少种不同的情况？

解 构造不定方程模型. 设第 i 名队员上场的时间为 $x_i(i=1,2,\cdots,7)$，问题即为求不定方程 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_7=270$　⊗，在条件 $7\mid x_i(1\leqslant i\leqslant 4)$，$13\mid x_i(5\leqslant i\leqslant 7)$ 下的正整数解的组数. 若 $(x_1,x_2,\cdots,x_7)$ 是满足条件的一组正整数解，则应有 $\sum\limits_{i=1}^{1}x_i=7m$，$\sum\limits_{i=5}^{7}x_i=13n$，$(n,m\in\mathbf{N}^*)$，于是 n,m 即是不定方程 $7m+13n=270$，$(m\geqslant 4,n\geqslant 3)$ 的一组正整数解，由不定方程的理论可求得 $7m+13n=270$，满足条件的三组正整数解有

$$\begin{cases}m=33\\n=3\end{cases},\quad\begin{cases}m=20\\n=20\end{cases},\quad\begin{cases}m=7\\n=17\end{cases}.$$

1）在 $m=33,n=3$ 时，显然 $x_5=x_6=x_7=13$ 仅有一种可能；设 $x_i=7y_i(i=1,2,3,4)$，于是，由不定方程 $y_1+y_2+y_3+y_4=33$ 有 $C_{32}^3=4960$ 组正整数解，可知⊗式有 4960 组正整数.

2）$m=20,n=10$ 时，同样可求得原方程的正整数解组数为 $C_{19}^3\cdot C_9^2=34884$.

3）$m=7,n=17$ 时则有 $C_6^3\cdot C_{16}^2=2400$.

从而原方程的正整数解的组数为 $4960+34884+2400=42244$.

5. 构造实际例子

例 27 （2001年世界城际间数学联赛题）某公司，总工资的9/10为1/10的员工所得，该公司下属有若干部门. 问有没有可能在每部门内，任何1/10的员工，所得工资不超该部门总工资的10%？

解 命题可能成立，也可能不成立. 举例说明：

设此公司有100名员工，其中10名员工每人工资为81元，其余员工每人1元，则总工资为 $10\times81+90\times1=900$ 元，其9/10恰为1/10的员工所得.

下面将员工分部门（任取两种情况）：

(i)每10人为一部门，每个部门中各员工工资相同，则易知命题成立；

(ii)每10人为一部门，其中工资为81元的员工分别属于不同的部门，则 $\frac{81}{81+9}=\frac{9}{10}>\frac{11}{100}$，命题不成立.

例 28 （2001年世界城际间数学联赛题）西洋棋盘上有一个黑子和一个白子，每步可将一个棋子横行或直行到一个相邻的空格. 要求移动这两个棋子，使它们所有可能的位置各出现仅一次. 问这目的能否达到？

(a)如两个棋子必须梅花间地轮流移动；

(b)如无须这样来.

解 根据题设条件，对于(a)、(b)都可以.

如图4-6，在8×8棋盘存在一环路，使每格走且仅走一次（如虚线所示）.

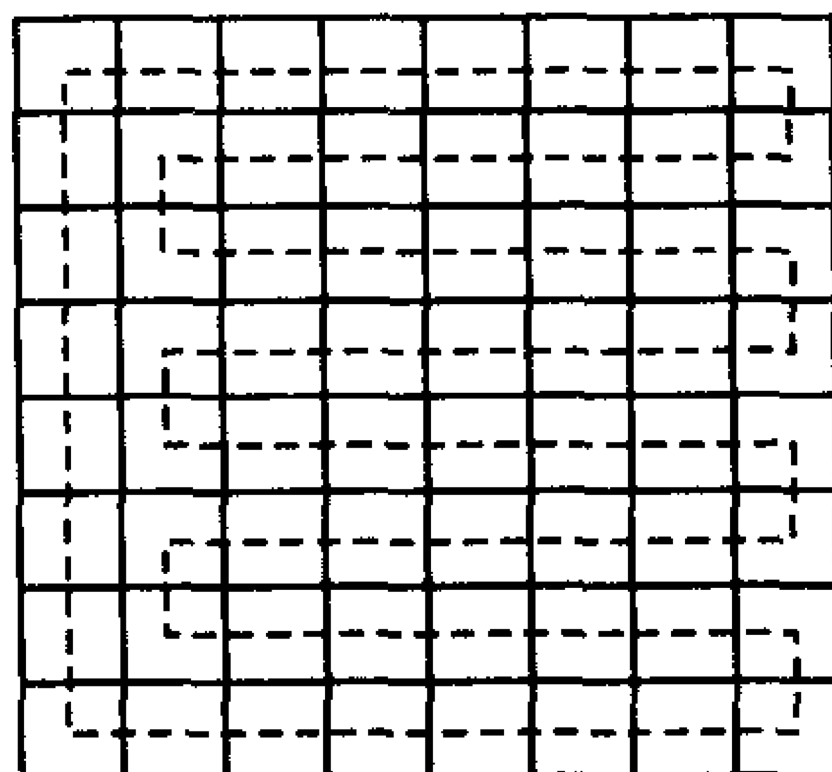


图4-6

一黑子、一白子可在环路上的任意位置，沿此环路的任一方向，前面的棋子先走，后面的棋干后跟，如(a)、(b)方式都可以达到目的.

例 29 （2001年世界城际间数学联赛题）一个凸多边形被只在顶点相交的对角线分割为三角形，每顶点标记着它所属的三角形数量. 如将所有的对角线擦掉. 问能不能仅用这些标记将对角线重新划出来？

解 根据题设条件可以用这些标记将对角线重新划出来. 理由：设凸 n 边形被 x 条对角线分割为 y 个三角形. 因为所有三角形的内角和之和等于凸 n 边形的内角和，即 $y\cdot180°$. 所以，$y=n-2$.

因为每条对角线恰为两个相邻三角形的公共边，则所有三角形的边数之和为 $n+2x$. 又因为共有 $(n-2)$ 个三角形，所以 $x=n-3$.

因凸 n 边形的 n 个边被分到 $(n-2)$ 个三角形中，知至少有2个三角形，其中每个三角形恰包含凸 n 边形的2个边. 故存在标1的顶点.

对标1的顶点 A（其邻顶点为 B、C），可知其无对角线连出，否则其标记大于1. 因每个三角形的边由凸 n 边形的边及对角线组成，所以，A 所属的三角形的边为 AB、AC 及对角线 BC.

综上，对角线的恢复方法为：

对任一标1的顶点 A，先将其两相邻顶点 B、C 连对角线，再将 B、C 上的标记都减去1，去掉顶点 A 及 AB、AC，将 BC 看作凸 $(n-1)$ 边形的边；继续上述步骤，直至将 $(n-3)$ 条对角线全找出.

6. 构造原理中介

在日常生活与学习中，有许多明显的事实，诸如三本书放到2个轴屉中去，至少有一个抽屉中有2本书，水总是由高处流向低处等，均蕴含着深刻的数学背景．一旦我们发掘与抽象，便成为有用的数学解题原理方法：例如磨光原理、抽屉原理、最小数原理、归纳法原理、对偶性原理等等．因此，为了能应用上这些原理解题，有时需要构造原理中介，诸如抽屉构造、归纳构造等等．

例 30 从自然数集$\{1,2,3,4,\cdots,100\}$中，随意选出51个数来．求证：其中一定有两个数，它们中的某一个是另外一个的整数倍．

证明 首先注意，一个正整数要么本身是一个奇数，要么是一个偶数．若是一个偶数时，则经过反复地提取因数"2"，最后总能表示为：奇数$\times 2^l$（其中$l=1,2,3,\cdots$）的形式，并且，这个奇数绝不会超过原数的一半．如果容许$l=0$，那么奇数也被包括在上述一般形式之中．

现在，将1到100的全部整数，分成下面的50个集合：

$A_1=\{1,1\times 2,1\times 2^2,1\times 2^3,1\times 2^4,1\times 2^5,1\times 2^6\}$，

$A_2=\{3,3\times 2,3\times 2^2,3\times 2^3,3\times 2^4,3\times 2^5\}$，

$A_3=\{5,5\times 2,5\times 2^2,5\times 2^3,5\times 2^4\}$，

$A_4=\{7,7\times 2,7\times 2^2,7\times 2^4\}$，

…

$A_{25}=\{49,49\times 2\}$，

$A_{26}=\{51\}$，

…

$A_{50}=\{99\}$．

很明显，$1,2,\cdots,100$这一百个整数没有遗漏地被放了这50个集合（抽屉），并且，同一个数字不会出现在两个不同的集合中．因此，不论用何种方式从中取出51个数时，必然有至少两个数是出自同一集合的（抽屉原理），而同一集合中的两数，大数必定是小数的倍数．

例 31 （2004年中国数学奥林匹克题）M是平面上n个点组成的集合，满足：

(1)M中存在7个点是一个凸七边形的7个顶点；

(2)对M中任意5个点，若这5个点是一个凸五边形的5个顶点，则此凸五边形的内部至少含有M中的个点．

求n的最小值．

解 先证$n\geqslant 11$．

设顶点在M中的一个凸七边形为$A_1A_2\cdots A_7$，连结A_1A_5．由条件(2)知，在凸五边形$A_1A_2A_3A_4A_5$中至少有M中一个点，记为P_1．连结P_1A_1、P_1A_5，则在凸五边形$A_1P_1A_5A_6A_7$内至少有M中一个点，记为P_2，且P_2异于P_1．连结P_1P_2，则$A_1,A_2,\cdots,A_7$中至少有5个顶点不在直线P_1P_2上．由抽屉原理知，在直线P_1P_2的某一侧必有3个顶点，这3个顶点与点P_1、P_2构成的凸五边形内，至少含有M中一个点P_3．

再作直线P_1P_3、P_2P_3．令直线P_1P_2对应区域Π_3，它是以直线P_1P_2为边界且在$\triangle P_1P_2P_3$异侧的一个半平面（不含直线P_1P_2）．类似地定义区域Π_1、Π_2．这样，区域Π_1、Π_2、Π_3覆盖了平面上除$\triangle P_1P_2P_3$外的所有点．由抽屉原则知，7个顶点$A_1,A_2,\cdots,A_7$中必有$\left[\frac{7}{3}\right]+1=3$个顶点在同一区域（不妨设为$\Pi_3$）中．这3个点与$P_1$、$P_2$构成一个顶点在$M$中的凸五边形，故其内部至少含$M$中一

个点 P_4. 所以, $n\geqslant 11$.

下面构造一个例子说明 $n=11$ 是可以的.

如图 4－7 所示, 凸七边形 $A_1A_2\cdots A_7$ 为一整点七边形, 设点集 M 为 7 个顶点 $A_1,A_2,\cdots,A_7$ 且其内部有 4 个整点. 则显然满足条件(1). 这个点集 M 也满足条件(2), 证明如下.

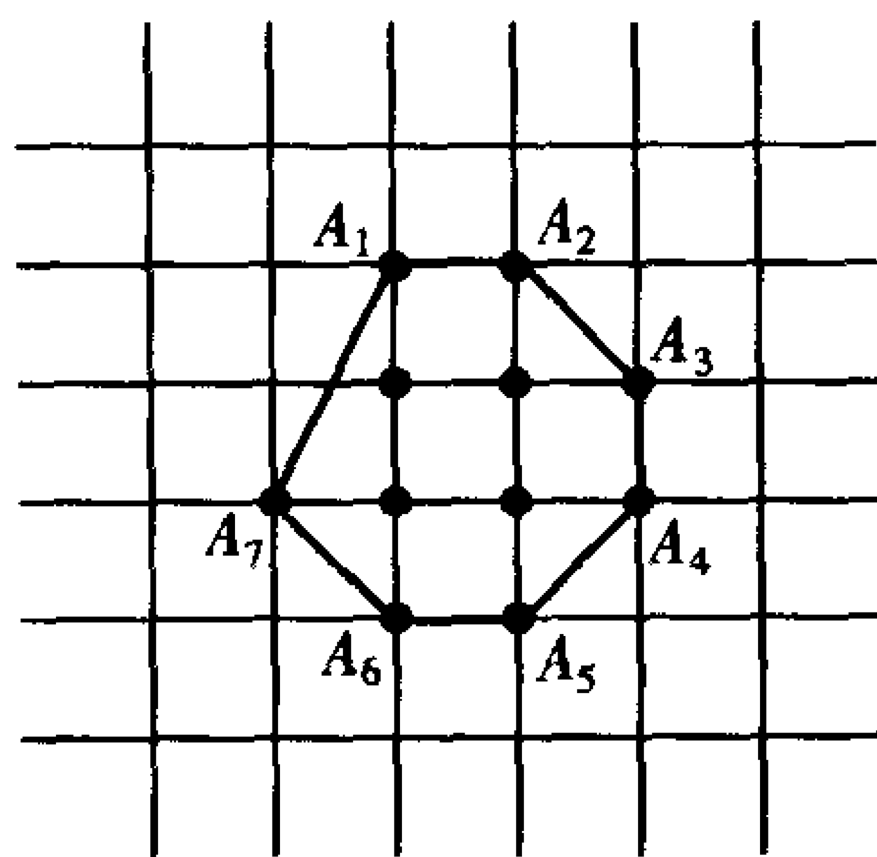


图 4－7

假设存在一个整点凸五边形, 其内部不含整点. 因整点多边形的面积均可表示为 $\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$ 的形式, 由最小数原理, 必有一个面积最小的内部不含整点的整点凸五边形 $ABCDE$. 考虑顶点坐标的奇偶性, 只有 4 种情况: (奇, 偶), (偶, 奇), (奇, 奇), (偶, 偶). 从而, 五边形 $ABCDE$ 的顶点中必有两个顶点的坐标的奇偶性完全相同. 于是, 它们连线的中点 P 仍为整点. 又 P 不在凸五边形 $ABCDE$ 内部, 因此, P 在凸五边形的某条边上. 不妨设 P 在边 AB 上, 则 P 为 AB 的中点. 连结 PE, 则 $PBCDE$ 是面积更小的内部不含整点的整点凸五边形. 矛盾.

综上所述, n 的最小值为 11.

例 32 如果一个正整数的质因数分解中, 每个质约数的幂次都大于 1, 则称这个整数为好数. 例如, $3^2\times5^4$, $2^3\times7^5$ 是好数, 而 3×5, $2^2\times13$ 则不是好数. 证明: 有无穷对相继的好数.

证明 我们归纳构造出无穷对相继的好数 $a_1,a_1+1;a_2,a_2+1,\cdots,a_n,a_n+1;\cdots$.

因为 $8=2^3$, $9=3^2$, 显然是一对相继的好数, 故可取 $a_1=8$. 假设 a_n 已作出 $(n\geqslant1)$, 即 a_n,a_n+1 都是好数. 下面来作出 a_{n+1}.

由于递推的基础是恒等式 $(2a_n+1)^2-4a_n(a_n+1)=1$. (＊)

因为 $(2a_n+1)^2$ 为完全平方数, 它当然是好数. 又已归纳假设了 a_n,a_n+1 都是好数, 所以两者的乘积也是好数. 故 $4a_n(a_n+1)$ 是好数. 等式(＊)表明 $(2a_n+1)^2$ 和 $4a_n(a_n+1)$ 是两个相继的好数. 从而可取 $a_{n+1}=4a_n(a_n+1)$. 这就完成了归纳构造.

不难算出, 我们作出的前三对相继的好数为 8, 9; 288, 289; 332928, 332929.

注 归纳构造是针对命题具有形式: 已知 A, 证明对每个正整数 $n\geqslant l$(l 是固定正整数), 都存在具有"某种性质"的"事物" $P(11)$, 使得"某件事情发生", 或者已知 A, 证明存在无穷个"具有某种性质"的"事物", 使得"某件事件发生".

例 33 (2001 年 IMO 中国国家队集训选拔赛题) 对给定的正整数 a、b, $b>a>1$, a 不能整除 b 及给定的正整数数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足对所有正整数 n 有 $b_{n+1}\geqslant 2b_n$. 是否总存在正整数数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得对所有正整数 n, 有 $a_{n+1}-a_n\in\{a,b\}$, 且对所有正整数 m、l(可以相同), 有 $a_m+a_l\notin\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$?

解 答案是肯定的. 我们采用归纳构造来证.

取 a_1 为正整数, 使 $2a_1\notin\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_1>b-a$(如 $b_{n_0}>b-a+1$, 取 $a_1=b_{n_0}-1$ 即可).

假设已取 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 使得

$a_{i+1}-a_i\in\{a,b\}$, $a_m+a_l\notin\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(1\leqslant m\leqslant k, 1\leqslant l\leqslant k)$. 考虑

(Ⅰ) $a_1+a_k+a, a_2+a_k+a,\cdots,a_k+a_k+a, 2a_k+2a$;

(Ⅱ) $a_1+a_k+b, a_2+a_k+b,\cdots,a_k+a_k+b, 2a_k+2b$.

假设(Ⅰ)中有 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的项 b_u, (Ⅱ)中有 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的项 b_v. 由于

$2a_k+2b<2(a_1+a_k+a)$

及 $a_1+a_k+a\leqslant a_u, b_v\leqslant 2a_k+2b$,

故 $b_u=b_v$.

又 $b_u=b_v\leqslant 2a_k+2a\leqslant 2a_k+2b$,

从而,存在 $1\leqslant j\leqslant k-1$,使

$b_v=a_j+a_k+b$.

情形1 $b_u=a_i+a_k+a, 1\leqslant i\leqslant k$.

此时,$a_i-a_j=b-a>0$. 由归纳假设知

$a_i-a_j=ca+db$, c、d 为非负整数.

这样,$ca+db=b-a$.

因此,$d=0, b=(c+1)a$,与 a 不能整除 b 矛盾.

情形2 $b_u=2a_k+2a$.

此时,$a_k-a_j=b-2a$. 由 $1\leqslant j\leqslant k$ 及归纳假设知

$a_k-a_j=c'a+d'b$, c'、d' 为非负整数.

这样,$c'a+d'b=b-2a$.

因此,$d'=0, b=(c'+1)a$,矛盾.

故(Ⅰ)或(Ⅱ)中不含 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的项.

由此可取 $a_{k+1}=a_k+a$ 或 a_k+b 使得

$a_{k+1}+a_i\notin\{b^n\}_{n=1}^{\infty}, 1\leqslant i\leqslant k+1$.

命题得证.

【解题尝试】

A组

1. 设 a,b,c 为三角形的三边,求证:$\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}>\dfrac{c}{1+c}$.

2. (《数学通报》问题1023题)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为实数,$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为正整数,则有

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{y_n}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\cdots x_n)^2}{y_1+y_2+\cdots+y_n}\quad(*)$$

3. (《数学通报》问题925题)设 $a_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2)$, $S=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2}{S-a_i}\geqslant\dfrac{S}{n-1}$.

4. 采用构造二次函数证明例12.

5. (第20届IMO试题)已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为各不相同的正整数,求证:$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{k^2}\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

6. (1991年亚太地区竞赛题)设 $a_i,b_i\in\mathbf{R}^+$, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$,求证:$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2}{a_i+b_i}\geqslant\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

7. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ 且 $2c>a+b$,求证:$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$.

8. 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{7x-3}}{x}$, $x\in\left[\dfrac{1}{2},3\right]$的最小值.

9. 求证：$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

10. (《数学通报》问题 839 题)若 α、β、γ 为锐角，且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. 求证：$\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geqslant\frac{3}{2}$.

11. (《数学通报》问题 845 题)已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. 求证：
$$\frac{x_1^2}{1-x_1}+\frac{x_2^2}{1-x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{1-x_n}\geqslant\frac{1}{n-1}.$$

12. 求证：$-4\leqslant\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}\leqslant 1$.

13. 从 6 对老搭档运动员中选派 5 名出国参赛，要求被选的运动员任意两名都不是老搭档，求有多少种不同的选派方法？

14. 求 $y=x+1-\sqrt{-x^2+2x}$的最小值.

15. 设 x、y、$z\in\mathbf{R}^+$，λ、μ、v 是不全为零的非负实数，则
$$\frac{x^2}{\lambda x+\mu y+vz}+\frac{y^2}{\lambda y+\mu z+vx}+\frac{z^2}{\lambda z+\mu x+vy}\geqslant\frac{x+y+z}{\lambda+\mu+v}. \qquad (*)$$

16. (2001 年世界城际间竞赛题)乙要猜甲的一个两位数，如两个数字全对，或一个对而另一个和正确数字相差为 1，甲说“近”，否则说“远”. 例如，甲的数是 65，如乙猜 65，64，66，55 或 75，甲说“近”，否则说“远”.
(a)求证：乙不能仅猜 18 次，便保证能知道甲的数；
(b)替乙找出一个仅猜 24 次的方法，保证能知道甲的数；
(c)有没有一个仅猜 22 次的方法？

17. (《数学通报》问题 1522 题)正整数 $n>1$，$f(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$，求证：$\frac{2n}{3n+1}<f(n)<\frac{25}{36}$.

18. (《数学通报》问题 1490 题)$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}_+$. 求证：
$$\left(1-\frac{1+2+\sqrt{2}}{2^3+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1+2+3+\sqrt{2}}{3^3+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1+2+3+\cdots+n+\sqrt{2}}{n^3+1}\right)>\frac{1}{\sqrt{5n}}.$$

19. (《中等数学》2004 年 4 期奥林匹克问题 137)试求出同时满足下列条件的集合 S 的元素个数的最大值：
(1)S 中的每个元素都是不超过 100 的正整数；
(2)对于 S 中的任意两个不同的元素 a、b，都存在 S 中的另外一个元素 c，使得 $a+b$ 与 c 的最大公约数等于 1；
(3)对于 S 中的任意两个不同的元素 a、b，都存在 S 中的另外一个元素 c，使得 $a+b$ 与 c 的最大公约数大于 1.

20. (《数学通报》问题 1518 题)数列$\{a_n\}$恰有 2003 项，每一项是正整数，且满足：
(1)$\{a_n\}$的任意一项都小于 100；
(2)$\{a_n\}$的任意连续项之和都不等于 100. 记 $S=\sum\limits_{i=1}^{2003}a_i$，试求 S 的最小值.

B 组

1. (2003 年全国高考题)已知常数 $a>0$，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=4a$，O 为 AB 之中点，点 E、

F、G 分别在 BC、CD、DA 上移动，且$\frac{BE}{BC}=\frac{CE}{CD}=\frac{DC}{DA}$，P 为 GE 与 OF 的交点(如图 1)，问：是否存在两个定点，使 P 点到这两个定点的距离和为定值？若存在，求出这两点的坐标及此定值；若不存在，请说明理由.

2. 若 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$同号，$a_1+a_2+\cdots+a_n=a$，n、$k>1$，

求证：$\frac{a_1+}{ka-a_1}+\frac{a_2}{ka-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{ka-a_n}\geqslant\frac{n}{kn-1}$.

3. (第 31 届 IMO 预选题)设 a,b,c,d 是满足 $ab+bc+cd+da=1$ 的非负实数，试证：

$L=\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}$.

4. (2002 年全国女子数学奥林匹克题)夏令营有 $3n$(n 是正整数)位女同学参加，每天都有 3 位女同学担任值勤工作. 夏令营结束时，发现这 $3n$ 位女同学中的任何两位，在同一天担任值勤工作恰好是一次.

(1)问：当 $n=3$ 时，是否存在满足题意的安排？证明你的结论；

(2)求证：n 是奇数.

5. (2002 年保加利亚国家数学奥林匹克(决赛)题)求所有正整数对(b,c)，使得数列 $a_1=b,a_2=c,a_{n+2}=|3a_{n+1}-2a_n|(n\geqslant1)$，只有有限个合数.

6. (第 26 届俄罗斯数学奥林匹克题)给定非负数序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 对于由 1 到 n 的任何一个整数 k，用 m_k 表示值

$$\max_{l=1,2,\cdots,k}\frac{a_{k-l+1}+a_{k-l+2}+\cdots+a_k}{l}.$$

证明：对任何 $\alpha>0$，使得 $m_k>\alpha$ 的 k 的个数小于$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\alpha}$.

7. (第 28 届俄罗斯数学奥林匹克题)某国原有 2002 个城市，其中有些城市之间有道路相连. 今知，如果禁止途经某中任何一个城市，都仍然可以由其余任何一个城市到达其他任何城市. 每一年，管理部门都选择一个不自交的道路圈，下令建设一个新的城市，并修筑道路使新城与圈上的每一个城市相连(各修一条路连向圈上的每一个城市)，同时关闭掉圈上的所有道路. 经过若干年后，该国已经没有任何不自交的道路圈. 证明：此时该国恰有一条道路通向外界的城市不少于 2002 个.

8. (2003 年美国数学奥林匹克题)正六边形的 6 个顶点上写有 6 个非负整数，且和为 2003. 允许进行如下的操作：选择一个点，把该点的数值用相邻两点数值差的绝对值代替. 证明：可以进行一系列操作，最终使得每个顶点上的数值都为 0.

9. (2001 年中国数学奥林匹克题)设 $X=\{1,2,\cdots,2001\}$. 求最小正整数 m，适合要求：对 X 的任何一个 m 元子集 W，都存在 u、$v\in W$(u 和 v 可以相同)，使得 $u+v$ 是 2 的方幂.

10. (2001 年中国数学奥林匹克题)将周长为 24 的圆周等分成 24 段，从 24 个分点中选取 8 个点，使得其中任何两点间所夹的弧长都不等于 3 和 8. 问满足要求的 8 点组的不同取法共有多少种？说明理由.

11. (2003 年中国数学奥林匹克题)求出时满足如下条件的集合 S 的元素个数的最大值：

(1)S 中的每个元素都是不超过 100 的正整数；

(2)对于 S 中任意两个不同的元素 a、b，都存在 S 中的元素 c，使得 a 与 c 的最大公约数等于 1，并且 b 与 c 的最大公约数也等于 1；



(3)对于 S 中任意两个不同的元素 a、b,都存在 S 中异于 a、b 的元素 d,使得 a 与 b 的最大公约数大于 1,并且 b 与 d 的最大公约数也大于 1.

12. (第 43 届 IMO 预选题)设 n 是正整数,若由 n 个正整数组成的数列(可以相同)称为"满的",则这个数列应满足条件:对于每个正整数 $k(k\geqslant2)$,如果 k 在这个数列中,则 $k-1$ 也在这个数列中,且 $k-1$ 第一次出现的位置在 k 最后一次出现的位置的前面. 问对于每个 n,有多少个"满的"数列?

13. (第 15 届韩国数学奥林匹克题)在一次数学竞赛中,

(i)竞赛题的数目为 $n(n\geqslant4)$;

(ii)每道题恰由 4 人解出;

(iii)对于任意两道题,恰有 1 人解出这两题.

若参赛人数大于等于 $4n$,求 n 的最大值,使得总存在一个人解出全部竞赛题.

14. (《中等数学》2004 年 1 期奥林匹克问题)平面上给定 $n(n>3)$个点,其中任何三点不共线. 任意地用线段连结某些点(这些线段称为边),得到 x 条边.

(1)若确保图形中出现以给定点为顶点的三角形,求证:$x\geqslant\frac{n(n-1)(n-2)+3}{3(n-2)}$.

当$\frac{n(n-1)(n-2)+3}{3(n-2)}$是整数时,求所有 n 的值及对应 x 的最小值.

(2)若确保图形中出现以给定点为顶点的 $m(m<n)$阶完全图. 求证:$x\geqslant\frac{C_n^n(C_m^2-1)+1}{C_{m-2}^{m-2}}$.



第5章　数形结合法

【学习目标】

数和形这两个基本概念，是数学的两块基石. 全部数学大体上都是围绕这两个概念的提炼、演变、发展而展开的. 数和形在内容上互相联系，在方法上互相渗透，在一定条件可以互相转化、补充互助. 数形结合解题法，就是在解题时，注重把数形结合起来考察、斟酌问题的具体情形，使图形性质问题借助于数量关系的推演而具体量法，或者使数量关系的问题借助于几何背景而直观形象化，将抽象的数学符号语言与直观的图形语言结合起来，将抽象思维与形象思维结合起来，实现抽象概念与具体形象、表象的和谐联系和转化，从而解决问题.

【解题钥匙】

1. 以形助数

以形助数，就是将"数式"问题，借助其几何背景，利用图形的性质，使之直观化、形象化，从而直观探索"数式"的有关内涵或规律. 在构造法一章中介绍的构造辅助图形，其实也就是以形助数.

以形助数，可以借助于数轴、函数图象、解析观点、结构图或构作辅助图形等等.

例1　(1998年全国高中联赛题)若非空集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$，则能使 $A\subseteq(A\cap B)$ 成立的所有 a 的集合是(　　).

A. $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 9\}$　　B. $\{a\mid 6\leqslant a\leqslant 9\}$　　C. $\{a\mid a\leqslant 9\}$　　D. $\varnothing$

解　选B. 理由：由交集定义可知，$(A\cap B)\subseteq A$，又已知 $A\subseteq(A\cap B)$，可得 $A=A\cap B$，即 $A\subseteq B$.

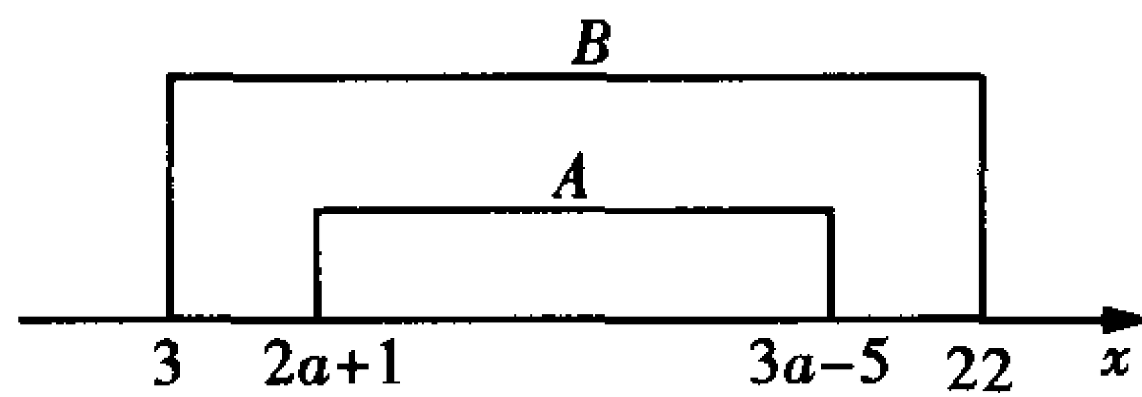


图5-1

如图5-1，可知要使 $A\subseteq B$，应满足条件

$$\begin{cases}2a+1\geqslant 3,\\ 3a-5\leqslant 22,\\ 3a-5\geqslant 2a-1.\end{cases}$$

解得，$6\leqslant a\leqslant 9$.

例2　(2003年北京市竞赛题)$[a]$表示不超过 a 的最大整数，则函数 $y=x-\pi-[\frac{x}{\pi}]-|\sin x|$ 的最大值是(　　).

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 不存在

解　选D. 理由：

因为 $0\leqslant\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]\leqslant 1$，$0\leqslant|\sin x|\leqslant 1$，

$y=\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]-|\sin x|\leqslant 1-0=1$,

所以 $y=\frac{x}{\pi}-|\sin x|$ 的最大值可能是 1.

下面说明不能达到 1.

因 y 是以 π 为周期的周期函数，故只须考虑 $x\in(0,\pi)$ 时函数的变化，在 $x\in(0,\pi]$ 上，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$[\frac{x}{\pi}]=0$，$\sin x>0$，则 $y=\frac{x}{\pi}-\sin x<1-\sin x<1$.

从图 5－2 可见，当 $x\leqslant x_1$ 时，$y\leqslant 0$；当 $x\in(x_1,\pi)$ 时，$\frac{x}{\pi}>\sin x$，且 $\frac{x}{\pi}$ 单调增，$\sin x$ 单调减，则 $y=\frac{x}{\pi}-\sin x$ 单调增；当 $x=\pi$ 时，$y=0$.

所以，y 无最大值.

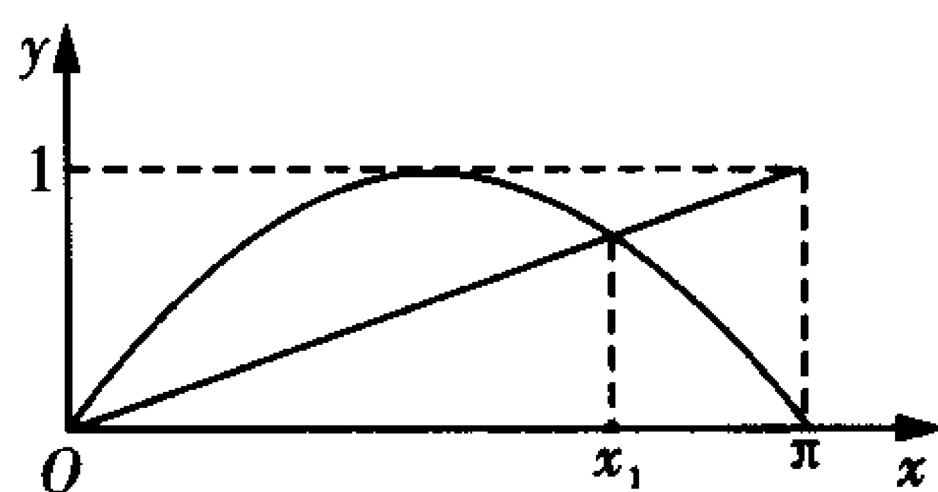


图 5－2

例 3 （第 5 届"希望杯"邀请赛题）不等式 $\sqrt{2x+2}>x-1$ 的解集是________.

解 填 $[-1,2+\sqrt{5}]$. 理由：解方程 $\sqrt{2x+2}=x-1$，得 $x=2+\sqrt{5}$. 如图 5－3 所示，考察半抛物线 $y=\sqrt{2x+2}$ 位于直线 $y=x-1$ 上方的点的横坐标 x 的集合，有 $-1\leqslant x<2+\sqrt{5}$.

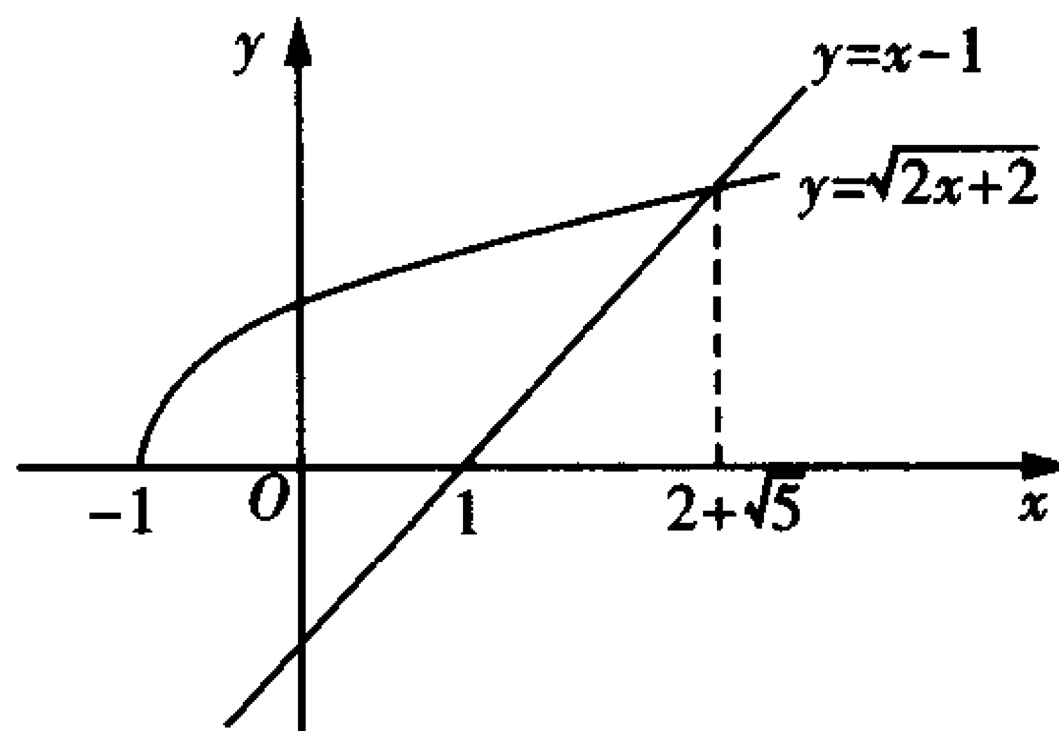


图 5－3

例 4 （1991 年全国高中联赛题）设复数 z_1、z_2 满足 $|z_1|=|z_1+z_2|=3$，$|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$，求 $\log_3|(z_1\bar{z}_2)^{2000}+(\bar{z}_1z_2)^{2000}|$ 的值.

解 填 4000. 理由：本题直接计算不易，看到 $|z_1|$、$|z_1+z_2|$、$|z_1-z_2|$ 可联想平行四边形，故可考虑复平面上的以形助数.

于是，设 z_1、z_2、z_1+z_2 在复平面上所对应的点分别为 A、B、C，如图 5－4 所示，则 $|OA|=|z_1|$，$|OB|=|z_2|$，

$|OC|=|z_1+z_2|$，$|AB|=|z_2|$，

又因为四边形 $OACB$ 是平行四边形，

则 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

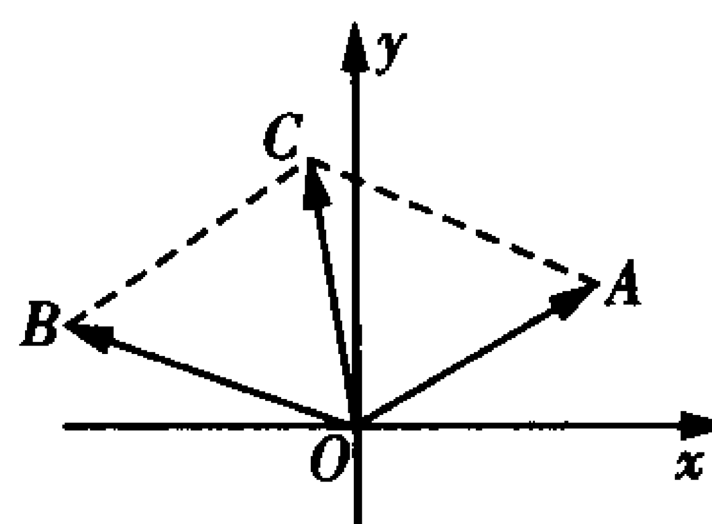


图 5－4

从而 $|z_2|=3$，故四边形 $OACB$ 是菱形，且 $\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，

从而 $\frac{z_2}{z_1}=\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}$.

又 $|z_1|=3$，有 $\frac{1}{z_1}=\frac{\bar{z}_1}{9}$，

则 $z_2\cdot\bar{z}_1=9(\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3})$，

即 $\overline{z_2\cdot\bar{z}_1}=9(\cos\frac{2\pi}{3}\mp i\sin\frac{2\pi}{3})$.

即 $\bar{z}_2\cdot z_1=9(\cos\frac{2\pi}{3}\mp i\sin\frac{2\pi}{3})$.

于是 $(z_1\bar{z}_2)^{2000}+(\bar{z}_1z_2)^{2000}$

$=9^{2000}(\cos\frac{2000\times2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2000\times2\pi}{3})+9^{2000}(\cos\frac{2000+2\pi}{3})\mp i\sin\frac{2000\times2\pi}{3}=-9^{2000}$,

故 $\log_3|z_1\bar{z}_2)^{2000}+(\bar{z}_1z_2)^{2000}|=\log_3 3^{4000}=4000$.

例 5 求证：$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x+\sqrt{1-2x^2}\leqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$.

证明 令 $y=\sqrt{1-2x^2}(y\geqslant0)$是椭圆 $2x^2+y^2=1$ 的上半部，令 $x+y=m$，因此所求不等式就是求 m 的取值范围，$y=-x+m$ 是斜率为-1，在 y 轴上的截距为 m 的直线，如图 5-5.

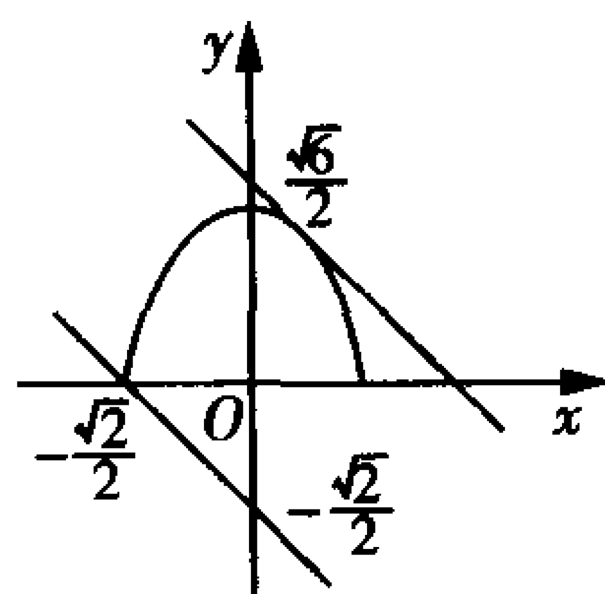


图 5-5

$\begin{cases}y=-x+m,\\2x^2+y^2=12.\end{cases}$

例 6 设 $a>0$ 为常数，解不等式 $\sqrt{x^2+1}-ax\leqslant1$.

解 不等式化为 $\sqrt{x^2+1}\leqslant ax+1$，令 $y=\sqrt{x^2+1}(y\geqslant0)$，则表示双曲线 $y^2-x^2=1$ 的上半支，$y=ax+1$ 则表示过定点 $P(0,1)$，斜率为 a 的直线. 如图 5-5.

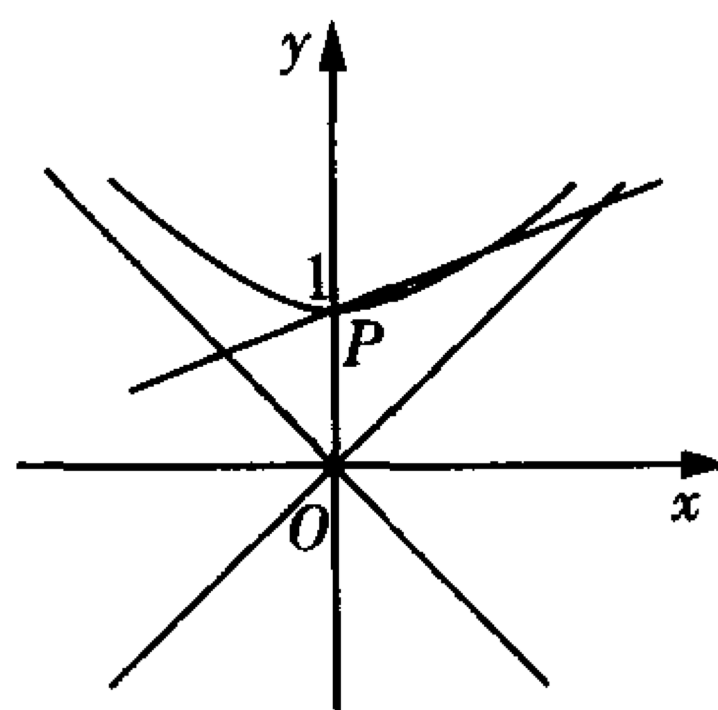


图 5-6

当 $0<a<1$ 时，直线与双曲线上半支有两个交点，即

$\sqrt{x^2+1}=ax+1$，

解得 $x_1=0,x_2=\frac{2a}{1-a}$.

由图 5-6 可知原不等式的解为

$0<x<\frac{2a}{1-a}$.

当 $a\geqslant1$ 时，直线与双曲线只有一个交点 $P(0,1)$，此时不等式的解为 $x\geqslant0$.

例 7 求函数 $y=2\sqrt{x+5}+\sqrt{4-x}$的最值.

解 令 $\sqrt{x+5}=u,\sqrt{4-x}=v(u\geqslant0,v\geqslant0)$，

则 $\begin{cases}u^2+v^2=9,\\y=2u+v.\end{cases}$

把 $v=y-2u$ 代入

$u^2+v^2=9$ 得

$5u^2-4yu+y^2-9=0$，

$u\geqslant0,v\geqslant0$，有

$\begin{cases}-4y<0,\\y^2-9\geqslant0,\\\Delta=16y^2-5\cdot4(y^2-9)\geqslant0.\end{cases}$

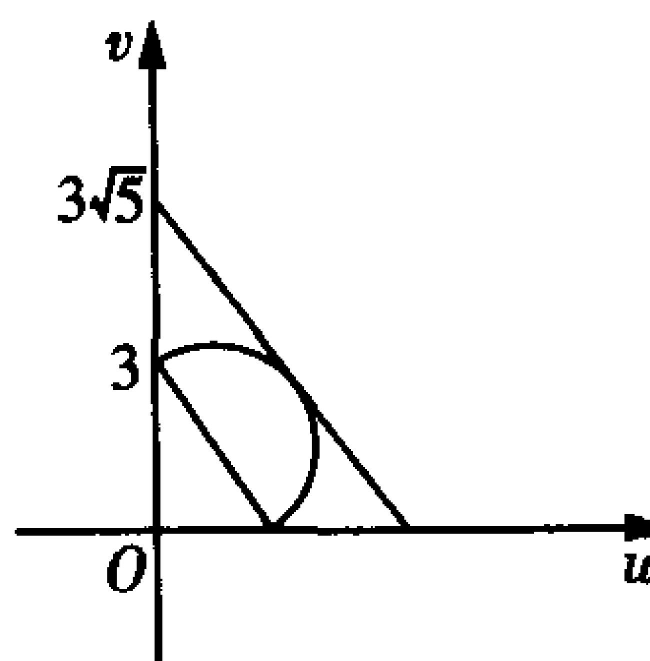


图 5-7

从而 $3\leqslant y\leqslant3\sqrt{5}$，

若 $0<y<3$，易知 $u^2+v^2<(2u+v)^2=y^2<9$，不合题意.

于是有 y 有最大值 $3\sqrt{5}$，最小值 3.

例 8 （1996 年全国高中数学联赛题）求实数 a 的取值范围，使得对于任意 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，恒有$(x+$

$3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{8}$.

解 令 $y=x$,则 $\begin{cases}x-y=0,\\ [x-(-3-2\sin\theta\cos\theta)]^2+[y-(-a\sin\theta-a\cos\theta)]^2\geqslant\frac{1}{8}.\end{cases}$

则此问题可借助于解析图形而求解,变为点$(-3-2\sin\theta\cos\theta,-a\sin\theta-a\cos\theta)$到直线 $y=x$ 的距离的平方大于$\frac{1}{8}$.由距离公式可得$|-3-2\sin\theta\cos+a\sin\theta+a\sin\theta|\geqslant\frac{1}{2}$,令 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in[1,\sqrt{2}]$,原不等式可化为$|-3-2(t^2-1)+at|\geqslant\frac{1}{2}$,则可求得 $a\geqslant\frac{7}{2}$或 $a\leqslant\sqrt{6}$.

2. 以数助形

以数助形,就是寻找"形"的数式背景或量化表示.将"形"的问题,借助于数式的推演,使之数式化或量化,从而具体探索"形"的结构与性质而将其解决.

以数助形,常借助于列方程(组)、函数性质、进行计算并运用有关公式与结论、三角知识、复数知识、向量知识、解析几何知识、几何轨迹的定义和性质、立体几何知识等等.

例 9 (2003 年安徽省竞赛题)函数 $f(x)=-(\cos x)\lg|x|$ 的部分图象是( ).

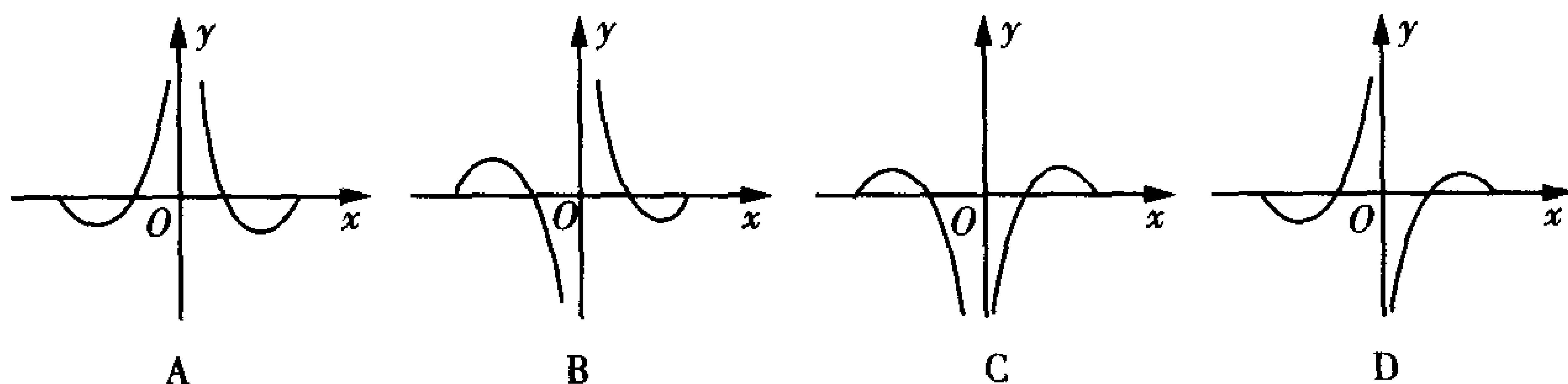


图 5-8

解 选 A.理由:首先,$f(x)$为偶函数,故图象关于 y 轴对称,排除 B、D.再看图象和 x 轴都有交点,图象与 x 轴正方向的第一个交点为$(1,0)$,第二个为$(\frac{\pi}{2},0)$.取 $x=\frac{3}{2}$,则 $f(\frac{3}{2})=-\cos\frac{3}{2}\lg|\frac{3}{2}|<0$.又$\frac{3}{2}\in(1,\frac{\pi}{2})$,则排除 C.

例 10 (2003 年全国高中联赛题)设 $a、b\in\mathbf{R}$,$ab\neq0$.那么,直线 $ax-y+b=0$ 和曲线 $bx^2+ay^2=ab$ 的图象是( ).

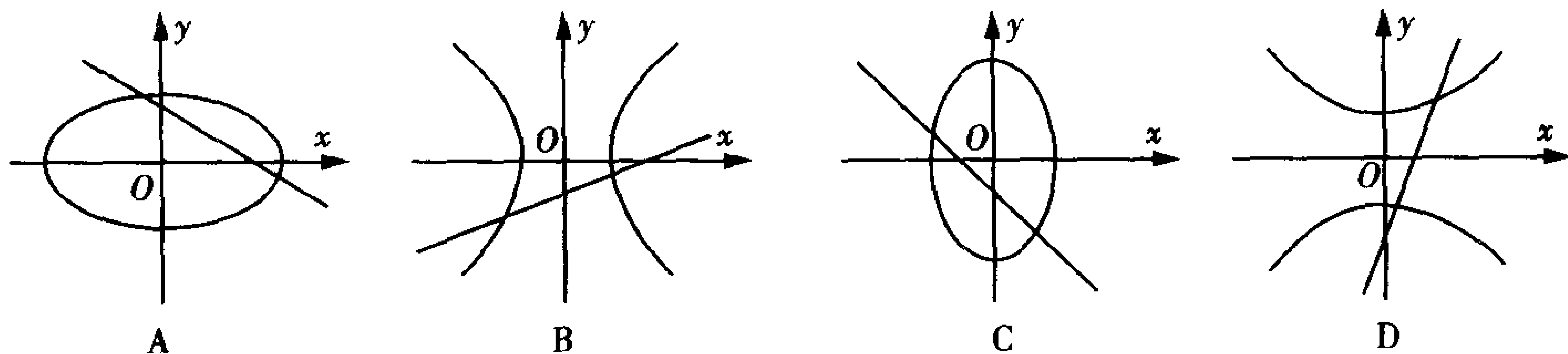


图 5-9

解 选 B. 理由：直线方程可写为 $y=ax+b$，曲线方程可写为 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$. 若 $a<0,b<0$，则与曲线方程矛盾，若 $a<0,b>0$，则与 A、B、C 矛盾；若 $a>0,b>0$，则与 A、B、C 矛盾；当 $a>0,b<0$ 时，只有 B 符合.

例 11 （2003 年美国南卡罗米纳大学高中竞赛题）如图 5-10 所示，延长$\triangle ABC$ 的三边，使得 $BD=\frac{1}{2}AB, CE=\frac{1}{2}BC, AF=\frac{1}{2}CA$. 则$\triangle DEF$ 与$\triangle ABC$ 的面积比等于（　　）.

A. 3∶1　　B. 13∶4

C. 7∶2　　D. 14∶15

E. 10∶3

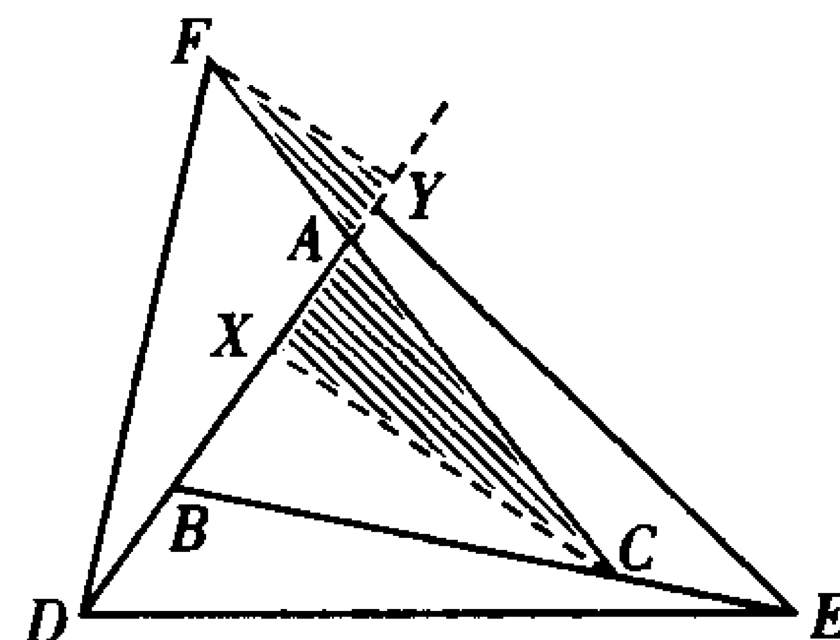


图 5-10

解 选 B. 理由：如图，过点 C 作$\triangle ABC$ 边 AB 的高，垂足为点 X，过点 F 作$\triangle ADF$ 边 AD 的高，垂足为点 Y，则

$\triangle AXC \backsim \triangle AYF$.

故$\frac{FY}{CX}=\frac{AF}{AC}=\frac{1}{2}$.

$S_{\triangle ADF}=\frac{1}{2}\times AD\times FY=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times AB\times\frac{1}{2}CX=\frac{3}{4}(\frac{1}{2}\times AB\times CX)=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$.

同理，$S_{\triangle BED}=S_{\triangle CEF}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$.

故 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BED}+S_{\triangle CFE}+S_{\triangle ADF}=(1+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4})S_{\triangle ABC}=\frac{13}{4}S_{\triangle ABC}$.

所以，所求比例为$\frac{13}{4}$.

例 12 （1995 年全国高中数学联赛题）如图 5-11 所示，在直角坐标平面上，满足不等式组$\begin{cases}y\leqslant 3x,\\ y\geqslant\frac{1}{3}x,\\ x+y\leqslant 100\end{cases}$的整点（即横、纵坐标均为整数的点）的个数是________.

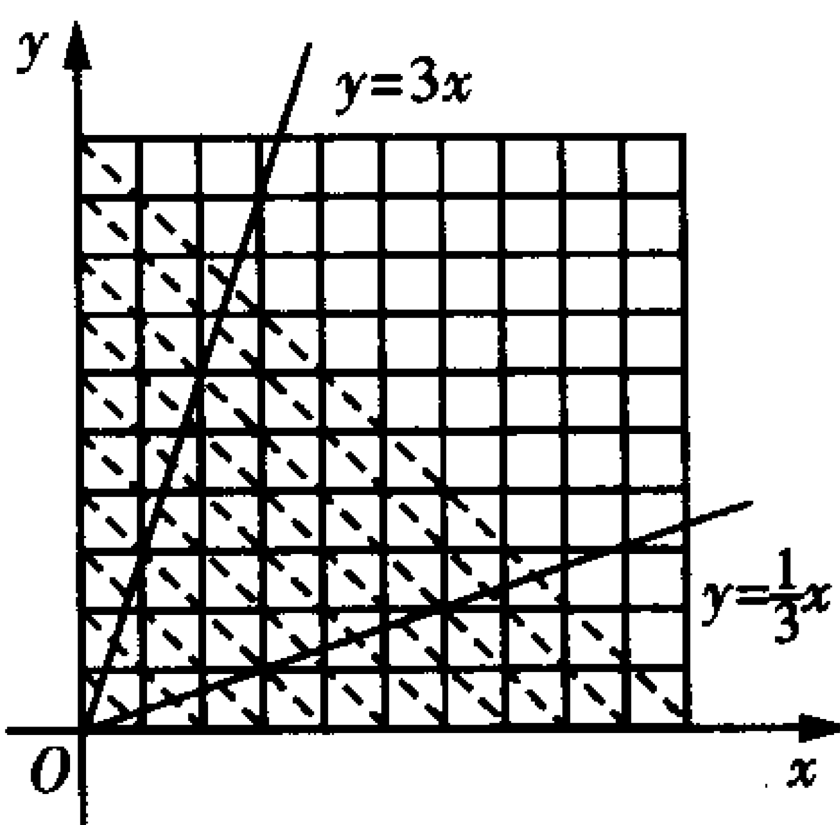


图 5-11

解 填 2551. 理由：不等式组$\begin{cases}y\leqslant 3x,\\ y\geqslant\frac{1}{3}x,\\ x+y\leqslant 100\end{cases}$的几何意义是：由三条直线 $y=3x, y=\frac{1}{3}x$ 和 $x+y=100$ 围成的一个三角形区域 Q. 显然区域 Q 全部落在第一象限内，要求区域 Q 内的整点个数，可先考虑求出 x 轴、y 轴和直线 $x+y=100$ 围成的区域 **R** 内的整点个数，然后根据对称性去掉由直线 $y=\frac{1}{3}x, x+y=100$ 和 x 轴围成的区域 G 内的整点个数的 2 倍，即可求出所求的整点个数.

于是，由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=100$ 所围成的区域 **R**（包括边界）内的整点个数共有 $1+2+3+\cdots+$

$100+101=\frac{(1+101)\times101}{2}=5151$ 个.

由直线 $y=\frac{1}{3}x$，$x+y=100$ 和 x 轴围成的区域 G（边界 $y=\frac{1}{3}x$ 上的整点不包含）内的整点个数共有 $100+96+92+\cdots+8+4=1300$（个）.

根据对称性可知，由直线 $y=3x$，$x+y=100$ 和 y 轴所围成的区域（不包括边界 $y=3x$ 上的整点）内也有 1300 个整点.

由此可得符号条件的整点个数共有 $5151-2\cdot1300=2551$ 个.

例 13 （1998 年全国高中数学联赛题）$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，$AC=2$，M 是 AB 的中点. 将 $\triangle ACM$ 沿 CM 折起，使 A、B 两点间的距离为 $2\sqrt{2}$，此时三棱锥 $A-BCM$ 的体积等于______.

解 填 $\frac{2}{3}\sqrt{2}$. 理由：欲求折起后的三棱锥的体积，关键要求出三棱锥的高，研究可以发现，折起后，$\triangle ABC$ 是一个直角三角形（$AC=2$，$BC=2\sqrt{3}$，$AB=2\sqrt{2}$），从而可以解决问题.

折起后的三棱锥如图 5－12 所示，取 CM 的中点 D，连结 AD. 在 $\triangle BCM$ 中作 $DE\perp CM$ 交 BC 于 E，连结 AE，则

$AD=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$DE=CD\cdot\tan30°=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$CE=2DE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 在 $\triangle ABC$ 中，$AC=2$，$AB=2\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{3}$，所以 $AC^2+AB^2=BC^2$，因此 $\angle BAC=90°$. 在 $\triangle ACE$ 中，$AE^2=AC^2+CE^2-2AC\cdot CE\cos\angle ACE=4+\frac{4}{3}-2\cdot2\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{8}{3}$，所以 $AE^2+CE^2=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=4=AC^2$，又 $AE^2+DE^2=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=3=AD^2$，因此 $AE\perp BC$，$AE\perp DE$，从而 $AE\perp$ 平面 BCM. 所以 $V_{A-BCM}=\frac{1}{3}\cdot AE\cdot S_{\triangle BCM}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

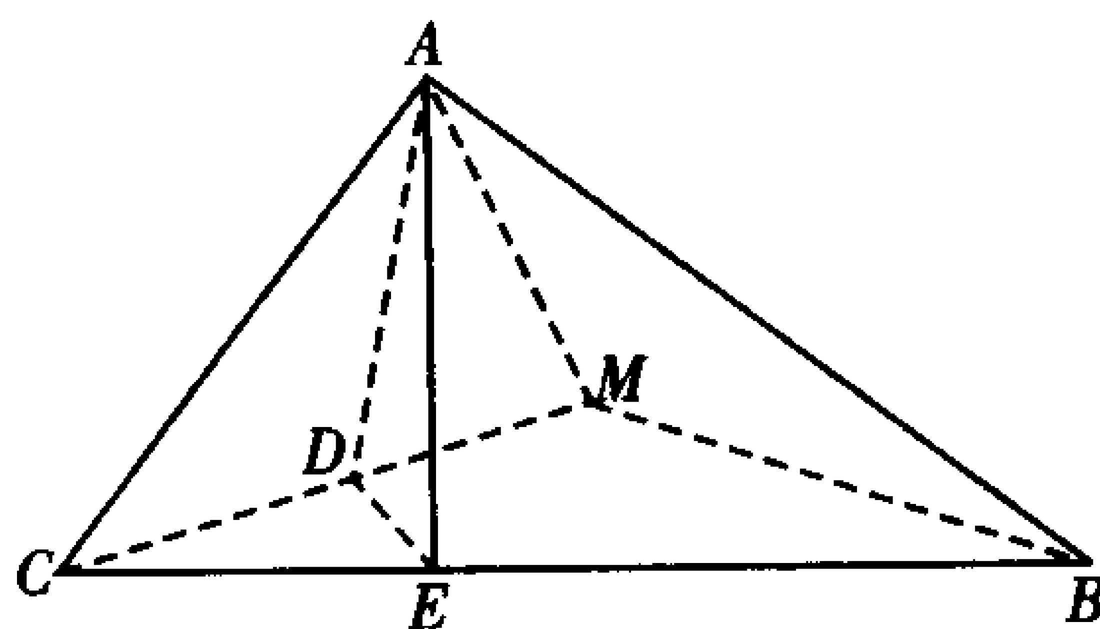


图 5－12

例 14 （1998 年上海市高中数学竞赛题）如图 5－13，已知在抛物线 $y=x^2$ 上有一个正方形的三个顶点 A、B、C. 求这种正方形面积的最小值.

解 显然需要表示出正方形边长，然后求其最小值.

不妨设三个顶点中有两个在 y 轴右侧（包括 y 轴上），如图 5－13，且设 A、B、C 三点的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，BC 的斜率为 k（$k>0$），

则 $y_3-y_2=k(x_3-x_2)$， ①

$y_1-y_2=-\frac{1}{k}(x_1-x_2)$. ②

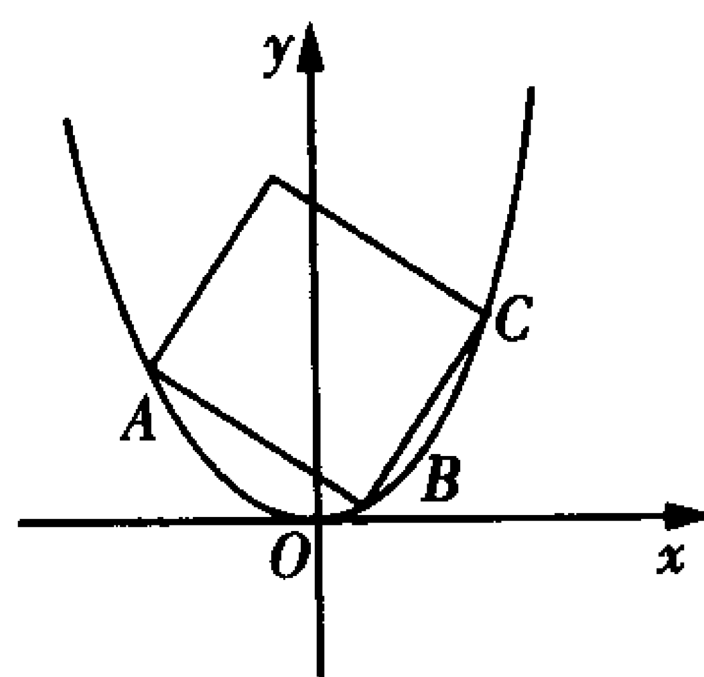


图 5－13

又 A、B、C 三点在抛物线上，

所以 $y_1=x_1^2$，$y_2=x_2^2$，$y_3=x_3^2$. 代入①式和②式

可得 $x_3=k-x_2$，$x_1=-\frac{1}{k}-x_2$.

由于 $|AB|=|BC|$，

即$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$.

则$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}(x_2-x_1)=\sqrt{1+k^2}(x_3-x_2)$

$\Rightarrow x_2-x_1=k(x_3-x_2)$

$\Rightarrow \frac{1}{k}+2x_2=k(k-2x_2)$

$\Rightarrow k^2-\frac{1}{k}=(2k+2)x_2\geqslant 0\Rightarrow k^3\geqslant 1\Rightarrow k\geqslant 1$.

且$x_2=\frac{k^3-1}{2k(k+1)}$. 正方形边长为

$$\sqrt{k^2+1}(x_3-x_2)=\sqrt{k^2+1}(k-2x_2)=\sqrt{k^2+1}\left[k-\frac{k^3-1}{k(k+1)}\right]=\frac{k^2+1}{k}\cdot\frac{\sqrt{k^2+1}}{k+1}$$

$$\geqslant\frac{2k}{k}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(k+1)^2}}{k+1}=\sqrt{2}.$$

当且仅当$k=1$时,B点为原点时等号成立. 所以,正方形的面积的最小值为2.

例15 (《中等数学》2004年6期奥林匹克训练题)已知$ABCD-A_1B_1C_1D_1$是一个长方体,从点A到直线A_1B、A_1C、A_1D的垂线分别交直线A_1B_1、A_1C_1、A_1D_1于点M、N、P_1,垂足分别为E、G、F. 求证:

(1)M、N、P三点共线;

(2)PE、MF、AN三条直线交于一点.

解法1 建立如图5-15的空间直角坐标系. 设$AD=a$,$AB=b$,$AA_1=c$,则长方体的顶点坐标为

$A(a,0,0)$、$B(a,b,0)$、$C(0,b,0)$、$D(0,0,0)$、$A_1(a,0,c)$、$B_1(a,b,c)$、$C_1(0,b,c)$、$D(0,0,c)$.

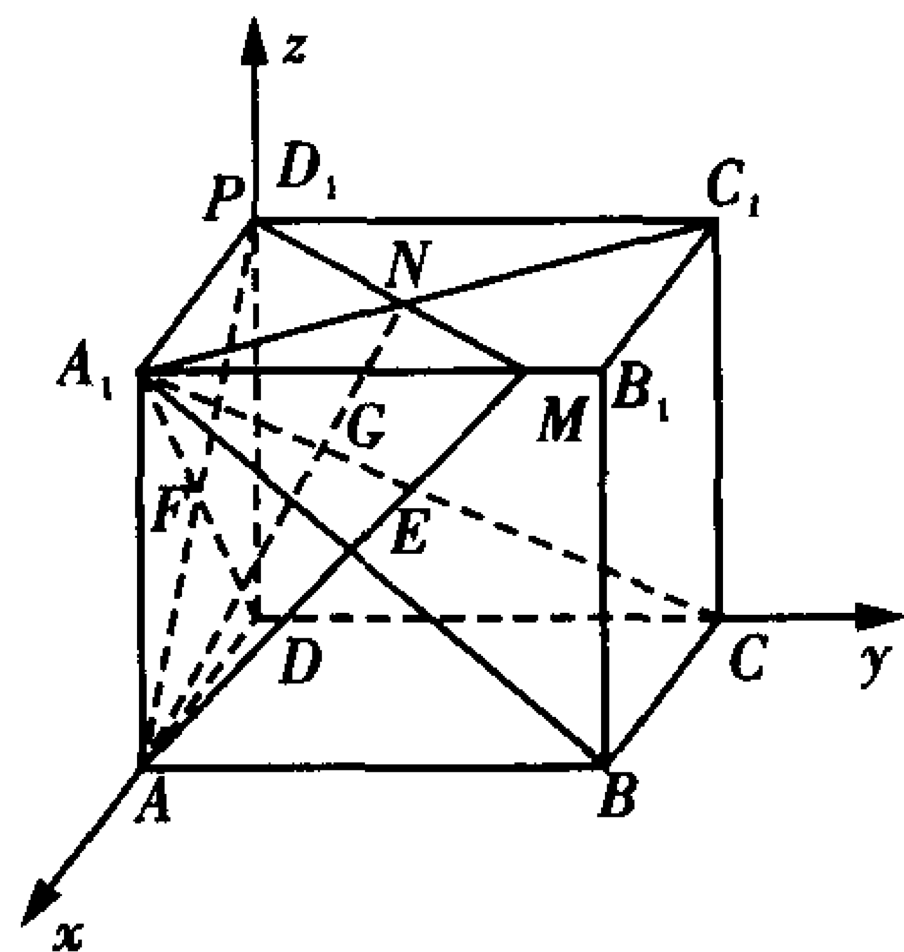


图5-14

(1)依题意,设$M(a,y,c)$,则

$\overrightarrow{AM}=(0,y,c)$,$\overrightarrow{A_1B}=(0,b,-c)$.

因为$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{A_1B}$,则

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A_1B}=by-c^2=0$,$y=\frac{c^2}{b}$.

故$\overrightarrow{AM}=(0,\frac{c^2}{b},c)$. 设$N(m,n,c)$,则

$\overrightarrow{A_1N}=(m-a,n,0)$,$\overrightarrow{A_1C_1}=(-a,b,0)$,

$\overrightarrow{A_1C}=(-a,b,-c)$,$\overrightarrow{AN}=(m-a,n,c)$.

由$\begin{cases}\overrightarrow{A_1N}/\!/\overrightarrow{A_1C_1}\\ \overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{AN}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}an+b=(m-a)=0\\ -a(m-a)+bn-c^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=a-\frac{ac^2}{a^2+b^2},\\ n=\frac{bc^2}{a^2+b^2}.\end{cases}$

故$\overrightarrow{AN}=(-\frac{ac^2}{a^2+b^2},\frac{bc^2}{a^2+b^2},c)$.

设$P(p,0,c)$,则

$\overrightarrow{AP}=(p-a,0,c)$，$\overrightarrow{A_1D}=(-a,0,-c)$.

因为$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{A_1D}$，则

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{A_1D}=-a(p-a)-c^2=0$，$p=a-\frac{c^2}{a}$.

故$\overrightarrow{AP}=(-\frac{c^2}{a},0,c)$.

所以，$\overrightarrow{AN}=\frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AP}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AM}$.

这表明M、N、P三点共线.

(2)设$PE\cap MF=K$.

由P、K、E三点共线，得

$\overrightarrow{AK}=\lambda\overrightarrow{AE}+(1+\lambda)\overrightarrow{AP}=\frac{b^2\lambda}{b^2+c^2}\overrightarrow{AM}+(1-\lambda)\overrightarrow{AP}$.

又M、K、F三点共线，得

$\overrightarrow{AK}=\mu\overrightarrow{AF}+(1-\mu)\overrightarrow{AM}=(1-\mu)\overrightarrow{AM}+\frac{a^2\mu}{a^2+c^2}\overrightarrow{AP}$.

$$故\begin{cases}\frac{b^2\lambda}{b^2+c^2}=1-\mu\\ \frac{\mu a^2}{a^2+c^2}=1-\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2},\\ \mu=\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}.\end{cases}$$

$$\overrightarrow{AK}=\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{AM}+\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{AP}=\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}(0,\frac{c^2}{b},c)+\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}(-\frac{c^2}{a},0,c)$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}(-ac^2,bc^2,(a^2+b^2)c)=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}(-\frac{ac^2}{a^2+b^2},\frac{bc^2}{a^2+b^2},c)=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{AN}.$$

所以，$\overrightarrow{AK}/\!/\overrightarrow{AN}$.

又$\overrightarrow{AK}$与$\overrightarrow{AN}$有相同的起点，因此，A、K、N共线，即$K\in AN$. 这表明，PE、MF、AN三线交于一点.

解法2 如图5-15，设$AB=a$，$BC=b$，$AA_1=c$.

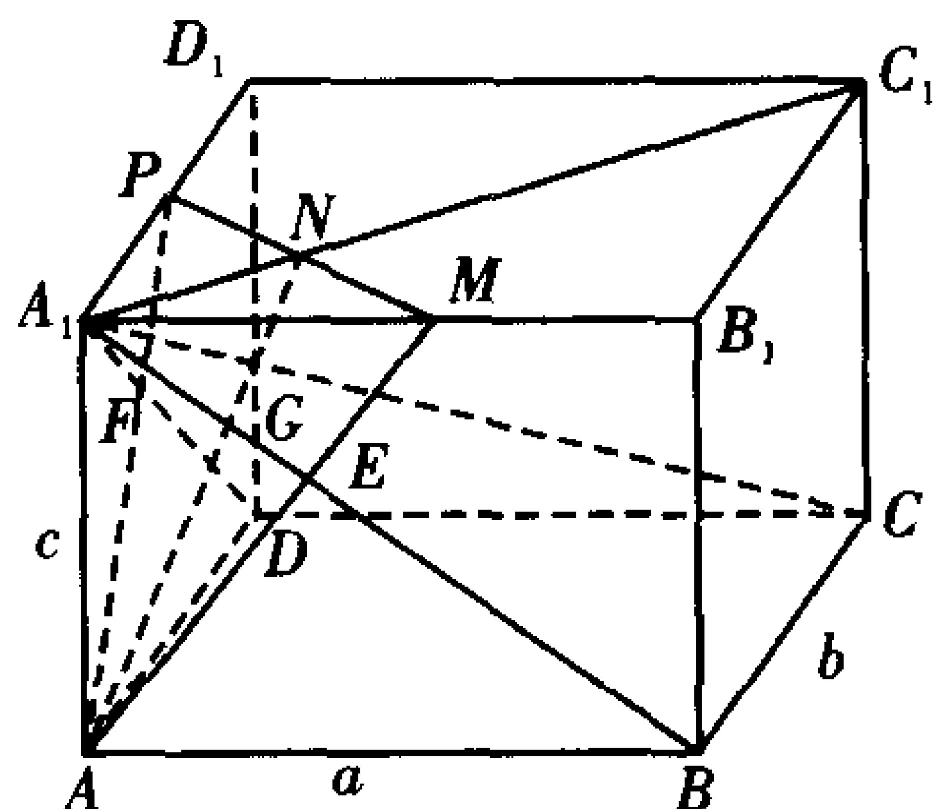


图5-15

(1)由射影定理有，$AA_1^2=A_1E\cdot A_1B$. 由三角形相似有，$A_1E\cdot A_1B=A_1M\cdot A_1B_1$. 故

$AA_1^2=A_1M\cdot A_1B_1$，

$A_1M=\frac{c^2}{a}$.

同理，$A_1P=\frac{c^2}{b}$，$A_1N=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

在$\triangle A_1NM$中，由余弦定理，有

$$MN^2=A_1N^2+A_1M^2-2A_1N\cdot A_1M\cos\angle NA_1M$$
$$=\frac{c^4}{a^2+b^2}+\frac{c^4}{a^2}-2\cdot\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{c^2}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{b^2c^4}{a^2(a^2+b^2)}.$$

从而，$MN=\dfrac{bc^2}{a\sqrt{a^2+b^2}}$.

同理，在$\triangle A_1NP$中，有$PN=\dfrac{ac^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}$.

故$MN+NP=\dfrac{c^2\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$,

$(MN+NP)^2=\dfrac{c^4(a^2+b^2)}{a^2b^2}$.

另一方面，在$\triangle A_1MP$中，由勾股定理，有

$MP^2=\dfrac{c^4(a^2+b^2)}{a^2b^2}$.

所以，$MP=MN+NP$，M、N、P三点共线.

(2)由射影定理，有

$\dfrac{AE}{EM}=\dfrac{A_1A^2}{A_1M^2}=\dfrac{a^2}{c^2}$，$\dfrac{PF}{FA}=\dfrac{A_1P^2}{AA_1^2}=\dfrac{c^2}{b^2}$.

又由(1)有$\dfrac{MN}{NP}=\dfrac{b^2}{a^2}$,

故$\dfrac{AE}{EM}\cdot\dfrac{MN}{NP}\cdot\dfrac{PF}{FA}=\dfrac{a^2}{c^2}\cdot\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{c^2}{b^2}=1$.

由塞瓦定理，PE、MF、AN三线共点.

3. 数形互助

以形助数，直观形象；以数助形，简明入微；数形互助，珠联璧合. 数形结合，是我们解竞赛题的一个“法宝”.

例 16 (2002年湖南省竞赛题)二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$的图象如图5-16所示. 记

$N=|a+b+c|+|2a-b|$,

$M=|a-b+c|+|2a+b|$. 则(　　).

A. $M>N$　　B. $M=N$

C. $M<N$　　D. M、N的大小关系不能确定

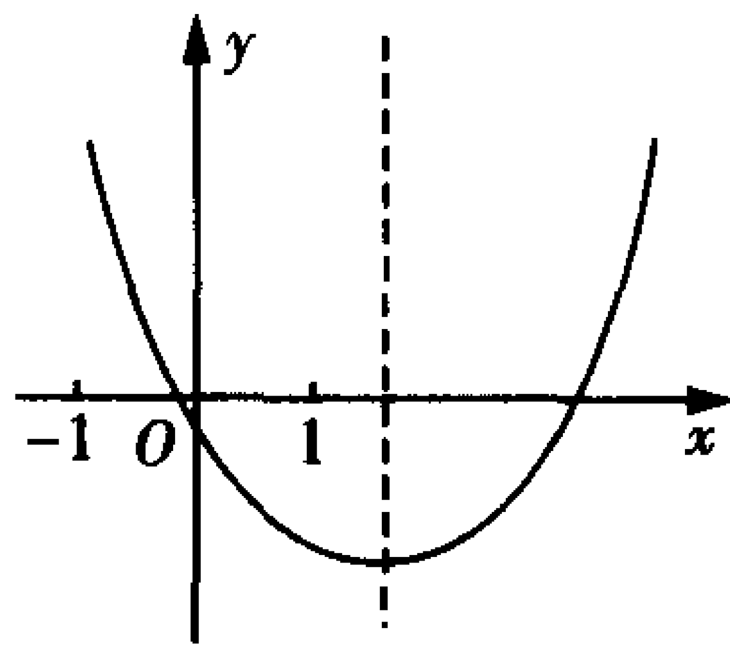


图 5-16

解　选C. 理由：如图5-16，$f(1)=a+b+c<0$，$f(-1)=a-b+c>0$，$a>0$，$-\dfrac{b}{2a}>1$.

从而$b<0$，$2a+b<0$，$2a-b>0$.

又$f(0)=c<0$，故$a-c>0$，进而

$M-N=|a-b+c|+|2a+b|-|a+b+c|-|2a-b|=(a-b+c)+(a+b+c)-(2a+b)-(2a-b)=-2(a-c)<0$.

故$M<N$.

例 17 (1999年河南省竞赛题)四面体$S-ABC$中，三组对棱分别相等，依次为$\sqrt{34}$，$\sqrt{41}$，5. 则此四面体的体积为(　　).

A. 20　　B. $10\sqrt{7}$　　C. $20\sqrt{3}$　　D. 30

解 选 A. 理由：如图 5-17，补成长方体，设其长、宽、高分别为 x、y、z，则可得

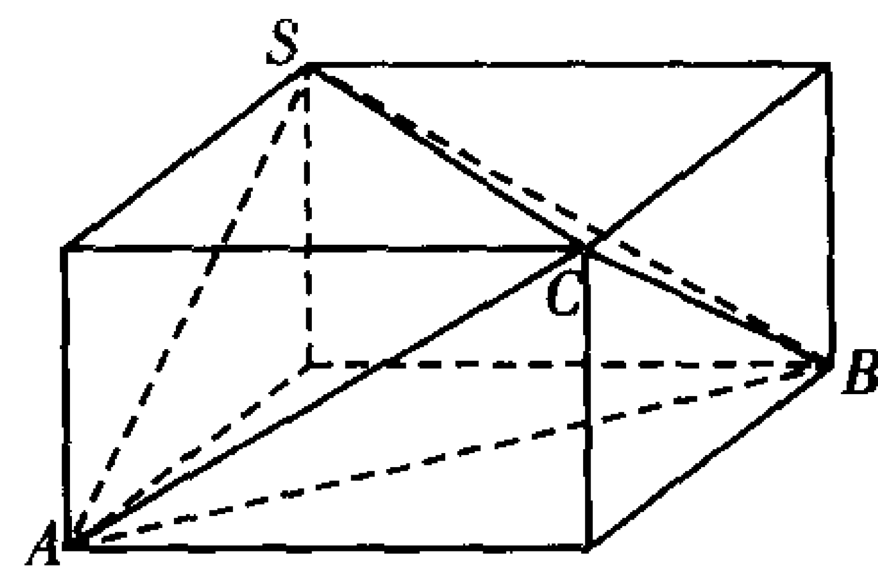


图 5-17

$$\begin{cases}x^2+y^2=5^2,\\ y^2+z^2=(\sqrt{41})^2,\\ z^2+x^2=(\sqrt{34})^2.\end{cases}$$

解得 $x=3,y=4,z=5$.

故 $V_{S\text{-}ABC}=\frac{1}{3}V_{长}=\frac{1}{3}\times3\times4\times5=20$.

例 18 （2003 年湖南省竞赛题）求平面上满足条件：

(1)三角形的三个顶点都是整点，坐标原点为直角顶点；

(2)三角形的内心 M 的坐标为$(96p,672p)$，其中 p 为素数的直角三角形的个数.

解 设如图 5-18 所示的三角形为满足条件的 $\text{Rt}\triangle OAB$，则直线 OM 的斜率为 $\tan\alpha=7$；

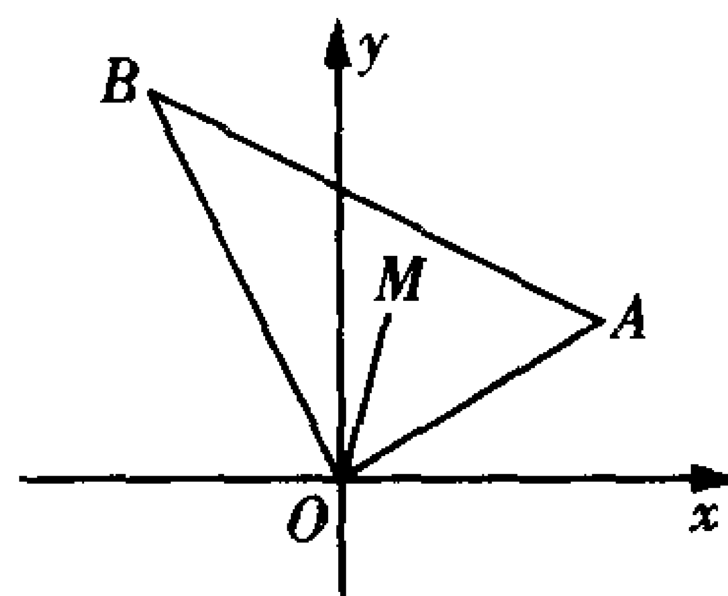


图 5-18

直线 OA 的斜率为 $\tan(\alpha-45°)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{3}{4}$；

直线 OB 的斜率为 $-\frac{4}{3}$.

由此可设 $A(4t,3t)$，$B(-3s,4s)(s,t>0)$，则 $t=4t-3t$，$s=-3s+4s$ 都是正整数.

设$\triangle OAB$ 的内切圆半径为 r，则

$r=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot OM=\frac{\sqrt{2}}{2}p\cdot96\sqrt{1^2+7^2}=5p\times96$.

又 $OA=5t$，$OB=5s$，$AB=5\sqrt{t^2+s^2}$. 由 $OA+OB-AB=2r$，得

$5\sqrt{t^2+s^2}=5t+5s-2\times5p\times96$.

两边平方、整理得

$(t-192p)(s-192p)=2p^2\times96^2=2^{11}\times3^2\times p^2$.

因 $5t>2r$，$5s>2r$，故 $t-192p>0$，$s-192p>0$.

因此，所求三角形个数等于 $2^{11}\times3^2\times p^2$ 的正因数的个数，即

当 $p\neq2,3$ 时，共有$(11+1)(2+1)(2+1)=108$ 个直角三角形符号题意；

当 $p=2$ 时，共有$(13+1)(2+1)=42$ 个直角三角形合符题意；

当 $p=3$ 时，共有$(11+1)(4+1)=60$ 个直角三角形合符题意.

例 19 （2002 年全国高中联赛题）如图 5-19，有一列曲线 $P_0,P_1,P_2,\cdots$，已知 P_0 所围成的图形是面积为 1 的等边三角形 P_{k+1} 由对 P_k 进行如下操作得到：将 P_k 的每条边三等分，以每边中间部分的线段为外，向外作等边三角形，再将中间部分的线段去掉$(k=0,1,2,\cdots)$. 记 S_n 为曲线 P_n 所围成图形的面积.

(1)求数列$\{S_n\}$的通项公式；

(2)求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

解 如图 5-19，对 P_0 进行操作，易看出 P_0 的每变边变成 P_1 的 4 条边，故 P_1 的边数为 3×4；同样，对 P_1 进行操作，P_1 的每条边变成 P_2 的 4 条边，故 P_2 的边数为 3×4^2. 从而，易得 P_n 的边数为

3×4^n.

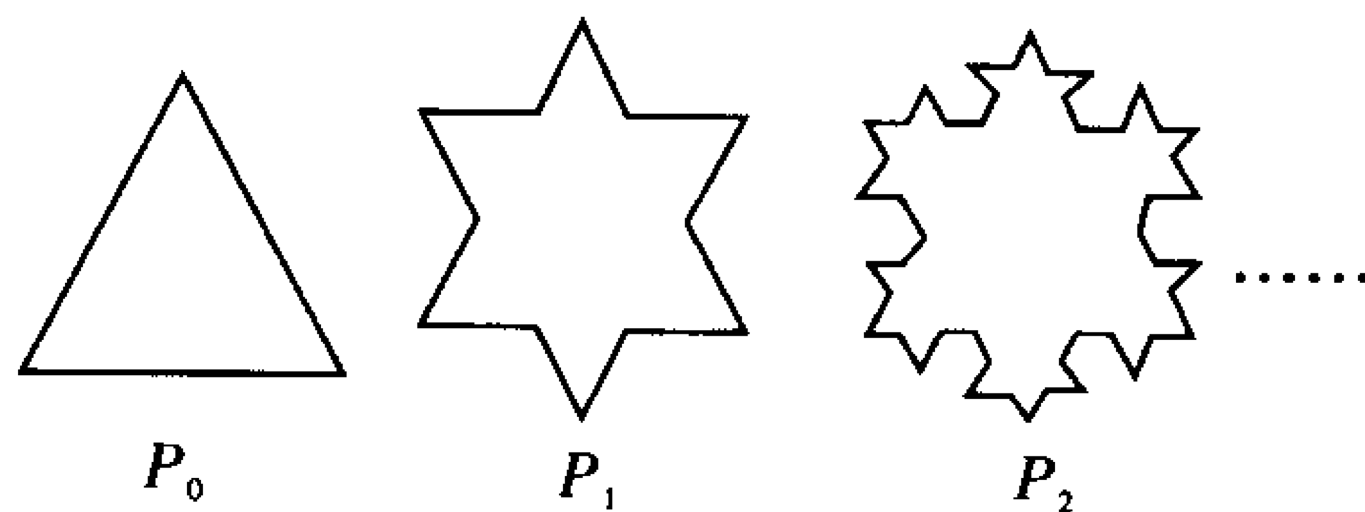


图 5-19

已知 P_0 的面积为 $S_0=1$. 比较 P_1 与 P_0，易看出 P_1 在 P_0 的每条边上增加了一个小等边三角形，其面积为$\frac{1}{3^2}$. 而 P_0 有 3 条边，故 $S_1=S_0+3\times\frac{1}{3^2}=1+\frac{1}{3}$. 再比较 P_2 与 P_1，可知 P_2 在 P_1 的每条边上增加了一个小等边三角形，其面积为$\frac{1}{3^2}\times\frac{1}{3^2}$. 而 P_1 有 3×4 条边，故 $S_2=S_1+3\times4\times\frac{1}{3^4}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}$.

类似地有 $S_3=S_2+3\times4^2\times\frac{1}{3^6}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}+\frac{4^2}{3^5}$.

于是猜想

$$S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}+\frac{4^2}{3^5}+\cdots+\frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{4^{k-1}}{3^{2k-1}}=1+\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}(\frac{4}{9})^k$$

$$=1+\frac{3}{4}\times\frac{\frac{4}{9}[1-(\frac{4}{9})^n]}{1-\frac{4}{9}}=1+\frac{3}{5}[1-(\frac{4}{9})^n]=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times(\frac{4}{9})^n. \quad ①$$

下面利用数学归纳法证明式①.

当 $n=1$ 时，由上面已知式①成立.

假设 $n=k$ 时，有 $S_k=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times(\frac{4}{9})^k$.

当 $n=k+1$ 时，易知第 $k+1$ 次操作后，比较 P_{k+1} 与 P_k，P_{k+1} 在 P_k 的每条边上增加了一个小等边三角形，其面积为$\frac{1}{3^{2(k+1)}}$，而 P_k 有 3×4^k 条边，故

$$S_{k+1}=S_k+3\times4^k\cdot\frac{1}{3^{2(k+1)}}=S_k+\frac{4^k}{3^{2k+1}}=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times(\frac{4}{9})^{k+1}$$

综上，由数学归纳法式①得证.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}[\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times(\frac{4}{9})^n]=\frac{8}{5}$.

例 20 （1998 年北京市中学生数学竞赛复赛试题）如图 5-20，矩形 $ABCD$ 中，$AB=20$ cm，$BC=10$ cm. 在 AC、AB 上各取一点 M、N，使得 $BM+MN$ 的值最小，求这个最小值.

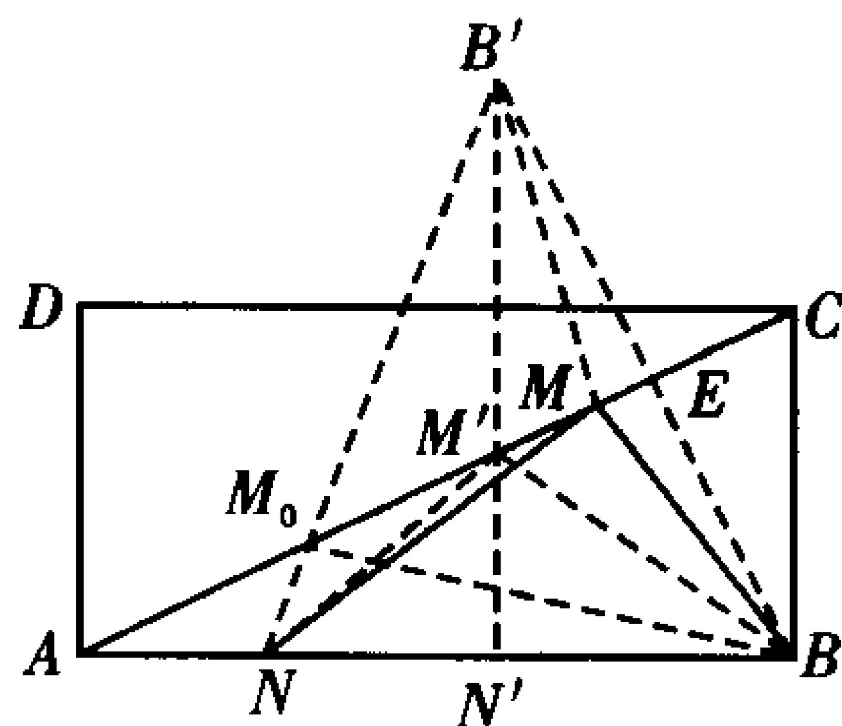


图 5-20

解 本题有两个动点 M、N，于是，先假定 N 为定点，故问题转化为在 AC 上求一点使其到同侧的两定点 B、N 距离之和最小. 利用轴对称变换，作点 B 关于 AC 的对称点 B'，BB' 交 AC 于 E，连结 $B'N$ 交 AC 于

M_0，连结 M_0B、MB'，易证 $MB+MN=MB'+MN\geqslant B'N$. 于是，要使 $BM+MN$ 最小，则只须 $B'N$ 最小. 过点 B' 作 $B'N'\perp AB$ 交 A 于 M'，垂足为 N'. 易知 B' 为定点，N 为 AB 上的动点，由垂线段最短性质，得 $B'N\geqslant B'N'$，故当 M、N 分别处于 M'、N' 的位置时 $BM+MN$ 值最小. 易得 $BE=4\sqrt{5}$，$\triangle B'N'B\backsim\triangle ABC$，于是，可得 $B'N=16$，故 $BM+MN$ 的最小值为 16.

例 21 （2001 年英国数学奥林匹克(第一轮)题）12 个人围着桌子坐成一圈，有多少种握手方法，使得 6 对握手的人胳膊不交叉？

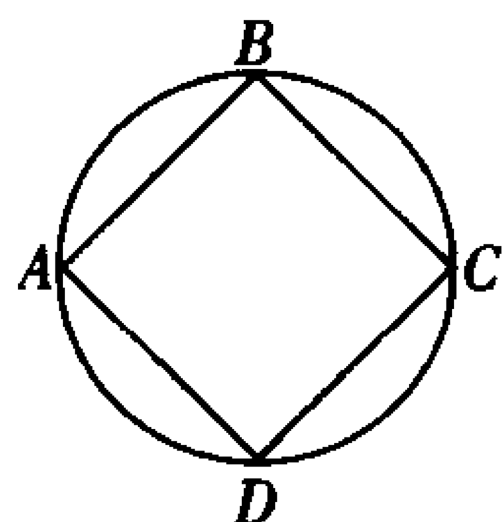


图 5-21

解 由题意，握手只在桌面上发生，而不会在其他人的背后.

设 N_p 表示 $2p$ 个人围圆桌坐成一圈而无胳膊交叉握手的方法总数，且每人只握一次手. 将每个人看作一点，不失一般性. 将其中一人——王某所在点记作 A. 由于握手成对发生，故在王某及与他握手的人两侧的人数必为 0 或偶数.

若有 2 个人，则只有一种握手方法，故 $N_1=1$.

若有 4 个人，王某可以和他相邻的人(如图 5-21 中 B 或 D)握手，但不能与对面的 C 握手，否则会发生交叉. 故 $N_2=2$.

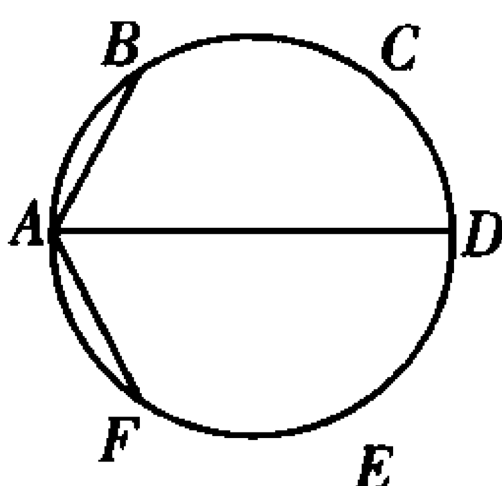


图 5-22

若有 6 个人，王某可以和他相邻的人(如图 5-22 中 B 或 F)握手，余下的 4 人有 N_2 种方法握手. 王某也可以和对面的 D 握手，在 AD 的两侧都有 2 个人，BC 和 FE 均有 N_1 种握手方法. 故 $N_3=2N_2+N_1^2=5$.

通过这种方法逐步求出 N_6.

当有 8 个个人时，王某可与邻座(如图 5-23 中的 B 或 H)握手. 余下在一侧的 6 人有 N_3 种握手方式. 王某也可与 D 或 F 握手，则在一侧的 2 个人有 N_1 种握手方式，另一侧的 4 个人有 N_2 种握手方式. 故 $N_4=2N_3+2N_1\times N_2=14$.

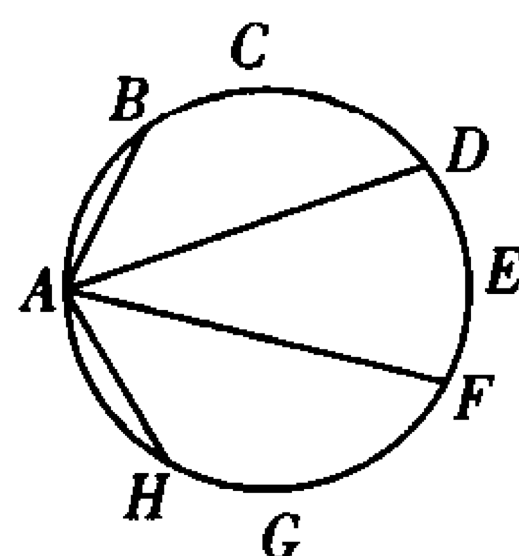


图 5-23

类似可得

$N_5=2N_4+2N_3+N_1+N_2^2=42$，

$N_6=2N_5+2N_4\times N_1+2N_3\times N_2=132$.

所以，此题解为 132.

注 数列 1，2，5，14，42，132…是著名的 Catalan 数. 若定义 $N_0=1$，则此数列通项为

$$N_k=\sum_{r=0}^{k-1}(N_r\times N_{k-r-1}).$$

例 22 （2002 年保加利亚春季数学竞赛题）已知平面直角坐标系 xOy，O 为原点. A 为整点，OA 的长度是一个奇素数的整数次幂. 证明：以 OA 为直径的圆周上的整点中至少有一半满足它们任意两点之间的距离是整数.

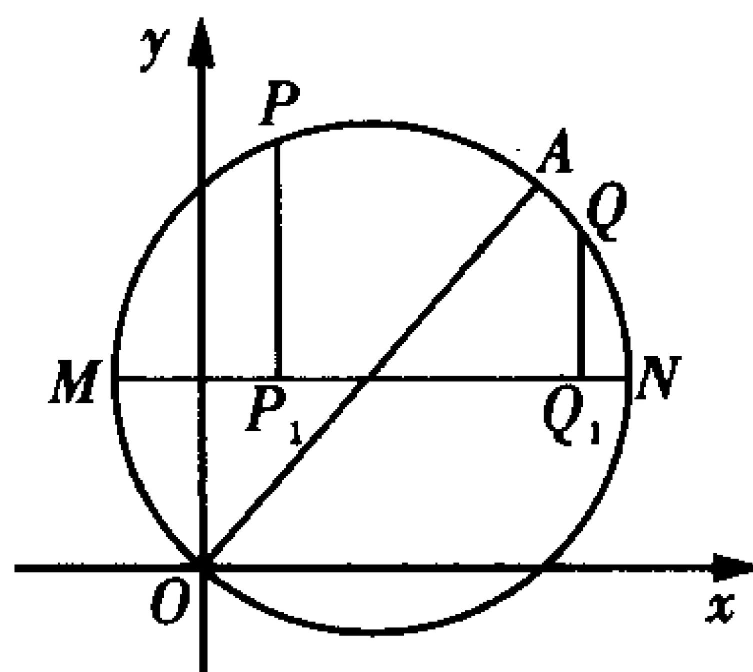


图 5-24

证明 设 $OA=p^n$，p 是大于 2 的素数，n 是一个正整数. 令 $A(x,y)$，且满足 $x^2+y^2=p^n$，则 x 是奇数，y 是偶数或 x 是偶数，y 是奇数. 不妨考虑第一种情况.

如图 5-24 过 OA 的中点$(\frac{x}{2},\frac{y}{2})$且与 Ox 平行的直径设为 MN，由于 y 是偶数，所以 M、N 的纵坐标为整数. 易知 M、N 的横坐标$\frac{x\pm p^n}{2}$也为整数. 令 $MN=p^n=d$. 在 MN

的同侧的圆周上取两个整点 P、Q,其在 MN 上的垂足分别为 P_1、Q_1,则

$$MP_1\cdot NP_1=PP_1^2.$$

由于 $MP_1+NP_1=p^n$,令$(MP_1,NP_1)=p^a$,则存在整数 l、m,且$(l,m)=1$,使得 $MP_1=p^al^2$,$NP_1=p^am^2$. 于是 $MP^2=MP_1\cdot MN$,即

$$MP=l\sqrt{p^ad},NP=m\sqrt{p^ad}.$$

同理,得 $MQ_1=p^bz^2$,$NQ_1=p^bt^2$,

且 $MQ=z\sqrt{p^bd}$,$NQ=t\sqrt{p^bd}$.

由托勒迷(Ptolemy)定理,得

$$PQ\cdot d+MP\cdot NQ=MQ\cdot PN.$$

从而,$PQ=(mz-lt)\sqrt{p^{a+b}}$.

因此,PQ 是整数当且仅当 a、b 的奇偶性相同. 而由假设,在圆周上的整点中至少有一半满足 a、b 是奇偶相同的. 故结论成立.

例 23 (2002 年日本数学奥林匹克(第二轮)题)已知在 xOy 平面上的 2002 个点组成的点集记作 S,且 S 中任意两点所连直线均不与坐标轴平行. 对于 S 中两个不同点 P、Q,考虑以 PQ 为对角线,其边分别平等地于坐标轴的矩形,W_{PQ} 表示 S 在此矩形内(不含 P、Q)的点的个数.

当命题"S 中的点无论在坐标平面上如何分布,在 S 中至少存在一对点 P、Q,满足 $W_{PQ}\geqslant N$"为真时,求 N 的最大值.

解 这里仅讨论与坐标轴平行的矩形. 对于 S 中的任意两点 P、Q,R_{PQ} 表示以 PQ 为对角线的矩形,W_{PQ} 表示 S 在矩形 R_{PQ} 中点的个数. 在此,P 与 Q 不必相异;若 P 与 Q 相同,则在矩形 R_{PQ} 内无点,记 $W_{PQ}=0$.

下面证明所求 N 的最大值为 400.

(1)无论将 S 的 2002 个点如何放置,总存在 P、$Q\in S$,满足 $W_{PQ}\geqslant 400$;

(2)若 S 中的 2002 个点按某种方式放置,则对 $\forall P$、$Q\in S$,有 $W_{PQ}\leqslant 400$.

首先证明(1). 给定点集 S 中有 2002 个点,记 S 中满足横坐标最小、纵坐标最小、横坐标最大、纵坐标最大的 4 个点分别为 A、B、C、D,此 4 点中的某 2 点可能相同.

故可断定 S 中异于 A、B、C、D 的任意一点(至少 1998 个)至少包含在矩形 R_{AB}、R_{BC}、R_{CD}、R_{DA}、R_{AC} 之一的内部. 此结论由以下三种情况得出:

(i)对于纵坐标小于 A 和 C 的某点 M. 若 M 的横坐标小于 B 的横坐标,则 M 在 R_{AB} 内;否则,M 在 R_{BC} 内.

(ii)对于纵坐标大于 A 和 C 的某点 M. 若其横坐标小于 D 的横坐标,则 M 在 R_{DA} 内;否则,M 在 R_{CD} 内.

(iii)对于某点的纵坐标在 A 和 C 之间,则此点在 R_{AC} 内.

这表明在 5 个矩形 R_{AB}、R_{BC}、R_{CD}、R_{DA}、R_{AC} 中至少有一个矩形包含了 S 中的多于 399 个点. 否则,S 中至多有除 A、B、C、D 外的 $399\times5=1995$ 个点,这与已知 S 有 2002 个点矛盾. 故(1)成立.

下面证明(2).

将 S 中的 2002 个点如图 5-25 放置,分为 E、F、G、H、I 这 5 个点组. 则有

(i)对任何一个矩形 R_{PQ}(P、$Q\in S$)至多包含一个点组;

(ii)此点组要么为 I 要么为至少包含 P、Q 之一的某个点组.



这说明以 S 中两点的连线段为对角线的矩形至多包含 S 中的 400 个点.

(1)和(2)得证. 故 N 的最大值为 400.

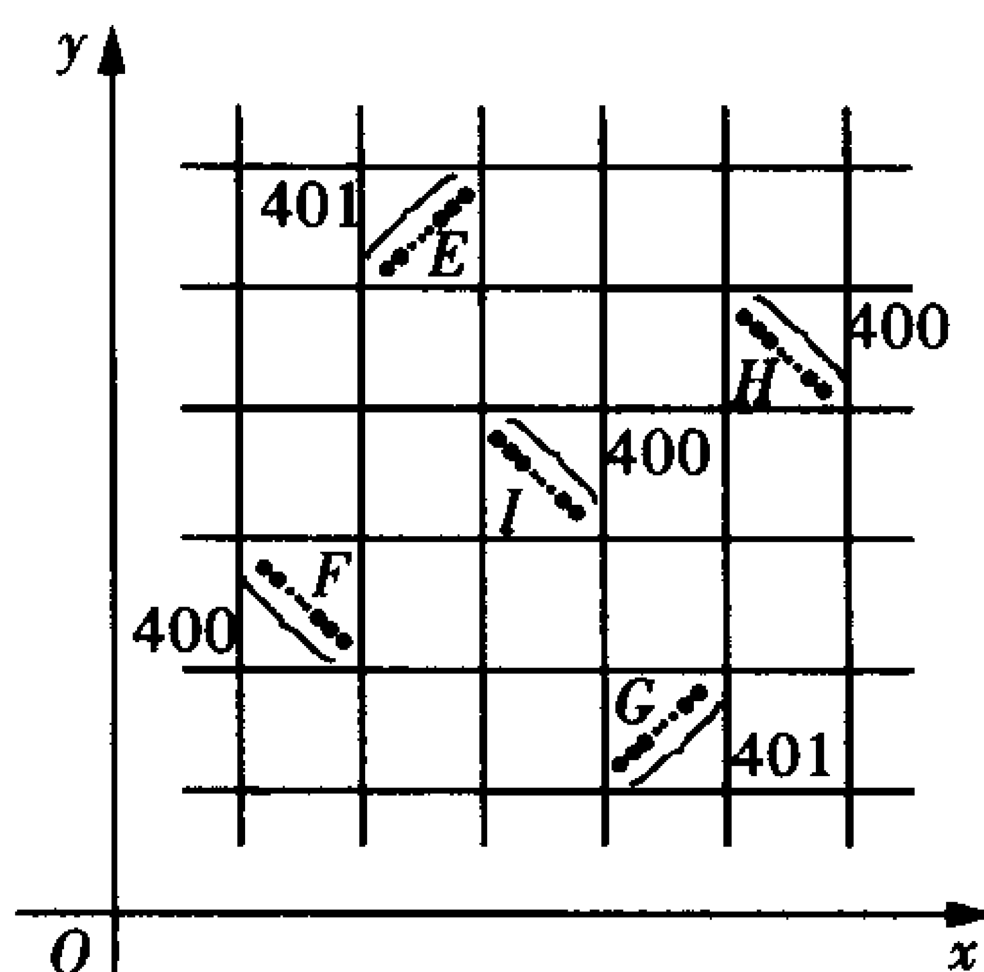


图 5-25

【解题尝试】

A 组

1. (2000 年河北省竞赛题)如果复数 z 满足 $|z|=1, A(-1,0)$、$B(0,-1)$ 是复平面上两点,那么函数 $f(z)=|(z+1)(\bar{z}-i)|$ 取最大值时,复平面上以 Z、A、B 三点为顶点的图形是(　　).

   A. 等边三角形　　B. 等腰三角形

   C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

2. 已知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$,当 $a\neq b$ 时,求证:$|f(a)-f(b)|<|a-b|$.

3. 已知 $a+b=1$,求证:$(a+1)^2+(b+1)^2\geqslant\frac{9}{2}$.

4. 由空间中一点 O 出发的四条射线,两两所成的角都相等,求这个角.

5. (1999 年全国高中数学联赛题)已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是正三角形,A 点在侧面 SBC 上的射影 H 是 $\triangle SBC$ 的垂心,二面角 $H-ABC$ 的平面角等于 $30°$,$SA=2\sqrt{3}$,那么三棱锥 $S-ABC$ 的体积为________.

6. (2000 年全国高中数学联赛题)一个球与正四面体的六条棱都相切,若正四面体的棱长为 a,则这个球的体积是__________.

7. (1999 年全国高中数学联赛题)已知:当 $x\in[0,1]$时,不等式 $x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\cdot\sin\theta>0$ 恒成立,试求 θ 的取值范围.

8. 设方程 $a\cos x+b\sin x+c=0(a^2+b^2\neq0)$ 在$[0,\pi]$中有两个相异实根 α 和 β,求 $\sin(\alpha+\beta)$的值.

9. 求函数$(\sqrt{2}\sin x-3\tan y)^2+(\sqrt{2}\cos x-3\cot y)^2$ 的最小值,其中 $x,y\in(0,\frac{\pi}{2})$.

10. 解方程 $\sqrt{x^2+6x+11}+\sqrt{x^2-6x+11}=10$.

11. 解关于 x 的不等式$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}<ax+\frac{1}{2}$.

12. 设 $a<0$ 为常数,解不等式 $\sqrt{a^2-ax}+2x>a$.

13. (1991 年全国高中数学联赛题)设正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 PO,M 为 PO 的中点,过 AM 作与棱 BC 平行的平面,将三棱锥截为上、下两部分,试求此两部分体积之比.

14. 设有一长方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$,其三棱 $AA_1=a$,$B_1A_1=b$,$A_1D_1=c$,M、N、P、Q 分别为 A_1B_1、A_1D_1、BC、CD 的中点. 求两三角形 AMN、C_1PQ 的重心间的距离.

B 组

1. (2003 年全国女子数学奥林匹克题)设$\triangle ABC$ 的三边长分别为 $AB=c$、$BC=a$、$CA=b$,a、b、c 互不

相等，AD、BE、CF 分别为$\triangle ABC$的三条内角平分线，且 $DE=DF$. 证明：

(1)$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$；

(2)$\angle BAC>90°$.

2. (第44届IMO预选题)设实数 a_{ij} 满足：当 $i=j$ 时，a_{ij} 为正数；当 $i\neq j$ 时，a_{ij} 为负数，其中 $i=1,2,3$；$j=1,2,3$. 证明：存在正实数 c_1、c_2、c_3，使得下列三个数

$a_{11}c_1+a_{12}c_2+a_{13}c_3$，$a_{21}c_1+a_{22}c_2+a_{23}c_3$，$a_{31}c_1+a_{32}c_2+a_{33}c_3$，

要么都是负数，要么都是正数，要么都是零.

3. (第44届IMO预选题)如图5-26，已知$\triangle ABC$内一点P，设D、E、F分别为点P在边BC、CA、AB上的投影. 假设 $AP^2+PD^2=BP^2+PE^2=CP^2+PF^2$，且$\triangle ABC$的三个旁心分别为 I_A、I_B、I_C. 证明：P 是$\triangle I_AI_BI_C$的外心.

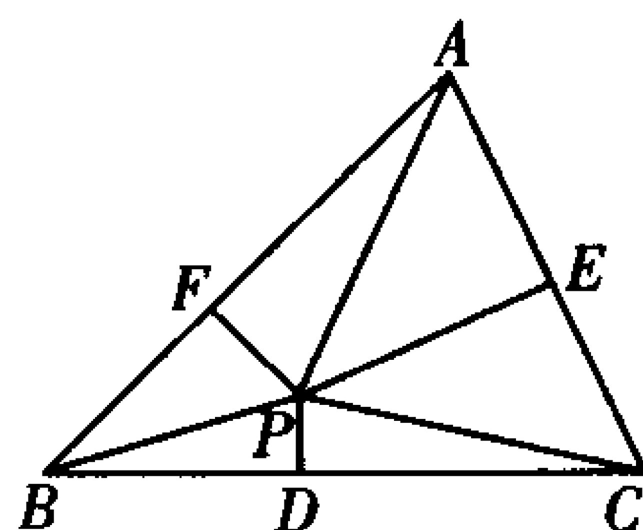


图 5-26

4. (2004年IMO中国国家队集训选拔赛题)设$\angle XOY=90°$，P为$\angle XOY$内的一点，且$OP=1$，$\angle XOP=30°$，过点P任意作一条直线分别交射线OX、OY于点M、N. 求 $OM+ON-MN$ 的最大值.

5. (2004年IMO中国国家队集训选拔赛题)设 a、b、c 是周长不超过 2π 的三角形的三条边长. 证明：$\sin a$、$\sin b$、$\sin c$ 可构成三角形的三条边长.

6. (第43届IMO预选题)如图5-27，设$\triangle ABC$内存在一点F，使得$\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA$，直线$BF$、$CF$分别交$AC$、$AB$于$D$、$E$. 证明：$AB+AC\geqslant 4DE$.

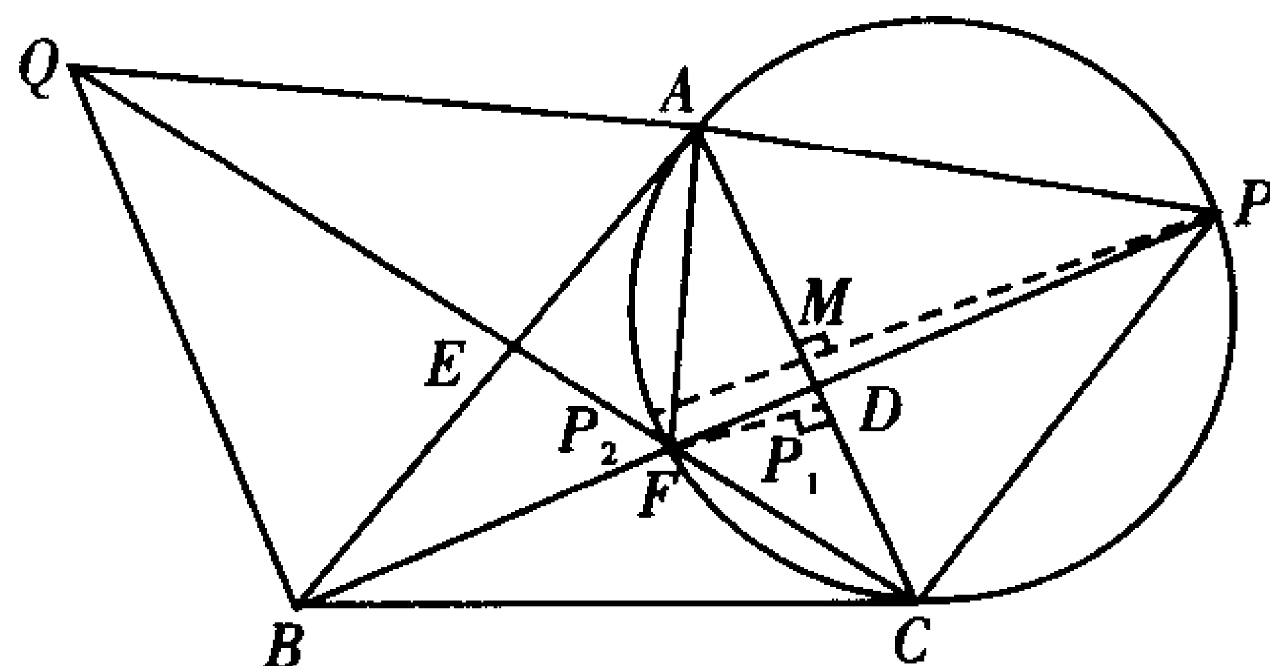


图 5-27

7. (第42届IMO试题)设锐角$\triangle ABC$的外心为O，从A作BC的高，垂足为P，且$\angle BCA\geqslant\angle ABC+30°$. 证明：$\angle CAB+\angle COP<90°$.

8. (第51届捷克和斯洛伐克数学奥林匹克(开卷)题)求所有有且只有四条棱长等于 a 的四面体，将其展为平面图形后是一个筝形，且非菱形.

9. (第42届IMO预选题)定义一个"k—团"为一个 k 个人的集合，使得他们中的每一对都互相认识. 在某次集会上，每两个"3—团"中至少有一个人是公共的，且不存在"5—团". 证明：在这次集会上存在两个(或更少的)人，当他们离开后，不再有"3—团"出现.

第 6 章 设想法

【学习目标】

设想是真理的基石，对问题进行大胆设想，然后进行探求，是发现真理的重要手段. 设想是创造源泉，只有敢于设想，才会有新的发现.

设想指的是对一个问题从各种不同的角度揣摸其来龙去脉，推测其发展变化的趋势和可能，来构思各种不同的处理方案.

在解数学竞赛题中，仔细分析了题目条件和结论后，为了拟定出初步的解题计划，常常作一些假定：假定题目的结论具有某种性质或形式；假定题目可以化成某种特定的类型；假定某种解题方法可以应用到本题中；假定题设条件中还可发掘出某种我们希望有的隐含条件等等. 借助于假定的参与，形成新构思，实施之后，或导出矛盾促使我们再假定，或使问题获得展开思路，这样的解题方法称之为设想法①.

在数学解题中，正确地运用设想可以培养我们敏锐的观察力和丰富的想像力. 设想当然不是毫无根据的胡猜乱想，必须综合分析题目后作出“言之成理”的构想，然后再进行“持之有据”的论证. 当然，每次设想不一定都正确，在探求思路的过程中发现了矛盾，就回过头来修改原来的设想，逐步找到正确解题的途径.

【解题钥匙】

1. 目标认可设想

目标认可设想，就是承认题设结论为真或假设题求结果，或预先作出某种假定，若由此推导出的结论或结果与实际情况或规律、公理、定理等相符，则可确认；若由此推导出的结果荒谬或产生矛盾，则可排除或取其相反的结论.

我们解题时一种绝招——设想问题已解，就是我们常运用的目标认可设想之一.

例 1 (2002 年全国高中联赛题)直线$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$与椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$相交于 A、B 两点，椭圆上有点 P，使得$\triangle PAB$ 面积等于 3. 这样的点 P 共有(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解 选 B. 理由：假设 $P_1(4\cos\alpha,3\sin\alpha)(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，即点 P_1 在第一象限的椭圆上为所求的点. 如图 6-1，考虑四边形 P_1AOB 的面积 S，有

$S=S_{\triangle OAP_1}+S_{\triangle OBP_1}$

① 沈文选. 中学数学解题典型方法例说[M]. 长沙：湖南师范大学出版社，1996：61～86.

$=\frac{1}{2}\times4(3\sin\alpha)+\frac{1}{2}\times3(4\cos\alpha)$

$=6(\sin\alpha+\cos\alpha)=6\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$.

从而 $S_{\max}=6\sqrt{2}$(此时 $\alpha=\frac{\pi}{4}$).

因为 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times4\times3=6$ 为定值,所以 $S_{\triangle P_1AB}$ 的最大值为 $6\sqrt{2}-6$.

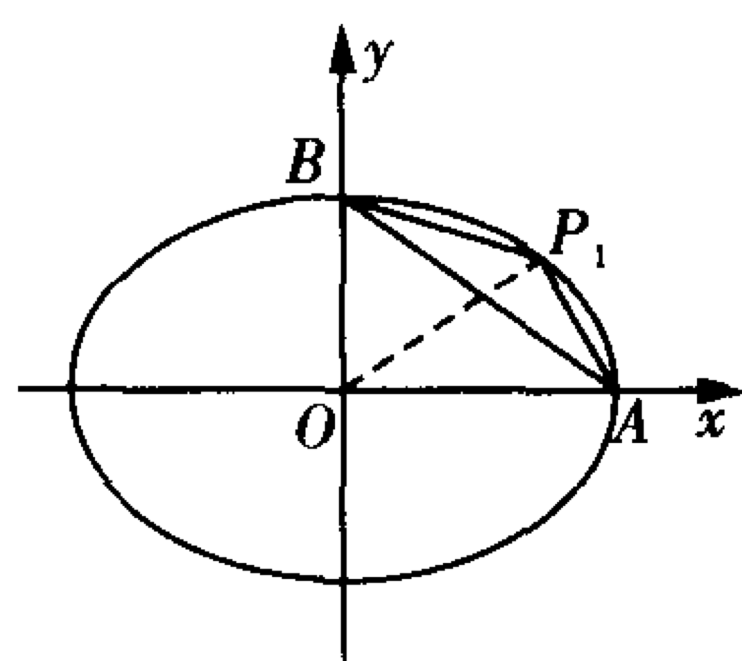


图 6-1

因为 $6\sqrt{2}-6<3$,所以点 P 不可能在直线 AB 的上方,显然在直线 AB 的下方有两个点 P.

例 2 (2004 年全国高中联赛题)设三位数 $n=\overline{abc}$. 若以 a、b、c 为三条边长可以构成一个等腰(含等边)三角形,则这样的三位数 n 有(　　)个.

A. 45　　B. 81　　C. 165　　D. 216

解 选 C. 理由:a、b、c 要能构成三角形的边长,显然均不为 0,即 a、b、$c\in\{1,2,\cdots,9\}$.

(1)若构成等边三角形,假设这样的三位数的个数为 n_1. 因三位数中 3 个数码都相同,则 $n_1=C_9^1=9$.

(2)若构成等腰(非等边)三角形,假设这样的三位数的个数为 n_2. 因三位数中只有 2 个不同数码,设为 a、b. 注意到三角形腰与底可置,故可取的数码组(a、b)共有 $2C_9^2$. 但当大数为底时,设 $a>b$,必须满足 $b<a<2b$. 此时,不能构成三角形的数码共 20 种情况,见下表:

a	9	8	7	6	5	4	3	2
b	4,3,2,1	4,3,2,1	3,2,1	3,2,1	1,2	1,2	1	1

同时,每个数码组(a,b)中的 2 个数码填上 3 个数位,有 C_3^2 种情况. 所以,$n_2=C_3^2(2C_9^2-20)=156$.

综上所述,$n=n_1+n_2=165$.

例 3 (《中等数学》2004 年 5 期奥林匹克训练题)设 $a\in\mathbf{R}$,$A=\{x\mid2^{1+x}+2^{1-x}=a\}$,$B=\{\sin\theta\mid\theta\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素,试求 a 的取值范围.

解 注意到 $B=[-1,1]$,$0\in B$,显然 $a=2^{1+x}+2^{1-x}\geqslant2\sqrt{2^{1+x}\cdot2^{1-x}}=4$,当且仅当 $2^{1+x}=2^{1-x}$,即 $x=0$ 时,等号成立. 故 $a=4$ 满足题目要求.

下面证明:$a>4$ 都不满足题目要求.

假设 $a>4$,且有一个非零解 $x_1\in B=[-1,1]$,则 $a=2^{1+x_1}+2^{1-x_1}=2^{1+(-x_1)}+2^{1-(-x_1)}$,这就意味着还有另一个非零解 $x_2=-x(x_2\neq x_1)\in B$,这与 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素矛盾. 故 $a>4$ 均不满足题目要求.

例 4 (2000 年河北省竞赛题)已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象过点$(-1,0)$. 问是否存在常数 a、b、c,使不等式 $x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2)$对一切实数 x 都成立? 若存在,求出 a、b、c 的值;若不存在,说明理由.

解 假设存在符合条件的 a、b、c.

因 $f(x)$的图象过$(-1,0)$,

则 $f(-1)=0$,即 $a-b+c=0$.

又因 $x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2)$对一切实数 x 都成立,令 $x=1$,则

$1\leqslant a+b+c\leqslant\frac{1}{2}(1+1^2)=1$.

则 $a+b+c=1$.

从而 $b=\frac{1}{2}$,$a+c=\frac{1}{2}$.

故 $f(x)=ax^2+\frac{1}{2}x+(\frac{1}{2}-a)$.

由 $\begin{cases}f(x)\geqslant x,\\ f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2),\end{cases}$

得 $\begin{cases}ax^2-\frac{1}{2}x+(\frac{1}{2}-a)\geqslant 0, & ①\\ (a-\frac{1}{2})x^2+\frac{1}{2}x-a\leqslant 0. & ②\end{cases}$

据题意,对于任意实数 x,①与②都成立.

对于①,若 $a=0$,则 $x\leqslant 1$,不合题意;若 $a>0$,欲使①的解集为 **R**,则需

$\begin{cases}a>0,\\ \Delta\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a>0,\\ \frac{1}{4}-4a(\frac{1}{2}-a)\leqslant 0.\end{cases}$

解之得 $a=\frac{1}{4}$.

对于 $a=\frac{1}{4}$,再考虑②. 把 $a=\frac{1}{4}$代入②得

$x^2-2x+1\geqslant 0$.

其解集为 **R**.

所以,存在满足条件的 a、b、c,其中,$a=b=c=\frac{1}{4}$,$b=\frac{1}{2}$.

我们在求解某些“讨论存在性”问题时,先假定满足题设条件的对象存在,据此推理得到某个结论,再用题设条件及已知的知识检验这个结论,相符则说明所求对象可能存在,相悖则不存在. 这是目标认可设想中的一种手法——假定验证法.

例 5 (第 51 届捷克和斯洛伐克数学奥林匹克(决赛)题)证明:正整数 A 是完全平方数的充分必要条件是对于任意正整数 n,$(A+1)^2-A$,$(A+2)^2-A$,…,$(A+n)^2-A$ 中至少有一项可以被 n 整除.

解 假设 $A=d^2$,则$(A+j)^2-A=(d^2+j)^2-d^2=(d^2-d+j)(d^2+d+j)$. 由于 d^2-d+j 对于 $j=1,2,\cdots,n$ 是连续的 n 个正整数,所以,一定有某个 j 使得$(A+j)^2-A$ 可以被 n 整除.

假设 A 不是完全平方数,则 A 中一定有一个素因子,其指数为奇数次幂,即存在 k,使得 $p^{2k-1}\mid A$,$p^{2k}\nmid A$. 取 $n=p^{2k}$,对于 $j=1,2,\cdots,p^{2k}$,一定存在一项 j,使得 $p^{2k}\mid(A+j)^2-A$. 因为 $p^{2k}\nmid A$,所以 $p^{2k}\nmid(A+j)^2$. 但是由 $p^{2k}\mid(A+j)^2-A$ 得 $p^{2k-1}\mid(A+j)^2-A$,而 $p^{2k-1}\mid A$,所以 $p^{2k-1}\mid(A+j)^2$. 由于 $(A+j)^2$ 是完全平方数,则一定有 $p^{2k}\mid(A+j)^2$. 矛盾.

例 6 (《数学通报》问题 1488 题)试证任何 11 个连续正整数中,定有一个数(设为 k),使得 $(k,210)=1$.

证明 设这 11 个数为 $a,a+1,a+2,a+3,a+4,a+5,a+6,a+7,a+8,a+9,a+10$.

(1)若 a 为奇数,则 $a,a+2,a+4,a+6,a+8,a+10$ 为奇数,其余的是偶数.

在这 6 个奇数中,含 3 做因子的最多有 2 个. 因为设 a_0 是含 3 做因子的最小者,如果还有含 3 作因子的数,定是形如 a_0+6t 的数(因为 a_0+m 是奇数,又 $3|m$,所以 $2|m$,知 $6|m$,所以 $m=6t$),而 $6t\leqslant 10$,知 t 最多取值 1. 故含 3 做因子的数最多有 2 个. 又,在这 6 个奇数中含 5 做因子的最多有 2 个(因为设含 5 做因子的最小者为 b_0,则其他含 5 做因子的数形如 b_0+10t,$10t\leqslant 10$,t 最多取值 1). 同理知这 6 个奇数中含 7 做因子的最多有 1 个. 因此仅这 6 个奇数中至少有 1 个数不含 3,5,7 做因子,令此数为 k,则 $1=(k,3)=(k,5)=(k,7)=(k,2)\Rightarrow 1=(k,2\times3\times5\times7)=(k,210)$,在这种情况下,原命题成立.

(2)若 a 为偶数,则 $a+1,a+3,a+5,a+7,a+9$ 为奇数.

在这 5 个奇数中,含 3 做因子的数最多有 2 个(理由同(1)的论述),含 5 做因子的最多有 1 个,含 7 做因子的最多有 1 个. 因此,这 5 个奇数中不含 3,5,7 做因子的数至少有 1 个,命此数为 k,则

$$1=(k,2)=(k,3)=(k,5)=(k,7)=(k,2\cdot3\cdot5\cdot7)=(k,210).$$

根据(1)与(2)知原命题获证.

例 7 (第 28 届俄罗斯数学奥林匹克题)有一个红色卡片盒和 k 个 $(k>1)$ 蓝色卡片盒,还有一副卡片,共有 $2n$ 张,它们被分别编为 1 至 $2n$ 号. 开始时,这副卡片被按任意顺序叠置在红色卡片盒中. 从任何一个卡片盒中都可以取出最上面的一张卡片,或者把它放到空盒中,或者把它放到比它号码大 1 的卡片的上方. 对于怎样的最大的 n,可以通过这种操作把所有卡片移到其中一个蓝色卡片盒中?

解 首先证明对于更大的 n,不一定能够做到. 假设开始时,红盒中的卡片自上而下先放奇数号码的(按任意顺序),然后放号码为 $2n$ 的,再放其余偶数号码的(按任意顺序). 那么,前 k 步惟一确定(奇数号码的卡片相继放到空的蓝盒之中),接下来,如果 $n>k$,则已经不能再进行;如果 $n=k$,则只能把 $2n-1$ 号卡片放回红盒,于是等于没动. 所以,此时无法按照要求移动卡片.

假设 $n<k$,我们来证明一定可以按照要求移动卡片.

将卡片组合为对子

$$(1,2),(3,4),\cdots,(2n-1,2n),$$

将每一个对子对应一个空的蓝盒,此时至少有一个蓝盒无对子对应(称为"自由盒"). 我们依次将红盒中最上方的卡片移动到其"自己的"蓝盒之中,如果到某一步不能进行时,则必定是某一张号码为 $2i-1$ 的卡片已经先行进入"自己的"蓝盒,因而使得 $2i$ 号卡片不能进入"自己的"蓝盒. 此时就将 $2i$ 号卡片放入"自由盒"中,再把 $2i-1$ 号卡片移到其上方,而把它们原来的蓝盒改称为"自由盒". 这样一来,便可把每一对卡片移入一个蓝盒,并且是号码小的在上. 此时再借助于"自由盒",便可以把所有卡片全都移入一个蓝盒.

故所求最大 $n=k-1$.

例 8 (2003 年 IMO 中国国家队集训选拔赛题)设 $A\subseteq\{0,1,2,\cdots,29\}$,满足:对任何整数 k 及 A 中任意数 a、b(a、b 可以相同),$a+b+30k$ 均不是两个相邻整数之积. 试定出所有元素个数最多的 A.

解 设 A 满足题中条件且 $|A|$ 最大.

因为两个相邻整数之积被 30 除,余数为 0,2,6,12,20,26,则对任意 $a\in A$,有

$2a \neq 0,2,6,12,20,26 \pmod{30}$,

即 $a \neq 0,1,3,6,10,13,15,16,18,21,25,28 \pmod{30}$.

因此,$A \subseteq \{2,4,5,7,8,9,11,12,14,17,19,20,22,23,24,26,27,29\}$.

后一集合可分拆成下列10个子集的并,其中每一个子集至多包含 A 中一个元素:

$\{2,4\},\{5,7\},\{8,12\},\{11,9\},\{14,22\},\{17,19\},\{20\},\{23,27\},\{26,14\},\{29\}$.

故 $|A| \leqslant 10$.

若 $|A|=10$,则每个子集恰好包含 A 中一个元素,因此,$20 \in A, 29 \in A$.

由 $20 \in A$ 知 $12 \notin A, 22 \notin A$,从而 $8 \in A, 14 \in A$. 这样,$4 \notin A, 24 \notin A$,因此,$2 \in A, 26 \in A$.

由 $29 \in A$ 知 $7 \notin A, 27 \notin A$,从而,$5 \in A, 23 \in A$. 这样,$9 \notin A, 19 \notin A$,因此,$11 \in A, 17 \in A$.

综上有 $A=\{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29\}=\{3l+2 \mid 0 \leqslant l \leqslant 9\}$,此 A 确实满足要求.

解题时,还未动手(或刚动手),就"假设问题已解",这是数学解题中最大胆、最基本、最朴素的构想. 它适用于"要求作图形的问题",也适用于"要寻求的问题"和"要证明的问题". 它的基本形式是,设想所求的东西已得,由此而觅取到关键的信息.

例 9 (2004年全国高中联赛题)在平面直角坐标系 xOy 中,给定三点 $A(0,\frac{4}{3})$,$B(-1,0)$,$C(1,0)$,点 P 到直线 BC 的距离是该点到直线 AB、AC 距离的等比中项.

(1)求点 P 的轨迹方程;

(2)若直线 l 经过 $\triangle ABC$ 的内心(设为 D),且与点 P 的轨迹恰好有3个公共点,求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

解 (1)直线 AB、AC、BC 的方程依次为

$y=\frac{4}{3}(x+1), y=-\frac{4}{3}(x-1), y=0$.

点 $P(x,y)$ 到 AB、AC、BC 的距离依次为

$d_1=\frac{1}{5}|4x-3y+4|, d_2=\frac{1}{5}|4x+3y-4|$,

$d_3=|y|$,且 $d_1d_2d_3 \neq 0$.

依题设得 $|16x^2-(3y-4)^2|=25y^2$,

即 $16x^2-(3y-4)^2+25y^2=0$,

或 $16x^2-(3y-4)^2-25y^2=0$.

化简得点 P 的轨迹方程为

圆 $S: 2x^2+2y^2+3y-2=0$ 与双曲线 $T: 8x^2-17y^2+12y-8=0$,且不含 B、C 两点.

(2)由前知,点 P 的轨迹包含两部分

$$2x^2+2y^2+3y-2=0, \quad ①$$

与 $$8x^2-17y^2+12y-8=0. \quad ②$$

(不含 B、C 两点.)

由 $d_1=d_2=d_3$,知 $\triangle ABC$ 的内心 D 是适合题设条件的点,解得 $D(0,\frac{1}{2})$,且知它在圆 S 上.

直线 l 经过 D,且与点 P 的轨迹有3个公共点,所以,直线 l 的斜率存在. 设直线 l 的方程为

$$y=kx+\frac{1}{2}. \quad ③$$

(i)当$k=0$时，直线l与圆S相切，有惟一的公共点D;此时，直线$y=\frac{1}{2}$平行于x轴，表明直线l与双曲线T有不同于D的两个公共点，所以，直线l恰好与点P的轨迹有3个公共点.

(ii)当$k\neq0$时，由于B、C两点不在轨迹上，所以$k\neq\pm\frac{1}{2}$. 这时，直线l与点P的轨迹恰有3个公共点，必有直线l与圆S有两个不同的交点，且直线l与双曲线T有且只有一个公共点，即方程组

$$\begin{cases}8x^2-17y^2+12y-8=0,\\ y=kx+\frac{1}{2}\end{cases}$$

有且只有一组实数解. 消去y并化简得

$$(8-17k^2)x^2-5kx-\frac{25}{4}=0. \quad ④$$

或 $$(-5k)^2+4(8-17k^2)\frac{25}{4}=0. \quad ⑤$$

解④得$k=\pm\frac{2\sqrt{34}}{17}$，解⑤得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

综上所述，直线l的斜率k的取值范围是有限集

$$\{0,\pm\frac{2\sqrt{34}}{17},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}.$$

例10 （第45届IMO试题）试求出所有的实系数多项式$P(x)$，使得对满足$ab+bc+ca=0$的所有实数a、b、c，都有

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c).$$

解 由题设知，对任给的a、b、$c\in\mathbf{R}$，满足$ab+bc+ca=0$，有

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c). \quad ①$$

在式①中，令$a=b=c=0$，有$P(0)=0$.

令$b=c=0$，对任给实数a有

$$P(-a)=P(a).$$

因此，$P(x)$的所有奇次项系数为0. 不妨设

$$P(x)=a_nx^{2n}+\cdots+a_1x^2+a_0, a_n\neq0.$$

在式①中，令$b=2a$，$c=-\frac{2}{3}a$，有

$$P(-a)+P(\frac{8}{3}a)+P(-\frac{5}{3}a)=2P(\frac{7}{3}a).$$

故 $$a_n[1+(\frac{8}{3})^{2n}+(\frac{5}{3})^{2n}-2(\frac{7}{3})^{2n}]a^{2n}+\cdots+a_1[1+(\frac{8}{3})^2+(\frac{5}{3})^2-2(\frac{7}{3})^2]a^2+a_0=0.$$

上式对所有$a\in\mathbf{R}$成立，故关于a的多项式的所有系数均为0.

当$n\geqslant3$时，由$8^6=262144>235298=2\times7^6$知

$$(\frac{8}{7})^{2n}\geqslant(\frac{8}{7})^6>2.$$

从而，$1+(\frac{8}{3})^{2n}+(\frac{5}{3})^{2n}-2(\frac{7}{3})^{2n}>0.$

因此，$n\leqslant2$.

设 $P(x)=\alpha x^4+\beta x^2$，$\alpha$、$\beta\in\mathbf{R}$.

下面验证 $P(x)=\alpha x^4+\beta x^2$ 满足要求.

设 a、b、$c\in\mathbf{R}$，$ab+bc+ca=0$，则

$$\begin{aligned}&(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4-2(a+b+c)^4\\&=\sum(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)-2(a^2+b^2+c^2)^2\\&=\sum(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)-2a^4-2b^4-2c^4-4a^2b^2-4a^2c^2-4b^2c^2\\&=\sum(-4a^3b+2a^2b^2-4ab^3)\\&=-4a^2(ab+ca)-4b^2(bc+ab)-4c^2(ca+bc)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\&=4a^2bc+4b^2ca+4c^2ab+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\\&=2(ab+bc+ca)^2=0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-2(a+b+c)^2\\&=\sum(a^2-2ab+b^2)-2\sum a^2-4\sum ab=0.\end{aligned}$$

其中，$\sum$表示循环和.

因此，$P(x)=\alpha x^4+\beta x^2$ 满足要求.

在求解某些竞赛题时，为了求得已知类型的对象，如函数、曲线方程、多项式、等式、不等式等表达式，可先设想出含有特定系数且符合该类型对象的相应表达式. 然后再根据题条件求出待定系数，从而最终求得问题的解，这就是目标认可设想中的又一重要手法——待定系数法.

2. 问题特定设想

在求解某些数学竞赛题时，为讨论问题的方便，对问题作特定的设想：考虑其特殊性、一般性、存在性、惟一性等等，或对问题中某一侧面、某一层面作特定考虑：假设大小顺序、假定某种结构或状态等，然后根据特定的设想进行推演，凑合解题.

例 11 (2002 年安徽省竞赛题)已知函数 $f(x)=x^2+2bx+1$ 和 $g(x)=2a(x+b)$，其中 x、a、b 均为实数，使 $y=f(x)$和 $y=g(x)$在 xOy 平面上的图象不相交的实数对(a,b)组成点集 A. 那么，A 在 aOb 平面上表示的图形 S 的面积为________.

解 填 π. 理由：设数对(a,b)满足要求，即使方程 $x^2+2bx+1=2a(x+b)$无实数根.

从而 $\Delta=[2(b-a)]^2-4(1-2ab)<0$，得

$a^2+b^2<1$.

在 aOb 平面上，满足这个条件的(a,b)组成的点集 A 是单位圆(不含边界圆周)的内部区域.

因此，图形 S 的面积为 $\pi\times1^2=\pi$.

例 12 (2002 年湖南省竞赛题)设关于 x 的一元二次方程 $2x^2-tx-2=0$ 的两个根为 α、$\beta(\alpha<\beta)$.

(1)若 x_1、x_2 为区间$[\alpha,\beta]$上的两个不同的点，求证：$4x^2x_2-t(x_1+x_2)-4<0$；

(2)设 $f(x)=\dfrac{4x-t}{x^2+1}$，$f(x)$在区间$[\alpha,\beta]$上的最大值和最小值分别为 $f_{\max}$和 $f_{\min}$，$g(t)=f_{\max}-f_{\min}$. 求 $g(t)$的最小值.

解 (1)由条件得，$\alpha+\beta=\dfrac{t}{2}$，$\alpha\beta=-1$.

不妨设 $\alpha\leqslant x_1<x_2\leqslant\beta$，则

$0\geqslant4(x_1-a)(x_2-\beta)=4x_1x_2-4(\alpha x_2+\beta x_1)+4\alpha\beta$

$=4x_1x_2-2(\alpha+\beta)(x_1+x_2)+4\alpha\beta+2(\alpha-\beta)\cdot(x_1-x_2)$

$>4x_1x_2-2(\alpha+\beta)(x_1+x_2)+4\alpha\beta=4x_1x_2-t(x_1+x_2)-4.$

故 $4x_1x_2-t(x_1+x_2)-4<0.$

(2)依据题意,$\alpha=\dfrac{t-\sqrt{t^2+16}}{4}$,

$\beta=\dfrac{t+\sqrt{t^2+16}}{4}.$

所以,$f(\alpha)=\dfrac{-8}{\sqrt{t^2+16}-t}$,$f(\beta)=\dfrac{8}{\sqrt{t^2+16}+t}.$

故 $f(\alpha)\cdot f(\beta)=-4<0.$

又任取 x_1、$x_2\in[\alpha,\beta]$,且 $x_1<x_2$,则

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{[4+t(x_1+x_2)-4x_1x_2]}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}(x_1-x_2).$

由(1)知,$f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,$f(x)$在区间$[\alpha,\beta]$上是增函数.

故 $f_{\max}=f(\beta)>0$,$f_{\min}=f(\alpha)<0.$

$g(t)=f(\beta)-f(\alpha)$

$=|f(\beta)|+|f(\alpha)|$

$\geqslant 2\sqrt{|f(\beta)|\cdot|f(\alpha)|}=4.$

当且仅当 $f(\beta)=-f(\alpha)=2$,

即 $\dfrac{8}{\sqrt{t^2+16}+t}=2$,亦即 $t=0$ 时取等号.

故 $g(t)$的最小值为 4.

例 13 (2002 年上海市竞赛题)纸上写有 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个正整数,第 1 步划去前面 4 个数 1,2,3,4,在 n 的后面写上划去的 4 个数的和 10;第 2 步再划去前面的 4 个数 5,6,7,8,在最后写上划去的 4 个数的和 26;如此下去(即每步划去前面 4 个数,在最后面写上划去的 4 个数的和).

(1)若最后只剩下一个数,则 n 应满足的充要条件是什么?

(2)取 $n=2002$,到最后只剩下一个数为止,所有写出的数(包括原来的 $1,2,\cdots,2002$)的总和是多少?

解 (1)每经一步,纸上的数减少 3 个,若 n 个数经 p 步只剩下 1 个数,则 $n-3p=1$,即 $n=3p+1$.

故 n 满足的充要条件是 n 除以 3 余 1.

(2)假定原先有 4^k 个数,其和为 S,当这 4^k 个数划完,需 4^{k-1} 步,纸上剩下 4^{k-1} 个数,且这 4^{k-1} 个数的和等于原来 4^k 个数的和 S. 故当最后剩下 1 个数时,所写出的数的总和为$(k+1)S$.

$2002=1024+978=4^5+978$. 原来 2002 个数经$\dfrac{978}{3}=326$ 步后,剩下 4^5 个数,被划去的数是 $1,2,3,\cdots,1304$(注意 $1304=4\times326$),而纸上剩下的 4^5 个数的和就是 $1+2+\cdots+2002$. 因此最后只剩下 1 个数时,所写出的数的总和为$(1+2+\cdots+1304)+6(1+2+3+\cdots+2002)=12880878$.

例 14 (2003 年全国高中联赛题)一张纸上画有半径为 R 的$\odot O$ 和圆内一定点 A,且 $OA=a$. 折叠纸片,使圆周上某一点 A'刚好与点 A 重合,这样的每一种折法,都留下一条直线折痕. 当 A'取遍圆

周上所有点时，求所有折痕所在直线上点的集合.

解 如图 6 - 2，建立直角坐标系，则有 $A(a,0)$. 设折叠时$\odot O$上点$A'(R\cos\alpha,R\sin\alpha)$与点 A 重合，而折痕为直线 MN，则 MN 为线段 AA' 的中垂线. 设 $P(x,y)$为 MN 上任意一点，则$|PA'|=|PA|$，即

$$(x-R\cos\alpha)^2+(y-R\sin\alpha)^2=(x-a)^2+y^2.$$

所以，$\dfrac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{R^2-a^2+2ax}{2R\sqrt{x^2+y^2}}$.

得 $\sin(\theta+\alpha)=\dfrac{R^2-a^2+2ax}{2R\sqrt{x^2+y^2}}$，其中

$$\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\cos\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

故$\left|\dfrac{R^2-a^2+2ax}{2R\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$.

平方后可化为

$$\frac{(2x-a)^2}{R^2}+\frac{4y^2}{R^2-a^2}\geqslant 1.$$

因此，所求点的集合为$\dfrac{(2x-a)^2}{R^2}+\dfrac{4y^2}{R^2-a^2}=1$外(含边界)部分.

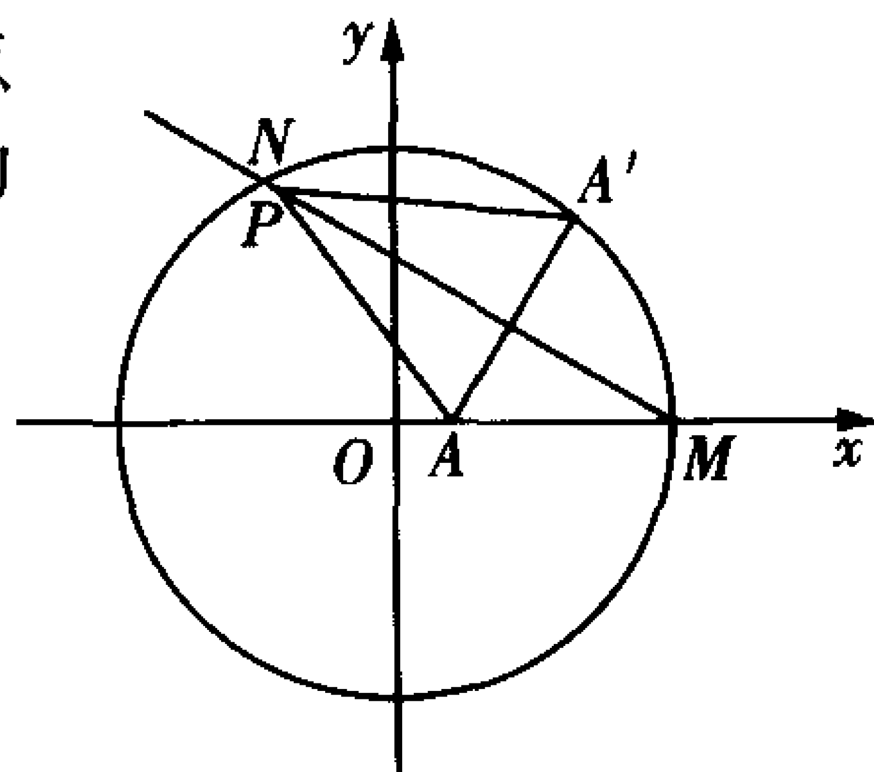


图 6 - 2

例 15 (第 19 届巴尔干地区数学奥林匹克题)设平面上 $n(n\geqslant 4)$个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，且任意三点不共线，每点至少与 3 个点之间有连线段. 证明：在这 n 个点中存在不同的 $2k$ 个点 $X_1,X_2,\cdots,X_{2k}$ $(k>1)$，使得 X_i 与 X_{i+1}之间有连线段，X_{2k}与 X_1 之间有连线段，其中 $1\leqslant i\leqslant 2k-1$.

证明 设 $P=X_1X_2\cdots X_s$ 是最长的序列，其中 X_i 与 X_{i+1}之间有连线段，$i=1,2,\cdots,s-1$，且 $X_i\in\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$X_i\neq X_j$，$i\neq j$.

由于 X_1 至少与 3 个点之间有连线段，设不同于 X_2 的两个点为 Y 和 Z. 由于 P 是最长的，所以 Y、$Z\in\{X_3,X_4,\cdots,X_s\}$. 设 $Y=X_i$，$Z=X_j$，$i<j$，则 $C=X_1X_2\cdots X_i\cdots X_jX_1$ 是一个圈.

如果 j 是偶数，C 即满足条件. 如果 j 是奇数，则 $X_1X_2\cdots X_iX_l$ 与 $X_1X_iX_{i+1}\cdots X_jX_1$ 中一定有一个满足点的数目是偶数.

例 16 (《数学教学》问题 602 题)已知 $x>0,y>0$，且 $x+y=1$，求证：

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\right)>1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

证明 不妨设 $x\leqslant y$，则 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$. 于是

$$0<x(1+x)\leqslant y(1+y)<2,$$

从而$\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}+\sqrt{\dfrac{y}{1+y}}=\dfrac{x}{\sqrt{x(1+x)}}+\dfrac{y}{\sqrt{y(1+y)}}$

$$\geqslant\frac{x}{\sqrt{y(1+y)}}+\frac{y}{\sqrt{y(1+y)}}=\frac{1}{\sqrt{y(1+y)}}>\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

又$\sqrt{\dfrac{y}{1+x}}+\sqrt{\dfrac{x}{1+y}}=\dfrac{y}{\sqrt{y(1+x)}}+\dfrac{x}{\sqrt{x(1+y)}}\geqslant\dfrac{2x}{y+(1+x)}+\dfrac{2y}{x+(1+y)}=1.$

以上两式相加，可得$\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\sqrt{\frac{x}{1+y}}+\sqrt{\frac{y}{1+x}}+\sqrt{\frac{y}{1+y}}>1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. 即

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}})>1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 17 （《数学通报》问题 1471 题）求方程组$\begin{cases}x+y=zt\\z+t=xy\end{cases}$的非负整数解.

解 因为方程组中 x 与 y，z 与 t 可以互换，所以可以先求满足 $0\leqslant x\leqslant y$，$0\leqslant z\leqslant t$ 的整数解组 (x,y,z,t).

(1)若 x、z 中有一个为零，不妨设 $x=0$，则由原方程组消去 t 得：$y+z^2=0$ 所以 $y=z=0$，$t=0$. 即 $(0,0,0,0)$ 是原方程组求的一组解.

(2)若 x，z 都不是 0，但是有一个为 1，设 $x=1$，则由原方程组消去 y 得：$t+z=zt-1$ 所以 $(z-1)(t-1)=2$，因为 z，t 为正整数且 $z\leqslant t$，所以$\begin{cases}z-1=1\\t-1=2\end{cases}$得 $z=2$，$t=3$，$y=5$ 即 $(1,5,2,3)$ 是原方程组的一组解，同理 $(2,3,1,5)$ 也是原方程组的一组解.

(3)若 $x\geqslant2$，且 $z\geqslant2$，由 $(x-1)(y-1)\geqslant1$ 得 $xy\geqslant x+y$. ①

当且仅当 $x=y=2$ 时取等号，同理 $zt\geqslant z+t$. ②

当且仅当 $z=t=2$ 时取等号.

由①、②及原方程组得：$xy\geqslant z+t$，

当且仅当 $x=y=z=t=2$ 时取等号.

故此时原方程组只有一组解 $(2,2,2,2)$.

根据方程组的对称性，可得 $(5,1,2,3)$、$(5,1,3,2)$、$(1,5,3,2)$、$(2,3,5,1)$、$(3,2,1,5)$、$(2,3,1,5)$ 也是原方程组的解.

综合得，原方程组的非负整数解共有 10 组：$(0,0,0,0)$、$(2,2,2,2)$、$(1,5,2,3)$、$(5,1,2,3)$、$(1,5,3,2)$、$(5,1,3,2)$、$(2,3,1,5)$、$(2,3,5,1)$、$(3,2,1,5)$、$(3,2,5,1)$.

例 18 （《数学通报》问题 1494 题）试求出所有满足下列条件的正整数 a,b,c,d，其中 $1<a<b<c<d$，使得 $abcd-1$ 是 $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$ 的整数倍.

解 令 $k=\frac{abcd-1}{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)}\in\mathbf{Z}^+$，易知，$a,b,c,d$ 都是为奇数或都为偶数，且 $1<k<\frac{a}{a-1}\cdot\frac{b}{b-1}\cdot\frac{c}{c-1}\cdot\frac{d}{d-1}$.

易证：若 $a\geqslant n$，则$\frac{a}{a-1}\leqslant\frac{n}{n-1}(n>1)$.

若 $a\geqslant5$，则 $1<k<\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}=2$，$k$ 不存在；

若 $a=4$，则 b,c,d 都为偶数，$b\geqslant6$，$c\geqslant8$，$d\geqslant10$，从而 k 为奇数，且

$3\leqslant k<\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}=\frac{128}{63}<3$，$k$ 不存在；

若 $a=3$，则 b,c,d 都为奇数，$b\geqslant5$，$c\geqslant7$，$d\geqslant9$，从而 $1<k<\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{9}{8}=\frac{315}{128}<3$，

所以 $k=2$.

若 $b=7$,因为 $3\nmid 3bcd-1$,

所以 $3\nmid(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)=2\cdot b\cdot(c-1)(d-1)$,矛盾.

因此,$b\neq 7$.进而可知 $b,c,d\neq 1\pmod 3$.

若 $b\geqslant 9$,则 $2=k<\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{15}{14}=\frac{891}{448}<2$,矛盾.

若 $b=5$,则 $2\cdot 2\cdot 4(c-1)(d-1)=15cd-1$,即$(c-16)(d-16)=239$(质数),所以 $a=3,b=5,c=17,d=255$.

若 $a=2$,类似可得 $k=3$,则 $3\mid abcd-1$,因此 $3\nmid abcd$.

若 $b\neq 4$,则 $b\geqslant 8,c\geqslant 10,d\geqslant 14$,从而 $1<k<2\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{14}{13}=\frac{2240}{819}<3$,矛盾,所以 $b=4$,由 $3\cdot 1\cdot 3\cdot(c-1)(d-1)=2\cdot 4cd-1$,得$(c-9)(d-9)=71$(质数).

所以 $a=2,b=4,c=10,d=80$.

综上可得,所求解为$(3,5,17,255)$,$(2,4,10,80)$.

注 本题是第 33 届 IMO 试题 1 的推广.

在解题中,对某一对象的多种情形进行假设,这就是问题特定设想中的一种手段——分类讨论法.

例 19 (《数学通报》问题 1506 题)在$\triangle ABC$ 中 $AB=AC$,$\angle B$ 的平分线交 AC 于 D,且 $BC=BD+AD$.求$\angle A$.

解法 1 如图 6-3,在 BC 上取一点 E,使 $BE=BD$.连结 DE.因为 $AB=AC$,所以$\angle ABC=\angle C$.设$\angle C=2\alpha$,因为$\angle ABD=\angle CBD$,所以$\angle ABD=\angle CBD=\alpha$.

因为 $BC=BD+AD$,所以 $BC=BE+CE=BD+CE$.

所以 $AD=CE$.

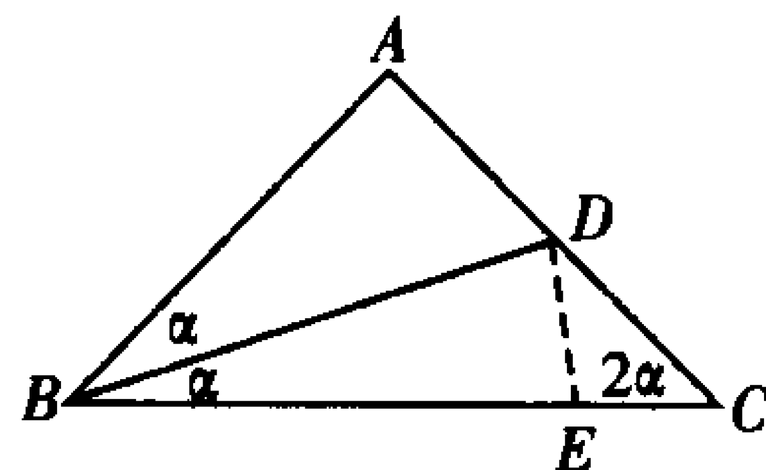


图 6-3

又由角平分线性质定理知$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$,

所以$\frac{AC}{BC}=\frac{CE}{CD}$.

因为$\angle C=\angle C$,所以,$\triangle ABC\backsim\triangle EDC$.

所以$\angle CDE=\angle ABC=2\alpha$.

所以$\angle BED=\angle BDE=2\alpha+2\alpha=4\alpha$.

因为在$\triangle BDE$ 中,$\alpha+4\alpha+4\alpha=180^\circ$,

所以 $\alpha=20^\circ$.

所以$\angle A=180^\circ-4\alpha=100^\circ$.

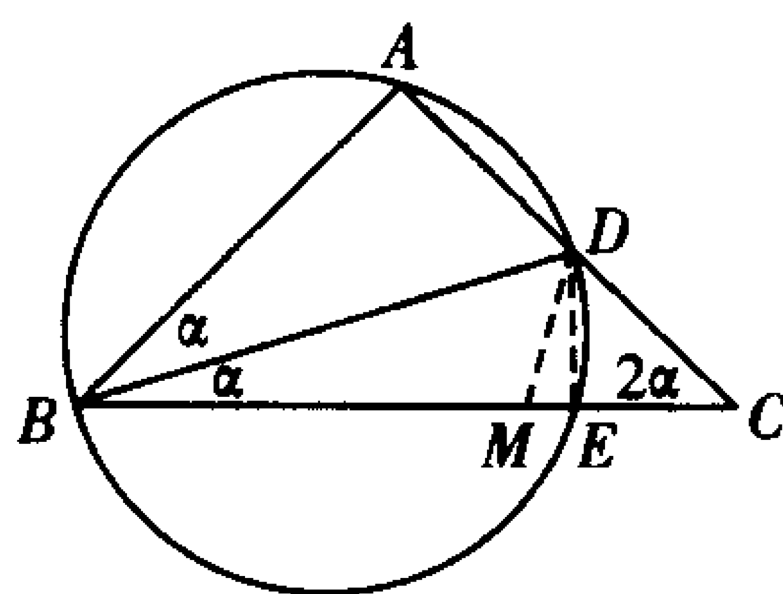


图 6-4

解法 2 如图 6-4 作$\triangle ABD$ 的外接圆$\odot O$,设圆交 BC 于 E.连结 DE.在 BC 上取一点 M,使 $BM=AB$.

因为 $AB=AC$,所以$\angle ABD=\angle CBD$,所以设$\angle ABD=\angle CBD=\alpha$.

得到$\angle ACB=2\alpha$,由圆内接四边形的性质知$\angle CDE=\angle ABC=2\alpha$.所以$\angle CDE=\angle ECD=2\alpha$,所以 $DE=CE$.

因为$\triangle ABD\cong\triangle MBD$,所以$\angle MDB=\angle ADB=\alpha+2\alpha=3\alpha$.

所以$\angle DME=\angle CBD+\angle BDM=\alpha+3\alpha=4\alpha$.

且$\angle DEM=\angle C+\angle CDE=2\alpha+2\alpha=4\alpha$.
所以$\angle DME=\angle DEM$，$\angle EDC=\angle ECD$，
所以$AD=DM=DE=EC$.
因为$BC=BD+AD$，$BC=BE+CE$.
所以$BD=BE$，所以$\angle BDE=\angle BED=4\alpha$.
在$\triangle BDE$中，$\alpha+4\alpha+4\alpha=180°$，所以$\alpha=20°$.
所以$\angle A=180°-4\alpha=100°$.
在解题中，对某一对象进行量化假设，这就是问题特定设想中的另一种手段——变量替换法.

【解题尝试】

A组

1. (2003年北京市竞赛题)一个三角形的三条边成等比数列，那么，公比q的取值范围是________.
2. (2003年上海市竞赛题)已知实数a、b、c满足$a+b+c=2$，$abc=4$.
   (1)求a、b、c中最大者的最小值；
   (2)求$|a|+|b|+|c|$的最小值.
3. (2002年全国高中联赛题)如图6-5，已知点$A(0,2)$和抛物线$y^2=x+4$上两点B、C，使得$AB\perp BC$. 求点C的纵坐标的取值范围.

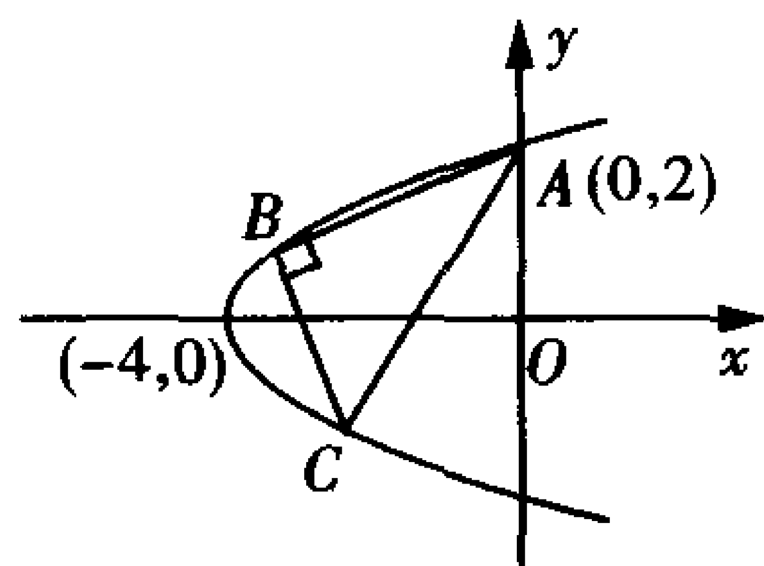


图6-5

4. (《数学通报》问题1486题)求函数$f(x)=\dfrac{x(1-x)}{(x+1)(x+2)(2x+1)}$，$x\in(0,1]$的最大值.
5. (《数学通报》问题1500题)已知正整数$x_1<x_2<\cdots<x_n$，$x_1+x_2+\cdots+x_n=2003$，$n\geqslant 2$. 试求$f(n)=n(x_1+x_n)$的最小值.
6. (首届中国东南地区数学奥林匹克题)(1)是否存在正整数的无穷数列$\{a_n\}$，使得对任意的正整数n都有$a_{n-1}^2\geqslant 2a_n\cdot a_{n+2}$?
   (2)是否存在正无理数的无穷数列$\{a_n\}$，使得对任意的正整数n都有$a_{n+1}^2\geqslant 2a_n\cdot a_{n+2}$?
7. (《中等数学》2004年4期奥林匹克训练题)对于给定的自然数$n(n>5)$，求所有的实数a，使得存在非负实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，满足$\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k=a$，$\sum\limits_{k=1}^{n}k^3x_k=a^2$，$\sum\limits_{k=1}^{n}k^5x_k=a^3$.
8. (《中等数学》2004年1期奥林匹克训练题)设n是给定的正整数，且$n\geqslant 3$. 对于n个实数x_1，$x_2,\cdots,x_n$，记$|x_i-x_j|(1\leqslant j<j\leqslant n)$的最小值为$m$，若$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，试求$m$的最大值.
9. (《中等数学》2004年6期奥林匹克训练题)已知方程$17x^2-16xy+4y^2-34x+16y+13=0$在$xOy$平面上表示一椭圆. 试求它的对称中心及对称轴.
10. (《数学教学》问题623题)设椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，半焦距为$c$，离心率为$e$，$B(0,-b)$为椭圆短轴的一个端点. 以$B$为顶角顶点的等腰$\triangle BMN$内接于椭圆，底边$MN$的中点为$P$，求点$P$的轨迹.
11. (《中等数学》2005年1期奥林匹克训练题)平面有12个点，且任意三点不共线，以其中任意一点为始点，另一点为终点作向量，且作出所有的向量，其中3边向量的和为零向量的三角形称为“零

三角形". 求以这些点为顶点的"零三角形"个数的最大值.

B组

1. (第53届罗马尼亚数学奥林匹克(第二轮)题)对于正整数 $n(n\geqslant 2)$,定义 $f(n)$ 为集合 S 中元素个数的最小值,集合 S 满足最小的元素 $1\in S$,最大的元素 $n\in S$,且对于异于1的每个元素都是 S 中两个元素的和(可以相同). 证明:
(1) $f(n)\geqslant[\log_2 n]+1$;
(2)有无穷多个 n,使得 $f(n)=f(n+1)$.
2. (第19届伊朗数学奥林匹克(第二轮)题)求所有函数 $f:\mathbf{R}\backslash\{0\}\to\mathbf{R}$,使得对所有 $x、y\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$,有
$xf(x+\frac{1}{y})+yf(y)+\frac{y}{x}=yf(y+\frac{1}{x})+xf(x)+\frac{x}{y}$.
3. (2003年中国西部数学奥林匹克题)设非负实数 $x_1、x_2、x_3、x_4、x_5$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}=1$. 求证: $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{x_i}{4+x_i^2}\leqslant 1$.
4. (2002年保加利亚冬季数学竞赛题)三根木棒每根的长度均不小于 n,其中 n 是一个正整数. 如果这三根木棒的长度之和为 $\frac{n(n+1)}{2}$,证明:可以将这三根木棒切成 n 段,其长度分别为 $1,2,3,\cdots,n$.
5. (第52届白俄罗斯数学奥林匹克(决赛B类)题)已知 $A、B$ 是由不同的正实数组成的有限集,$n(n>1)$ 是一个给定的正整数,A 和 B 中均至少有 n 个元素. 若 A 中任意 n 个不同实数的和属于 B,B 中任意 n 个不同实数的积属于 A,求 A 和 B 中所有元素个数的最大值.
6. (2001年中国数学奥林匹克题)设 $a、b、c、a+b-c、a+c-b、b+c-a、a+b+c$ 是7个两两不同的质数,且 $a、b、c$ 中有两数之和是800. 设 d 是这7质数中最大数与最小数之差. 求 d 的最大可能值.
7. (2004年中国数学奥林匹克题)给定正整数 $n(n\geqslant 2)$,设正整数 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant 1$. 求证:对任意实数 x,有
$(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2})^2\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}$.
8. (第45届IMO试题)在凸四边形 $ABCD$ 中,对角线 BD 既不是 $\angle ABC$ 的平分线,也不是 $\angle CDA$ 的平分线. 点 P 在四边形 $ABCD$ 内部,满足 $\angle PBC=\angle DBA$ 和 $\angle PDC=\angle BDA$. 证明:$ABCD$ 为圆内接四边形的充分必要条件是 $AP=CP$.
9. (第28届俄罗斯数学奥林匹克题)设 $P、Q、R$ 都是实系数多项式,它们之中既有二次多项式,也有三次多项式,并且满足关系式 $P^2+Q^2=R^2$. 证明:其中必有一个三次多项式的根全是实根.
10. (第29届俄罗斯数学奥林匹克题)数列 $\{a_n\}$ 按事下方式构成: $a_1=p$,其中 p 是质数,且 p 恰有300位数字非0. 而 a_{n+1} 是 $\frac{1}{a_n}$ 的十进制小数表达式中的一个循环节的2倍. 试求 a_{2003}.
11. (2002年中国女子数学奥林匹克题)设 $A_1,A_2,\cdots,A_8$ 是平面上任意取定的8个点,对平面上任意取定的一条有向直线 l,设 $A_1,A_2,\cdots,A_8$ 在该直线上的射影分别是 $P_1,P_2,\cdots,P_8$. 如果这8个射影两两不重合,依直线 l 的方向依次排列为 $P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_8}$,这样,就得到了 $1,2,\cdots,8$ 的一个

排列 $i_1,i_2,\cdots,i_8$(在图 6-6 中,此排列为 2,1,8,3,7,4,6,5).设这 8 个点对平面上所有有向直线作射影后,得到的不同排列的个数为 $N_8=N(A_1,A_2,\cdots,A_8)$,试求 N_8 的最大值.

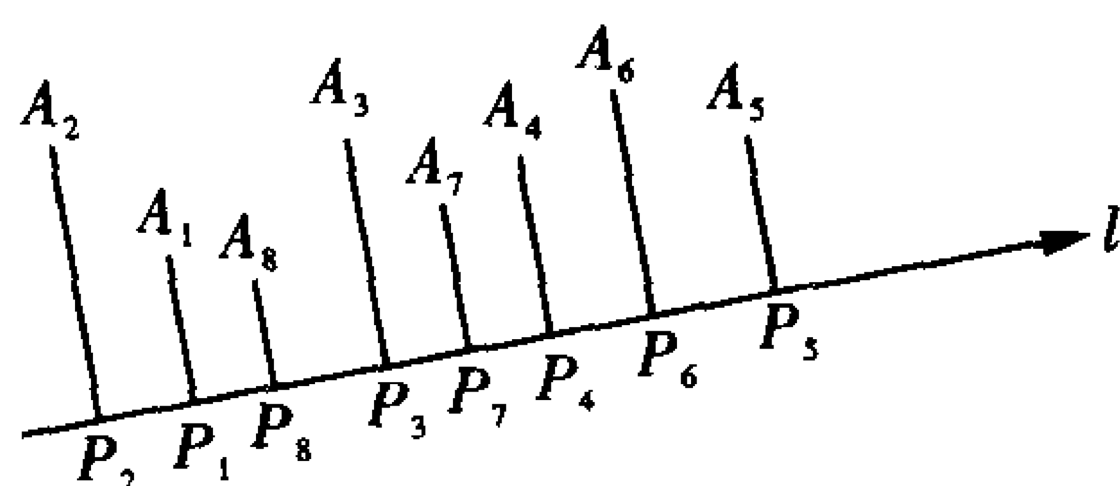


图 6-6

12. (第 44 届 IMO 试题)求所有的正整数对,使得$\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$为正整数.

13. (第 51 届捷克和斯洛伐克数学奥林匹克(第二轮)题)求方程组$\begin{cases}x^2-1=p(y+z),\\y^2-1=p(z+x),\\z^2-1=p(x+y)\end{cases}$的解,并讨论解的个数.其中 x、y、z 是实数,p 为参数.

14. (第 51 届捷克和斯洛伐克数学奥林匹克(开卷题)题)解方程$(x_5)^2+(y^4)_5=2xy^2+51$,其中 n_5 表示最接近整数 n 的 5 的倍数,x、y 为整数.

15. (第 41 届 IMO 预选题)已知正整数集合 A 中的元素不能表示为若干个不同的完全平方数之和.证明:A 中有有限个元素.

16. (第 44 届 IMO 预选题)考虑两个正实数列 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots$,$b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant\cdots$,记 $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,$B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$,$n=1,2,3,\cdots$.设 $c_i=\min\{a_i,b_i\}$,$C_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$,$n=1,2,3,\cdots$.

(1)是否存在数列$\{a_i\}$、$\{b_i\}$,使得数列$\{A_n\}$、$\{B_n\}$无界,而数列$\{C_n\}$有界?

(2)若 $b_i=\frac{1}{i}$,$i=1,2,\cdots$,则(1)的结论是否改变?

证明你的结论.

17. (第 41 届 IMO 预选题)设正整数 $n\geqslant 4$,由平面上 n 个点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 所构成的集合 S 满足:任意三点不共线,任意四点不共圆.设 $a_t(1\leqslant t\leqslant n)$表示包含 P_t 的圆 $P_iP_jP_k$ 的数目,且 $m(S)=a_1+a_2+\cdots+a_n$,证明:存在依赖于 n 的正整数 $f(n)$,使得 S 中的点是凸 n 边形的顶点的充分必要条件是 $m(S)=f(n)$.

18. (第 43 届 IMO 预选题)是否存在正整数 m,使得方程

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}=\frac{m}{a+b+c}$$

有无穷多组正整数解(a,b,c)?

第7章 反证法

【学习目标】

在第2章中，我们曾提到反证是逆向化归中的一种重要手段；在第6章中，也讲到结论的反面设想是一种重要的特定设想手段. 这一章，我们专门来看反证法在解数学竞赛题时的重要作用及广泛应用.

一般地说，在证明一个命题时，从命题的反面入手，先假设结论的反面成立，如果由此假设和已知条件共同推导出的结果与已知条件、已知公理、定理、定义等之一矛盾，或者推出两个互相矛盾的结果，就证明了"结论反面成立"的假设是错误的，从而得出结论的正面成立. 这种证题方法就叫做反证法.

【解题钥匙】

1. 用于证明否定形式的问题

例1 （1997年全国高中联赛题）设双曲线 $xy=1$ 的两支为 C_1、C_2 如图7-1，正三角形 PQR 的三顶点位于此双曲线上.

(1)求证：P、Q、R 不能都在双曲线的同一支上；

(2)设 $P(-1,-1)$ 在 C_2 上，Q、R 在 C_1 上，求顶点 Q、R 的坐标.

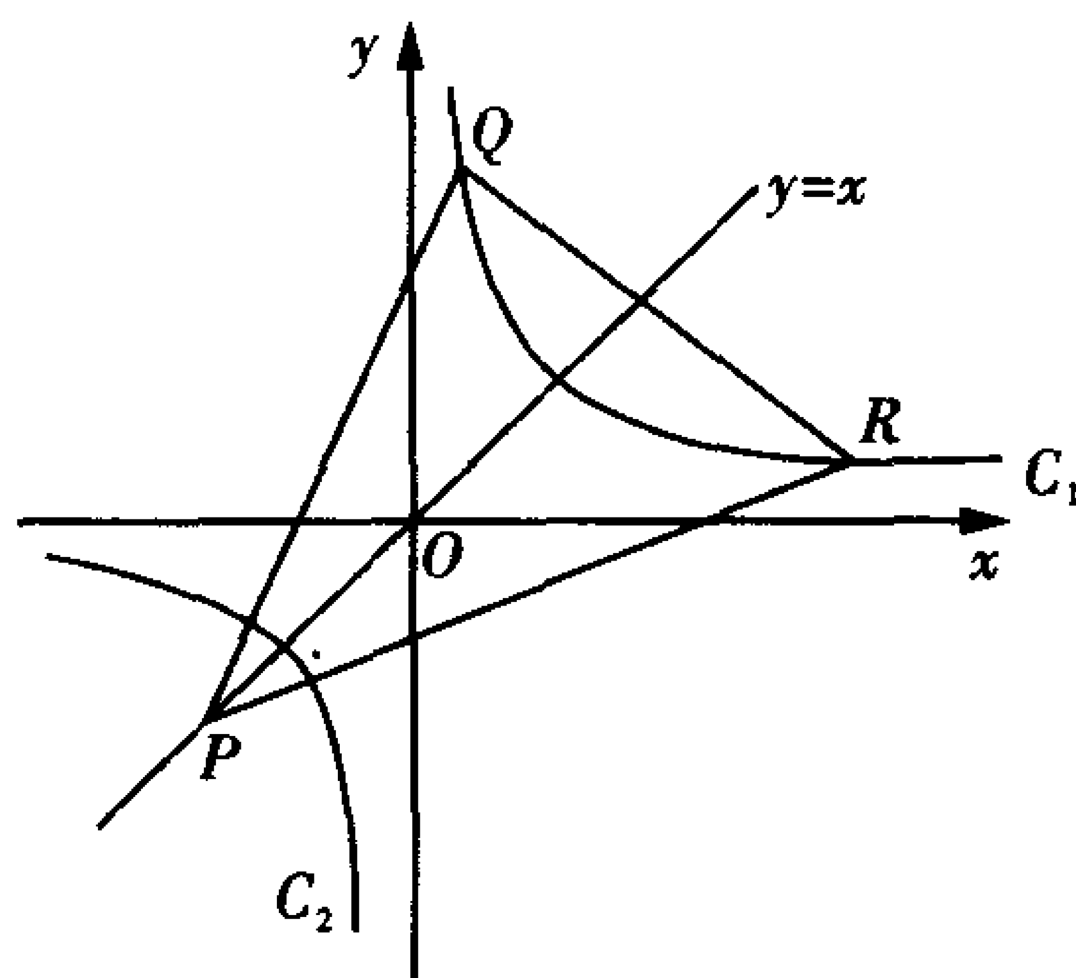


图7-1

解 (1)假设正△PQR 的三顶点 P、Q、R 位于同一支如 C_1 上，其坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，不妨设 $0<x_1<x_2<x_3$，则一定有 $y_1>y_2>y_3>0$.

于是，
$$\begin{aligned}&PQ^2+QR^2-PR^2\\&=[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2-(x_1-x_3)^2]+[(y_1-y_2)^2+(y_2-y_3)^2-(y_1-y_3)^2]\\&=(2x_2^2-2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3)+(2y_2^2-2y_1y_2-2y_2y_3+2y_1y_3)\\&=2(x_2-x_1)(x_2-x_3)+2(y_2-y_1)(y_2-y_3)<0.\end{aligned}$$

因此，$PQ^2+QR^2<PR^2$.

这说明△PQR 是钝角三角形，与△PQR 为正三角形矛盾. 故 P、Q、R 不能位于同一支上.

(2)设 Q、R 的坐标为 $\left(x_1,\frac{1}{x_1}\right)$、$\left(x_2,\frac{1}{x_2}\right)$，这时 QR 边上的高线方程为

$$y+1=x_1x_2(x+1). \quad ①$$

它必过线段 QR 的中点，因此，QR 的中点坐标满足方程①，于是有 $\frac{1}{2}(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})+1=x_1x_2\cdot(\frac{x_1+x_2}{2}+1)$，此即 $(1-x_1x_2)[(x_1+x_2)(1+x_1x_2)+2x_1x_2]=0$.

又 $x_1>0,x_2>0$，上式方括号中的式子明显大于 0，则 $1-x_1x_2=0$，故 $x_1x_2=1$.

于是，Q 点的坐标为 $(\frac{1}{x_2},x_1)$，而 R 的坐标为 $(x_2,\frac{1}{x_2})$，这说明 Q、R 关于直线 $y=x$ 对称.

PQ、PR 所在的直线分别为过 P 点与 $y=x$ 交成 $30°$ 角的相互对称的两条直线，易见其倾斜角分别为 $75°$ 和 $15°$，不妨设 PQ 的倾斜角为 $75°$，这时它的方程为 $y+1=\tan75°\cdot(x+1)$，即 $y+1=(2+\sqrt{3})(x+1)$. 将其代入双曲线方程 $xy=1$，解得 Q 点坐标 $(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$. 由对称性，知 R 的坐标为 $(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3})$.

例 2 （第 53 届罗马尼亚数学奥林匹克（第一轮）题）设等差数列 $a_n(n\geqslant1)$ 包含 1 和 $\sqrt{2}$. 证明：$\{a_n\}$ 中的任意三项均不构成等比数列.

证明 设等差数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 的公差为 r，则存在正整数 k、l，使得 $a_k=1,a_l=\sqrt{2}$. 于是，

$$\sqrt{2}-1=a_l-a_k=(l-k)r,$$

即 $$r=\frac{\sqrt{2}-1}{l-k}.$$

假设 a_m、a_n、a_p 是等比数列，为方便起见，设 $\frac{m-k}{l-k}=M,\frac{n-k}{l-k}=N,\frac{p-k}{l-k}=P$，则

$$a_m=a_k+(m-k)r=1+M(\sqrt{2}-1),$$
$$a_n=a_k+(n-k)r=1+N(\sqrt{2}-1),$$
$$a_p=a_k+(p-k)r=1+P(\sqrt{2}-1).$$

由 $a_n^2=a_ma_p$，得

$$(1-N+N\sqrt{2})^2=(1-M+M\sqrt{2})(1-P+P\sqrt{2}),$$

即 $$(1-N)^2+2N^2+2N(1-N)\sqrt{2}=(1-M)(1-P)+2MP+[(M(1-P)+P(1-M))]\sqrt{2}.$$

由于 M、N、P 是有理数，则有

$$3N^2-2N=3MP-M-P,$$
$$2N-2N^2=M+P-2MP.$$

以上两式相加得 $N^2=MP$，代入得 $2N=M+P$.

从而，$(M+P)^2=4MP$，即 $(M-P)^2=0$.

所以，$M=P=N$. 于是可得 $m=n=p$，矛盾.

例 3 （第 42 届 IMO 试题）设 a、b、c、d 为整数，$a>b>c>d>0$，且 $ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c)$.

证明：$ab+cd$ 不是素数.

证明 若 $p=ab+cd$ 为素数，则将导出矛盾.

由于 $ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c)=(b+d)^2-(a-c)^2$，

则 $a^2-ac+c^2=b^2+d^2+bd$.

将 $a=\frac{p-cd}{b}$ 代入上式，得

$$\frac{(p-cd)^2}{b^2}-\frac{p-cd}{b}\cdot c+c^2=b^2+d^2+bd,$$

即　$p(p-2cd-b^2)=(b^2-c^2)(b^2+d^2+bd).$

因为 $p=ab+cd>ab>b^2>b^2-c^2>0$,

所以,$(p,b^2-c^2)=1.$

于是,$p\mid b^2+d^2+bd.$

但 $p=ab+cd>b^2+d^2$,从而,

$2p>2(b^2+d^2)>(b+d)^2>b^2+d^2+bd.$

所以,$p=b^2+d^2+bd.$

于是,$ab+cd=b^2+d^2+bd$,

即　$d(c-d)=b(b+d-a).$

由于 $b>c>d$,则

$b>c-d>0.$

这样 $(b,d)>1$,意味着 $(b,d)\mid p$,p 不是素数. 矛盾.

故命题成立.

2. 用于证明"至多"、"至少"形式的问题

例 4　(2002 年保加利亚国家数学奥林匹克地区级竞赛题)设正整数 $n\geqslant 3$,$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是任意 n 元不同的实数,且其和是正数. 若它的一个排列$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$满足对于任意的 $k=1,2,\cdots,n$,均有 $b_1+b_2+\cdots+b_k>0$,则这个排列称为好的. 求好的排列至少有多少个?

解　设这 n 个数按顺时针放在正 n 边形的 n 个顶点上,取 s,使得 $a_s+a_{s+1}+\cdots+a_{s+t}$ 是最小的,其中下标取模 n 的余数,且假设 t 是最大的. 于是,对于 $t_1\leqslant t$,则 $a_{s+t_1}+\cdots+a_{s+t}\leqslant 0$;否则,$a_s+a_{s+1}+\cdots+a_{s+t_1-1}<a_s+a_{s+1}+\cdots+a_{s+t}$,与和是最小的,矛盾. 于是,从 a_{s+t+1} 开始,得到一个好的排列,即若某个和 $a_{s+t+1}+\cdots+a_{s+t+k}\leqslant 0$,则 $a_s+a_{s+1}+\cdots+a_{s+t+k}\leqslant a_s+a_{s+1}+\cdots+a_{s+t}$,与和的最小及 t 的最大性矛盾.

因此,对于 $n!$ 个排列,正 n 边形的顶点上每一种放法,按顺时针对应着 n 个排列,这 n 个排列中至少有一个是好的. 所以至少有 $(n-1)!$ 个好的排列.

若 $i=1,2,\cdots,n-1$ 时,$a_i<0$,$a_n>0$,则好的排列只能从 a_n 开始,其他 $n-1$ 个数进行全排列,共有 $(n-1)!$ 个好的排列.

所以,好的排列至少有 $(n-1)!$ 个.

例 5　(第 26 届俄罗斯数学奥林匹克题)在坐标平面上给定凸五边形 $ABCDE$,它的顶点都是整点. 证明:在五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 如图 7-2 的内部或周界上至少有一个整点.

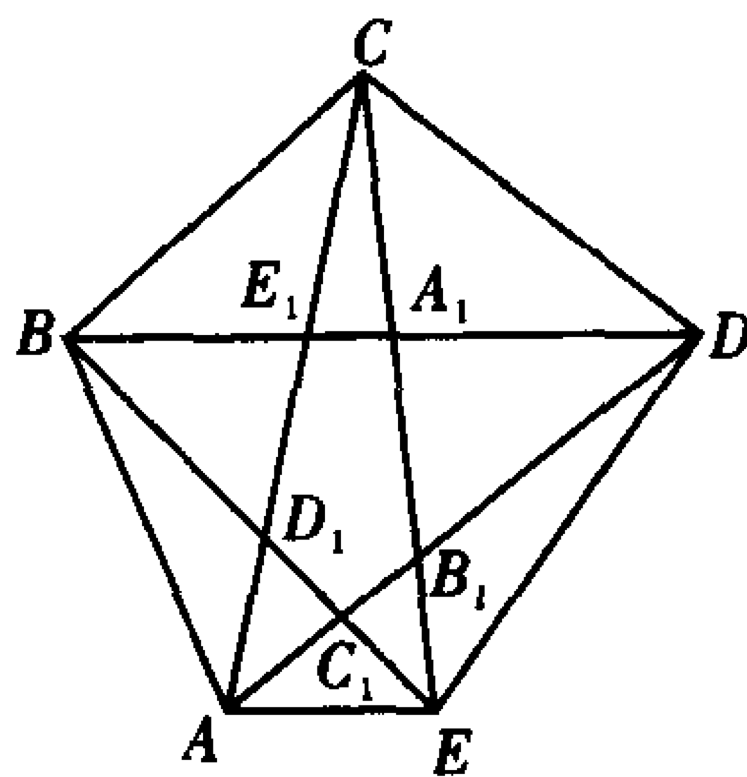


图 7-2

解　为简单起见,我们将"在内部或在边界上"统称为"在…中".

用反证法. 假设结论不成立,我们来考察不满足断言的具有最小面积 S 的五边形(由于任何整点多边形的面积为半整数,故存在面积最小者). 可证 $\triangle AC_1D_1$ 中的所有整点,除 A 之外,全都位于 C_1D_1 之上. 事实上,如果在它之中还有另一整点 K,则凸五边形 $KBCDE$ 的面积小于 S,且五边形的"内"五边形位于五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 之中,这显然是不可能的.

自$\triangle ABC$、$\triangle BCD$，$\triangle CDE$，$\triangle DEA$和$\triangle EAB$中选出面积最小的一个，设其为$\triangle ABC$. 于是，点A与直线BC的距离不大于D与该直线的距离；点C距直线AB不比E远. 考察使$ABCO$为平行四边形的点O，显然它是整点. 不难证明，点O位于$\triangle AB_1C$中. 于是，由前面所证的断言，它位于五边形$A_1B_1C_1D_1E_1$之中，这不可能，导致矛盾.

例6 （第30届俄罗斯数学奥林匹克题）在桌上放着2004个小盒子，每个盒子中放有1个小球. 现知某些球是白色的，白球共有偶数个. 允许你指着任意2个盒子问："它们中是否至少有1个放的是白球？"试问，最少需要询问多少次，你就可以确定出2个放的都是白球的盒子？

解 将盒子（以及放在它们里面的小球）依次编为1至2004号，且以盒子对号码来称呼问题，将非白色的球都称为黑球.

首先，我们证明，通过4005次询问可以找出2个白球. 依次问问题(1,2)，(1,3)，…，(1,2004)，(2,3)，(2,4)，…，(2,2004). 如果所有的答案都是肯定的，则1号球和2号球都是白色的（事实上，如果1号球是黑色的，那么，就至少还可以找出1个黑球，它与1号球构成一个黑球对）. 如果其中至少有一个答案是否定的（不妨设它是某个包含1号球的问题），那么，1号球是黑色的. 这时，那些凡是含有1号球却给出肯定的答案时的另1个球一定是白色的. 这样，我们就找出了所有的白球，至少有2个.

其次我们证明，不能少于4005次询问. 假设存在某种方案使得可用更少的询问来确保找出2个白球，我们可以给所有的问题以肯定回答. 这时，最多在4004次询问之后，就必须指出2个盒子（为确定起见，设为第1个盒子与第2个盒子），且肯定我们中放的都是白球. 此时，必有一个形如$(1,n)$或$(2,n)$的问题没有问到，例如问题$(1,k)$，不然就需要4005次询问. 假如在第1个盒子和第k个盒子里放的是黑球，其余盒子中放的全是白球，那么，我们所给的回答都是对的. 但是，游戏者所指的第一个球却是黑的，矛盾.

故至少需要4005次即可.

3. 用于证明涉及"无限"的问题

例7 证明：素数是无限的.

证明 假设素数只有n个，分别记为$p_1,p_2,\cdots,p_n$，取正整数$A=p_1p_2\cdots p_n+1$，那么A有两种可能：或为素数；或为合数.

若A为素数，则A不等于$p_i(i=1,2,\cdots,n)$中任何一个，则素数至少有$n+1$个，这与素数只有n个矛盾.

若A为合数，则一定有一个素数b，使A能被b整除. 然而A被这n个素数$p_1,p_2,\cdots,p_n$中任一个除时都余1，从而b不是这n个素数中的任何一个，因而b是n个素数之外的又一个素数，这与素数只有n个的假设矛盾.

综上所述，素数为无限多个.

例8 （第42届IMO预选题）设$a_0,a_1,a_2\cdots$是任意一个由正整数组成的无穷序列. 证明：存在无穷多个正整数n，使得

$$1+a_n>a_{n-1}\sqrt[n]{2}.$$

证明 定义序列$c_0,c_1,c_2\cdots$满足

$c_0=1,c_n=\dfrac{a_{n-1}}{1+a_n}\cdot c_{n-1},n\geqslant 1$，重写为

$c_n=a_{n-1}c_{n-1}-a_nc_n.$

则 $c_1+c_2+\cdots+c_n=a_0c_0-a_nc_n=a_0-a_nc_n$.

由于 $\{a_n\}$ 为正整数序列，则 $\{c_n\}$ 为正整数序列.

所以，$c_1+c_2+\cdots+c_n<a_0$.

因此，原命题等价于证明存在无穷多个 n，使得 $\frac{c_n}{c_{n-1}}<2^{-\frac{1}{n}}$ 成立.

反证. 假设存在正整数 N，使得对于 $n\geqslant N$，均有 $\frac{c_n}{c_{n-1}}\geqslant 2^{-\frac{1}{n}}$.

当 $n>N$ 时，有

$$\frac{c_n}{c_{n-1}}\cdot\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{c_{N+1}}{c_N}\geqslant 2^{-\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}-\cdots-\frac{1}{N+1}},$$

即 $$c_n\geqslant c_N\cdot 2^{-\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}=C\cdot 2^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)},$$

其中 $C=C_N\cdot 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}}$ 是一个正常数.

对于如上的 n，存在正整数 k，使得 $2^{k-1}\leqslant n<2^k$，则

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$\leqslant 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}\right)$$
$$\leqslant 1+1+\cdots+1=k.$$

所以，$c_n\geqslant C\cdot 2^{-k}$，其中 $2^{k-1}\leqslant n<2^k$.

对于如上的 N，存在正整数 r，使得 $2^{r-1}\leqslant N<2^r$. 当 $m>r$ 时，有

$$c_{2^r}+c_{2^r+1}+\cdots+c_{2^m-1}$$
$$=(c_{2^r}+\cdots+c_{2^{r+1}-1})+(c_{2^{r+1}}+\cdots+c_{2^{r+2}-1})+\cdots+(c_{2^{m-1}}+\cdots+c_{2^m-1})$$
$$\geqslant C(2^r\times 2^{-(r+1)}+2^{r+1}\times 2^{-(r+2)}+\cdots+2^{m-1}\times 2^{-m})$$
$$=\frac{C(m-r)}{2}.$$

这表明 c_n 的和可以任意大，与 $c_1+c_2+\cdots+c_n$ 的有界性矛盾. 所以，有无穷多个 n，使得 $\frac{c_n}{c_{n-1}}<2^{-\frac{1}{n}}$ 成立.

4. 用于证明"存在"、"惟一"等形式的问题

例 9 (《中等数学》2004 年 3 期奥林匹克训练题)对复数 z_1、z_2 给出下面的三个条件：(1) $\frac{z_1-\overline{z_1}}{z_2-\overline{z_2}}=0$；(2) $\overline{z_2}+6=\frac{2}{z_2+6}$；(3) $z_1\cdot z_2^2+z_2+2=0$.

试问是否存在同时满足这三个条件的复数 z_1、z_2？若存在，求出 z_1、z_2；若不存在，说明理由.

解 假设存在 z_1、z_2 同时满足题设的三个条件.

由(1)得 $z_1\in\mathbf{R}$，z_2 是虚数. 由(2)得

$|z_2+6|^2=2$. ①

设 $z_1=a\in\mathbf{R}$. 由(3)得 $az_2^2+z_2+2=0$.

因为 z_2 是虚数，则有 $\Delta=1-8a<0$，$a>\frac{1}{8}$.

由求根公式 $z_2=\dfrac{-1\pm\sqrt{8a-1}\mathrm{i}}{2a}$，代入式①得

$a=\dfrac{2}{17}<\dfrac{1}{8}$.

这与 $a>\dfrac{1}{8}$ 相矛盾.

因此，同时满足题设三个条件的 z_1、z_2 不存在.

例 10 （1992 年全国高中联赛题）在平面直角坐标系中，横坐标和纵坐标都是整数的点称为格点，任取 6 个格点 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4,5,6)$ 满足：

(1) $|x_i|\leqslant 2$，$|y_i|\leqslant 2(i=1,2,3,4,5,6)$；

(2) 任何三点不在同一条直线上.

试证：在以 $P_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 为顶点的所有三角形中，必有一个三角形的面积不大于 2.

证明 6 个格点分布在如图 7－3 所示的 4×4 网络图的格点上.若某两条"相邻"的水平直线 l（或竖直直线段）上已有 3 个点，则结论显然成立. 若不是这样情形，用反证法.

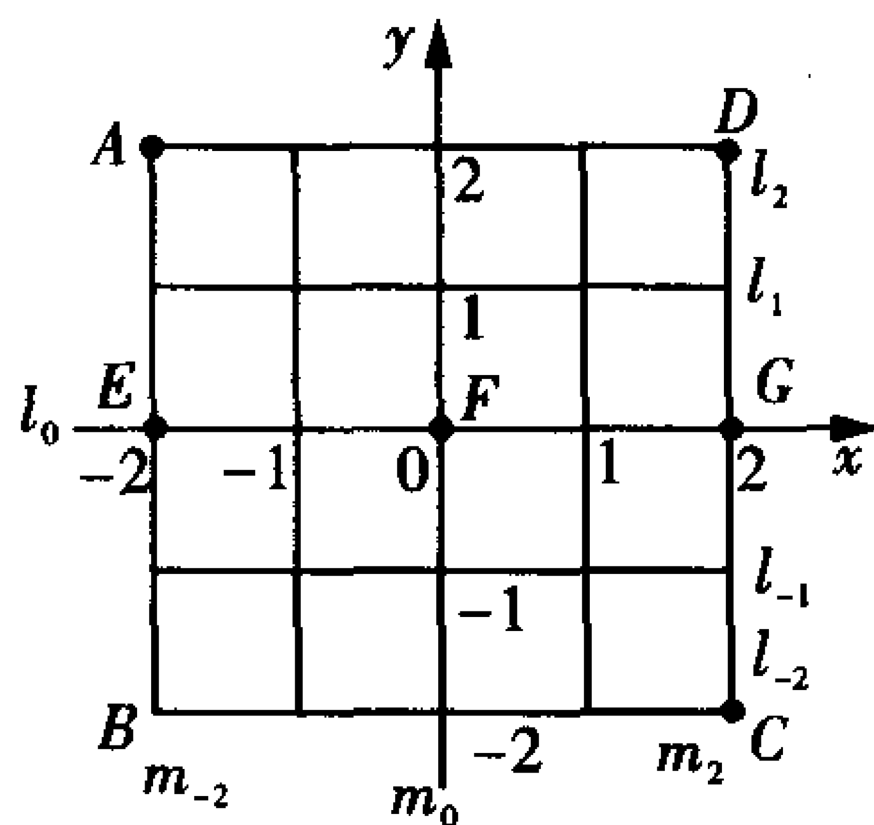


图 7－3

假设结论不成立，则相邻的两条水平（或竖直）直线段上至多有 2 个点（指 p_i，下同）.

若 l_1 上有点，则 l_2 与 l_0 上最多各有一点，从而 l_{-1} 与 l_{-2} 上至少（共）有 3 点，矛盾.

从而 l_1（同理 l_{-1}）上没有 P_i 中的点.

又任三点不在同一直线上，则 6 个格点只能分布在 3 条水平直线 l_2、l_0、l_{-2} 上.

同理，这 6 个格点又只能分布在 m_{-2}、m_0，m_2 这 3 条竖直线上.

此时 l_2 上的两个点与 l_0 上的两个点都不能在 y 轴上，否则必有一个三角形的面积不大于 2（如图中的情形，A、E、F 是 P_i 中三点，$\triangle AEF$ 面积为 2）.

同理，l_{-2} 上的两个点也不能在 y 轴上，于是这两个点只能在顶点 B、C 上，A、E、B 三点共线，与题设矛盾（事实上，无论这两点是否在 y 轴上，都已经使 m_{-2} 或 m_2 上出现了三点共线）.

故以 $P_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 为顶点的所有三角形中，必有一个三角形的面积不大于 2.

例 11 （1995 年全国高中数学联赛题）将平面上每个点都以红蓝两色之一着色. 证明：存在这样的两个相似三角形，它们的相似比为 1995，并且为一个三角形的三个顶点同色.

证明 首先证明平面上一定存在三顶点同色的直角三角形.

在平面上任作直线 l，则 l 上必有两点同色，设此两点为 B'，C'，如图 7－4所示

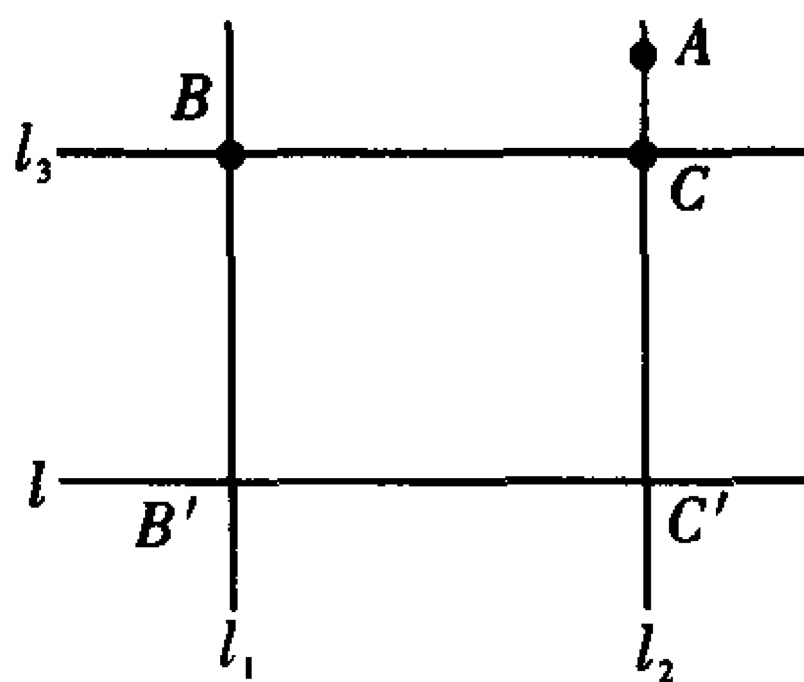


图 7－4

过 B'，C' 分别作 l 的垂线 l_1，l_2.

如果 l_1 或 l_2 上有与 B'，C' 同色的点 A'，则 $\triangle A'B'C'$ 即为三顶点同色的直角三角形.

如果 l_1 或 l_2 上除 B' 与 C' 外其余点均与 B'，C' 异色，则在 l_2 上取异于 C' 的两点 A，C，并过 C 作 $l_3\perp l_1$，垂足为 B，则 $\triangle ABC$ 即为三顶点同色的直角三角形.

因此,平面上一定存在三顶点同色的直角三角形,设其中之一为 Rt△ABC.

将 Rt△ABC 对称地补成矩形 $ABCD$. 用两组平行于 AC 与 CB 的 n 等分平行线将矩形 $ABCD$ 等分成 n^2 个与原矩形相似的小矩形,如图 7-5 所示.

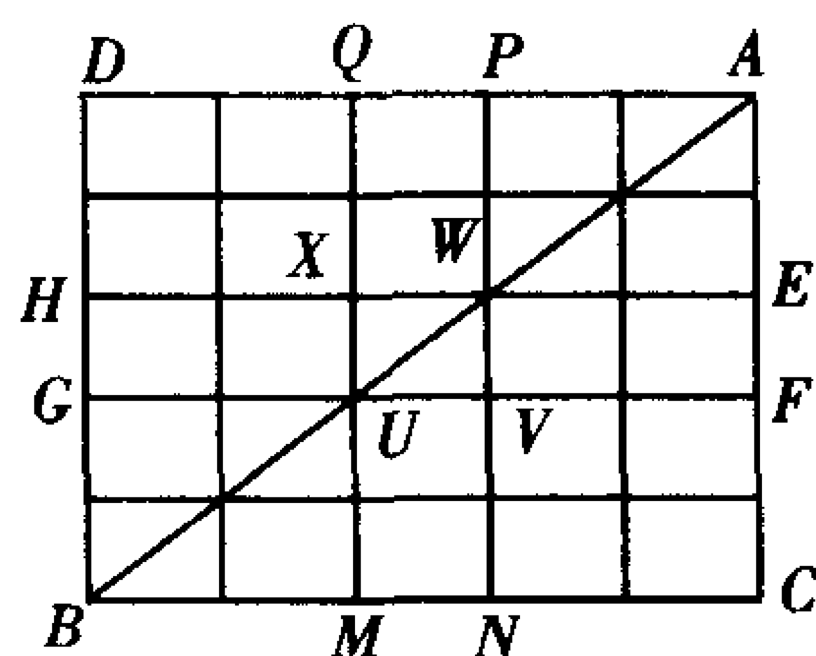


图 7-5

以下用反证法证明:若 n 为奇数,则这些小矩形中必有一个,它的顶点中至少有三个同色,即存在一个三顶点同色的小直角三角形.

假设不存在三顶点同色的小直角三角形.

线段 AC 上端点及分点共 $n+1$ 个,$n+1$ 为偶数,因此 AC 上必有相邻的两点同色(若每相邻两点异色,则 A、B 亦应异色,与已知矛盾),不妨设为 E、F,则 E、F 所在的小矩形的另两个顶点必与 E、F 异色(否则已出现同色小三角形),依此类推. 可知矩形 $EFGH$ 中,每条竖线上的两顶点都同色.

同理,线段 BC 上相邻两点 M、N 同色,也有矩形 $MNPQ$,其中每条横线上的两顶点都同色.

设矩形 $EFGH$ 与 $MNPQ$ 的公共部分为小矩形 $UVWX$,由以上所说,U 与 V 同色且 V 与 W 同色,从而△UVW 即是三顶点同色的小直角三角形. 这与假设矛盾.

故必定存在一个顶点同色的小直角三角形.

这个三顶点同色的小直角三角形与原直角三角形是相似的,相似比为 n,当 $n=1995$ 时就是题目所要证明的结论.

注 本题还可以运用抽屉原理以及三角形与外接圆的关系来证明,方法如下:

在平面上任意作两个同心圆,使得大圆的半径是小圆半径的 1995 倍(不妨就认为小圆半径 $r=1$,大圆半径 $R=1995$).

任意作大圆的 9 条半径 OA_1、OA_2、…、OA_9,它们与小圆的交点分别是 B_1、B_2、…、B_9,如图 7-6 所示. 9 个点 A_1、A_2、…、A_9 中必有 5 个同色,不妨设 A_1、A_2、…、…、A_5 同为红色,在 5 个点 B_1、B_2、…、B_5 中必有 3 个点同色,不妨设 B_1、B_2、B_3 同为蓝色(红色亦然).

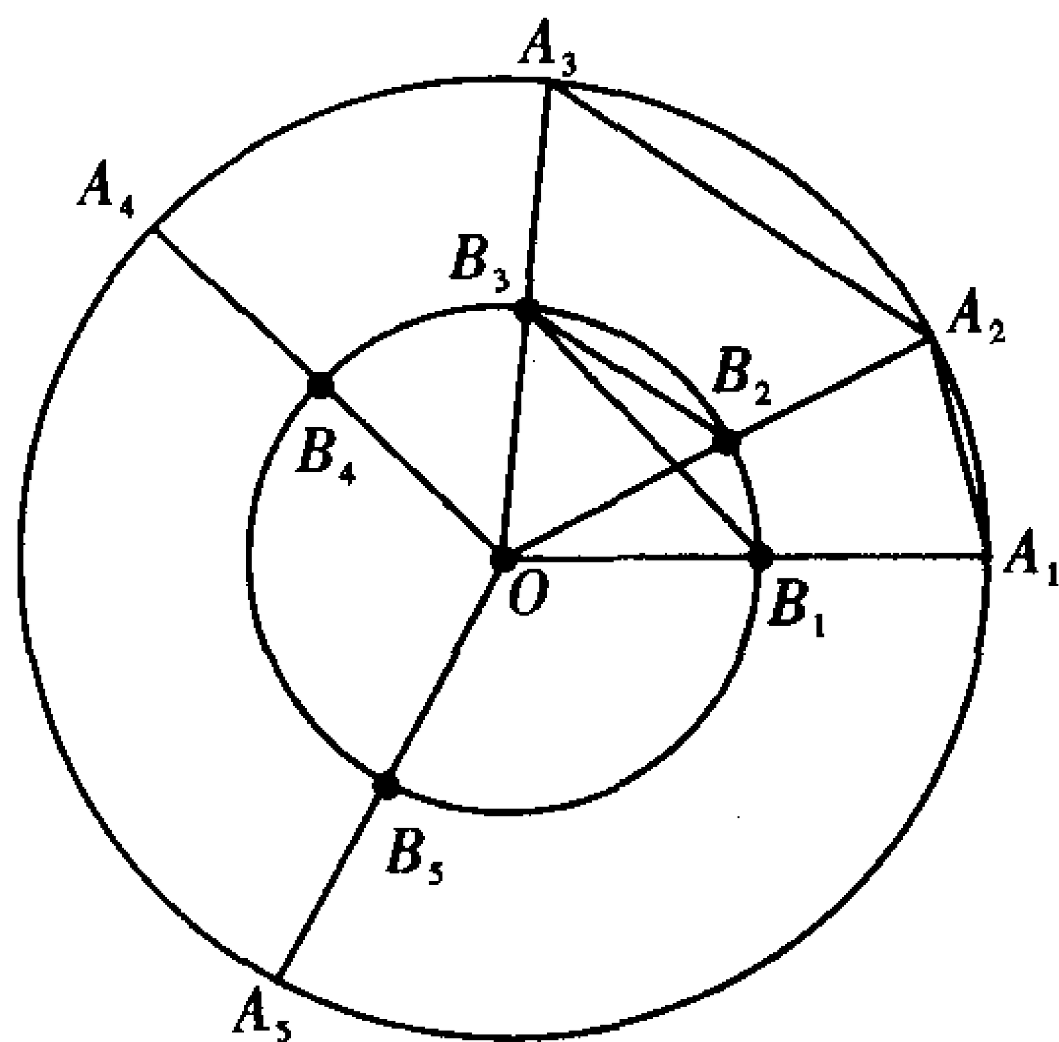


图 7-6

易知 $A_1A_2 /\!/ B_1B_2$,$A_2A_3 /\!/ B_2B_3$,$A_1A_3 /\!/ B_1B_3$,

则 $\triangle A_1A_2A_3 \backsim \triangle B_1B_2B_3$.

又 $R=1995$,$r=1$,$A_1A_2 : B_1B_2 = OA_1 : OB_1$,

故 两个相似三角形的相似比为 1995.

例 12 (2003 年上海市数学竞赛(CASIO 杯)题)已知 a、b、c 为实数,且三次方程 $x^3-ax^2+bx-c=0$ 有三个实根. 试用 a、b、c 给出使三个实根为某三角形三边长的一个充要条件,并证明你的结论.

解 设已知三次方程的三个实根为 x_1、x_2、x_3,由根与系数关系得

$x_1+x_2+x_3=a$,$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$,$x_1x_2x_3=c$.

x_1、x_2、x_3 是某三角形三边长

$$\Leftrightarrow x_1、x_2、x_3 \in \mathbf{R}^+ 且 \begin{cases} x_1+x_2>x_3, \\ x_2+x_3>x_1, \\ x_3+x_1>x_2. \end{cases}$$

显然 x_1、x_2、$x_3\in\mathbf{R}^+\Rightarrow a$、$b$、$c\in\mathbf{R}^+$.

下面用反证法证明：

若 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$ 则 x_1、x_2、$x_3\in\mathbf{R}^+$.

首先，由 $x_1x_2x_3=c>0$ 知 x_1、x_2、$x_3\in\mathbf{R}_+$ 或 x_1、x_2、x_3 一正二负.

若 x_1、x_2、x_3 一正二负，由对称性，不妨设

$x_1>0, x_2<0, x_3<0$.

因为 $x_1+x_2+x_3=a>0$，所以，$x_1>-x_2-x_3$.

从而，$x_1(x_2+x_3)<-(x_2+x_3)^2$. 于是，

$$b=x_1(x_2+x_3)+x_2x_3<-(x_2+x_3)^2+x_2x_3$$
$$=-x_2^2-x_2x_3-x_3^2$$
$$=-(x_2+\frac{x_3}{2})^2-\frac{3}{4}x_3^2<0.$$

矛盾.

故只能是 x_1、x_2、$x_3\in\mathbf{R}^+$.

$$\begin{cases}x_1+x_2>x_3\\x_2+x_3>x_1\\x_3+x_1>x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2x_3>0\\a-2x_1>0\\a-2x_2>0\end{cases}$$

$\Rightarrow(a-2x_1)(a-2x_2)(a-2x_3)>0$.

下面用反证法证明

$(a-2x_1)(a-2x_2)(a-2x_3)>0$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-2x_3>0,\\a-2x_1>0,\\a-2x_2>0.\end{cases}$$

由条件可知 $a-2x_1$、$a-2x_2$、$a-2x_3$ 均大于零或一正二负.

若一正二负，由对称性，不妨设

$a-2x_1>$，$a-2x_2<0$，$a-2x_3<0$.

将后两个不等式相加，得

$2a-2(x_2+x_3)<0$，即 $2x_1<0$.

矛盾.

于是，断言得证.

又 $(a-2x_1)(a-2x_2)(a-2x_3)$

$$=a^3-2(x_1+x_2+x_3)a^2+4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)a-8x_1x_2x_3$$
$$=-a^3+4ab-8c,$$

所以，综上所述，所求的充要条件是，a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，且 $-a^3+4ab-8c>0$.

5. 用于证明不宜直接证明的问题

例 14 （第 29 届俄罗斯数学奥林匹克题）直线上分布着 $2k-1$ 条白色线段和 $2k-1$ 条黑色线段. 已知任何一条白色线段至少与 k 条黑色线段相交，并且任何一条黑色线段都至少与 k 条白色线段相交. 证明：可以找到一条黑色线段与所有白色线段都相交，也可以找到一条白色线段与所有的黑色线段都相交.

证明 只须证明:如果任何一条白色线段都至少与 k 条黑色线段相交,那么,就一定可以找到一条黑色线段与所有白色线段相交.

假设上述断言不成立,则对于每条黑色线段,都存在不与它相交的白色线段. 由抽屉原理,至少有 k 条黑色线段,满足与每条黑色线段相应的白色线段都位于其同一边. 为确定起见,可设都位于左边. 于是,这些黑色线段的左端点都位于不与其相交的白色线段的右端点的右边. 我们考察所有这些白色线段右端点中最左边的一个. 显然,它至少位于 k 条黑色线段左端点的左边,从而,以它为右端点的白色线段不能与这 k 条黑色线段中的任何一条直交,这与题意矛盾.

例 13 (第 28 届俄罗斯数学奥林匹克题)在平面上给出了有限条红色直线和蓝色直线,其中任何两条不平行,并且其中任何两条同色直线的交点处都有一条与它们异色的直线经过. 证明:所有的给定直线相交于同一个点.

证明 假设不是所有直线相交于同一个点. 如图 7-7,任取一条蓝色直线 l,观察 l 与红色直线的各个交点,设点 A 和点 B 是其中相距最远的两个交点,而直线 m 和 n 是经过点 A 和点 B 的红色直线. 设直线 m 与 n 相交于点 C,于是,经过点 C 还有一条蓝色直线 p. 显然,p 与 l 的交点 D 一定位于线段 AB 上,因若不然,由于经过点 D 还有一条红色直线,从而点 A 和点 B 就不是 l 上相距最远的两个与红色直线的交点.

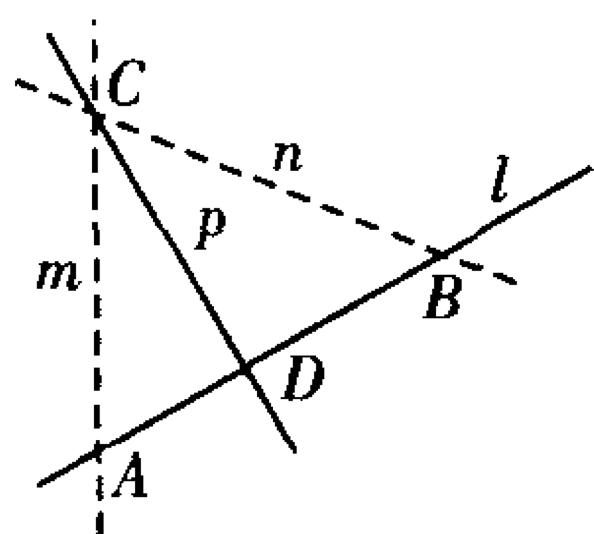


图 7-7

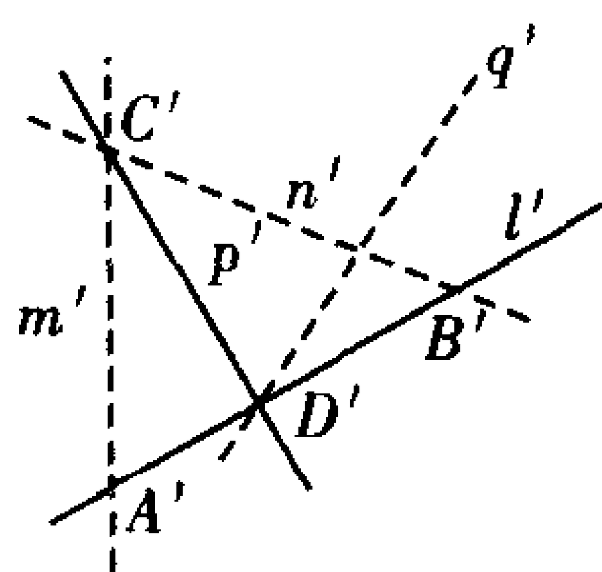


图 7-8

如图 7-8,我们考察所有与直线组 l,m,n,p 相类似的四直线组 l',m',n',p',其中 l'、p' 同为一种颜色,m'、n' 同为另一种颜色,m'、n'、p' 相交于同一个点,l' 与 p' 的交点位于 l' 与 m' 的交点和 l' 与 n' 的交点之间,观察其中由 l'、m'、n' 所形成的三角形具有最小面积的情形. 此时,经过点 D' 还有一条与 m' 同色的直线 q',它或者与线段 $B'C'$ 相交,或者与线段 $A'C'$ 相交,为确定起见,设它与 $B'C'$ 相交. 这时与四直线组 n',l',p',q' 相对应的三角形具有更小的面积. 导致矛盾.

例 15 (第 30 届俄罗斯数学奥林匹克题)某国有 1001 个城市,每 2 个城市之间都有单向行车的道路相连. 每个城市都恰好有 500 条出城的道路和 500 条入城的道路. 由该国划出一个地区,它拥有 668 个城市. 证明:由该地区的每个城市都可以到达该地区的其他任何一个城市,而无需越出地区边界.

证明 假设题目的结论不成立,例如,由该地区的城市 X 不能通过区内的道路到达它的另一个城市 Y. 将由城市 X 可以沿着区内道路到达的该区的所有城市的集合记作 A(其中包括城市 X 本身);而把该区其余所有城市的集合记作 B(显然有 $Y\in B\neq\varnothing$). 易知,连接这两个集合中的城市的所有道路都是由 B 中的城市驶往 A 中的城市的.

分别记 A、B 中的城市数目为 a、b,则 $a+b=688$. 不妨设 A 中的城市不少于 B 中的城市,于是,$a\geqslant334\geqslant b$. 由于每 2 个城市之间都有单向行车的道路相连,所以,B 中存在 1 个城市 Z,由它出发至少有 $\frac{1}{2}(b-1)$ 条道路通往 B 中的其他城市,且由它出发有 a 条道路通往 A 中的城市. 于是,城市 Z

的出城道路就不少于$a+\frac{1}{2}(b-1)=\frac{a+(a+b)-1}{2}=\frac{a+667}{2}>500$. 导致矛盾.

例 16 （2000 年全国高中数学联赛题）有 n 个人，已知他们中的任意两人至多通电话一次，他们中的任意 $n-2$ 个人之间通电话的总次相等，都是 3^k 次，其中 k 是自然数，求 n 的所有可能值.

解 显然 $n\geqslant 5$.

因 n 个人共可组成 C_n^2 个"$n-2$ 人组"，则通话的总次数按重数计算为 $C_n^2\cdot 3^k$ 次.

又每两个人间的通话都在 $C_{n-2}^{n-4}=C_{n-2}^2$ 个"$n-2$ 人组"中被各算了一次，则每一次通话在 $C_n^2\cdot 3^k$ 中的计算重数都是 C_{n-2}^2.

从而，实际的通话总次数

$$l=\frac{C_n^2\cdot 3^k}{C_{n-2}^2}\ (l\in\mathbf{N})$$

故 $\frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^k=\frac{(n-2)(n-3)}{2}\cdot l$

因连续的 4 个自然数 n、$n-1$、$n-2$、$n-3$ 中恰有一个数是 4 的倍数，且另有一个偶数不是 4 的倍数，故易知$\frac{n(n-1)}{2}$与$\frac{(n-2)(n-3)}{2}$都是自然数且一奇一偶.

又因 4 个连续的自然数中任二数的公因数$\leqslant 3$，且$(n,n-1)=1$，$(n-2,n-3)=1$，

则最大公因数 $d=\left(\frac{n(n-1)}{2},\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right)=3$ 或 1.

(1)若 $d=3$，$3\mid\frac{n(n-1)}{2}$，且 $3\mid\frac{(n-2)(n-3)}{2}$，故必有 $3\mid n$ 且 $3\mid(n-3)$，

设 $n=3n_1$，则

$$\left(\frac{n_1(3n_1-1)}{2},\frac{(3n_1-2)(n_1-1)}{2}\right)=1,$$

而$\frac{n_1(3n_1-1)}{2}\cdot 3^k=\frac{(3n_1-2)(n_1-1)}{2}\cdot l$,

故 $\frac{(3n_1-2)(n_1-1)}{2}\mid 3^k$,

当 $n=3n_1$ 是奇数时 n_1-1 是偶数，且显然

$$\left(3n_1-2,\frac{n_1-1}{2}\right)=1,$$

故 $\frac{n_1-1}{2}=1$，$n_1=3$，$3n_1-2=7$，$7\neq 3^k$，矛盾.

当 $n=3n_1$ 是偶数时，又$\left(\frac{3n_1-2}{2},n_1-1\right)=1$，$\frac{3n_1-2}{2}>1$，

则 $n_1-1=1$，$n_1=2$，$\frac{3n_1-2}{2}=2$，矛盾.

从而 $d\neq 3$. 必有

(2)$d=1$.

故 $\frac{(n-2)(n-3)}{2}\mid 3^k$.

若 n 是偶数，因$\left(n-3,\frac{n-2}{2}\right)=1$，$\frac{n-2}{2}<n-3$,

则 $\frac{n-2}{2}=1, n=4$,矛盾.

故 n 是奇数.

$(n-2,\frac{n-3}{2})=1$,

显然 $\frac{n-3}{2}<n-2$,

从而$\frac{n-3}{2}=1, n=5$.

故 $n=5$ 为惟一可能值.

【解题尝试】

A组

1. 已知 a、b、c 均为小于 1 的正数,求证:$a(1-b)$,$b(1-c)$,$c(1-a)$中至少有一个不大于$\frac{1}{4}$.
2. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_7$ 是 $1,2,\cdots,7$ 的一个排列,求证:$p=(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_7-7)$必是偶数.
3. 证明:从空间一点引出的两两夹角不小于$\frac{\pi}{4}$的射线不超过 26 条.
4. 有若干个距离彼此不等的机场,每一个机场都有一架飞机起飞,飞到离它最近的机场降落. 证明:任一机场降落的飞机不能超过 5 架.
5. (第 29 届俄罗斯数学奥林匹克题)称自然数为"完全数",如果它等于自己的所有的不包括自身的正约数的和,例如 $6=1+2+3$. 如果大于 28 的"完全数"可被 7 整除,证明:它必可被 49 整除.

B组

1. (第 30 届俄罗斯数学奥林匹克题)正整数 1 到 100 按照如下顺序摆放在一个圆周上:每一个数或者都大于它两侧的邻数,或者都小于它两侧的邻数,将相邻的一对数称为"好的",如果将它们删去之后,上述性质仍然保持. 试问,最少可能有多少对"好的"邻数?
2. (第 30 届俄罗斯数学奥林匹克题)证明:不存在具有如下性质的由平面上多于 $2n(n>3)$个两两不平行的向量构成的有限集合 G;

   (1)对于该集合中的任何 n 个向量,都能从该集合中再找出 $n-1$ 个向量,使得这 $2n-1$ 个向量的和等于 0;

   (2)对于该集合中的任何 n 个向量,都能从该集合中再找出 n 个向量,使得这 $2n$ 个向量的和等于 0.
3. (2002 年保加利亚冬季数学竞赛题)已知序列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$定义如下:$x_1=3, y_1=4, x_{n+1}=3x_n+2y_n$, $y_{n+1}=4x_n+3y_n, n\geqslant 1$. 证明:$x_n$、$y_n$ 均不能表示为整数的三次幂.
4. (第 26 届俄罗斯数学奥林匹克题)某国有若干个城市,某些城市之间有道路相连,由每个城市连出 3 条道路. 证明:存在一个由道路形成的圈,它的长度不能被 3 整除.

5. (2003 年全国高中联赛加试题)由 n 个点和这些点之间的 l 条连线段组成一个空间图形,其中

$$n=q^2+q+1, l\geqslant\frac{1}{2}q(q+1)^2+1, q\geqslant2, q\in\mathbf{N}.$$

已知此图中任意四点不共面,每点至少有一条连线段,存在一点至少有 $q+2$ 条连线段.证明:图中必存在一个空间四边形(即由四点 A、B、C、D 和四条连线段 AB、BC、CD、DA 组成的图形).

6. (第 30 届俄罗斯数学奥林匹克题)给定多项式 $P(x)$、$Q(x)$.已知对于某一个多项式 $R(x,y)$ 有等式

$$P(x)-P(y)=R(x,y)[Q(x)-Q(y)]$$

成立.证明:存在一个多项式 $S(x)$,使得 $P(x)=S(Q(x))$.

7. (第 26 届俄罗斯数学奥林匹克题)100×100 方格表的方格被分别染为 4 种不同颜色,使得每一行、每一列中都恰有每种颜色的方格各 25 个.证明:可以从表中找出两行和两列,它们所交成的 4 个方格分别被染为 4 种不同颜色.

第 8 章 数学归纳法

【学习目标】

在与自然数有关的命题的证明中，数学归纳法是一个重要的证题方法.

如果把要证明的关于自然数 n 的命题记作 $f(n)$，证明时采用如下 3 个步骤：

(1)证明当 $n=n_0$ 时，$f(n_0)$正确；

(2)假设当 $n=k$ 时，$f(k)$正确($k\geqslant n_0$，且 $k\in\mathbf{N}$)，证明 $n=k+1$ 时，$f(k+1)$也正确；

(3)根据(1)、(2)则作出结论(或由归纳原理)，当 $n\geqslant n_0$ 且 $n\in\mathbf{N}$ 时，$f(n)$正确.

我们把按如上基本形式证明与自然数有关的数学问题的方法叫做数学归纳法，也称第一数学归纳法. 第(1)步叫归纳基础或归纳奠基；第(2)步叫归纳递推；第(2)中的"假设 $n=k$ 时 $f(k)$正确"叫做归纳假设. 第(1)、(2)步有时也合称为归纳原理. 第(3)步叫做归纳断言. 三步缺一不可，第(1)步使第(2)有递推的基础，第(2)步是进行递推，第(3)步则应用(1)和(2)完成数学归纳法中递推的全过程. 缺少步骤(3)，也可以说递推实际上并未开始. 还要注意：在证明 $f(k+1)$中，一定要利用归纳假设，否则就不是应用数学归纳法证题.

注 本章中的非零自然数集均记为 $\mathbf{N}$.

【解题钥匙】

1. 应用于不等式的证明

例 1 (《数学通报》问题 974 题)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，$b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{R}(n\in\mathbf{N}_+)$，且 $a_i+b_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则有不等式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i\cdot b_i}{a_i+b_i}\leqslant\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}$， ①

其中等号当 $n=1$ 或 $n>1$ 有$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$时成立.

证明 显然，当 $n=1$ 时，①式等号成立；

当 $n>1$ 时，由$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=m$，有 $a_i=mb_i(i=1,2,\cdots,n)$，此时，①式等号也成立.

当 $n=2$ 时，要证的不等式是

$$\frac{a_1\cdot b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2\cdot b_2}{a_2+b_2}\leqslant\frac{(a_1+a_2)\cdot(b_1+b_2)}{a_1+a_2+b_1+b_2},$$

而上述不等式等价于下述不等式：

$$[a_1b_1(a_2+b_2)+a_2b_2(a_1+b_1)]\cdot(a_1+a_2+b_1+b_2)$$
$$\leqslant(a_1+a_2)(b_1+b_2)(a_1+b_1)(a_2+b_2),$$

此不等式两边展开整理为

$(a_1b_2-a_2b_1)^2\geqslant 0.$

显然,上述不等式成立.

假设当 $n=k$ 时,①式成立,即

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot b_i}{a_i+b_i}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{k}b_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i+\sum\limits_{i=1}^{k}b_i}\text{成立.}$$

那么,当 $n=k+1$ 时

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{a_i\cdot b_i}{a_i+b_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot b_i}{a_i+b_i}+\frac{a_{k+1}\cdot b_{k+1}}{a_{k+1}+b_{k+1}}$$

$$\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{k}b_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i+\sum\limits_{i=1}^{k}b_i}+\frac{a_{k+1}\cdot bk+1}{a_{k+1}+b_{k+1}}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1}a_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{k+1}b_i}{\sum\limits_{i=1}^{k+1}a_i+\sum\limits_{i=1}^{k+1}b_i}.$$

综上,由数学归纳法原理,即证得①式成立.

注 此例题是一个非常重要的不等式,利用它可证明一系列分式和不等式,例如:

(1)已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是满足 $x_1+x_2+\cdots x_n=nx_0$ 的非负实数,则

当 $t>0$ 时,有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+tx_i}\leqslant\frac{nx_0}{1+tx_0}$;

当 $t<0$ 时,且 $1+tx_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+tx_i}\geqslant\frac{nx_0}{1+tx_0}$.

(2)设 x、y、z 是满足 $x+y+z=1$ 的正实数,则

$$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\leqslant\frac{3}{4}.$$

(3)设 x、y、z 是正实数,则

$$\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}\leqslant\frac{3}{4}.$$

(4)(《中等数学》1996 年 2 期奥林匹克问题 40 题)设 x、y、z 是正实数,$k>1$,则

$$\frac{x}{kx+y+z}+\frac{y}{x+ky+z}+\frac{z}{x+y+kz}\leqslant\frac{3}{k+2}.$$

(5)(《数学通报》问题 449 题)设 x、y、z 是满足 $x+y+z=1$ 的正实数,则

$$\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\geqslant\frac{3}{2}.$$

(6)(《数学通报》问题 839 题)若 α、β、γ 均为锐角,且满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,则

$$\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geqslant\frac{3}{2}.$$

(7)(1967 年民主德国竞赛题,1976 年英国竞赛题)设正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的和记作 S,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}\geqslant\frac{n}{n-1}(n\geqslant 2).$$

(8)(第 23 届 IMO 试题)设非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$. 求

$$S=\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}$$

的最小值.

例 2 (算术-几何平均值不等式)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$,则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n},$$

其中等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

证明 令 $A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

当 $n=2$ 时,由 $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\geqslant0$,知 $\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}$,这说明 $G_2\leqslant A_2$.

假设 $n=k$ 时,有 $G_k\leqslant A_k$.

那么,当 $n=k+1$ 时,由

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+(k-1)\sqrt[k+1]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_k\cdot a_{k+1}}\\ \geqslant&k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+k\sqrt[k]{a_{k+1}\cdot(\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}})^{k-1}}\\ =&k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+k\sqrt[k]{a_{k+1}\cdot(a_1a_2\cdots a_{k+1})^{\frac{k-1}{k+1}}}\\ \geqslant&k\cdot2\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}(a_1a_2\cdots a_{k+1})^{\frac{k-1}{k+1}}}}\\ =&2k\cdot\sqrt[2k]{(a_1a_2\cdots a_ka_{k+1})^{\frac{k-1}{k+1}+1}}\\ =&2k\cdot\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}},\end{aligned}$$

从而 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\geqslant\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}$.

这说明 $n=k+1$ 时,亦有 $A_{k+1}\geqslant G_{k+1}$.

由数学归纳法原理,对 $n\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N}$ 有 $A_n\geqslant G_n$.

注 算术-几何平均值不等式是一个非常重要的不等式,它的应用非常广泛.

例 3 (《中等数学》2004 年第 3 期奥林匹克训练题)$f(n)$定义在正整数集上,且满足 $f(1)=2$,$f(n+1)=(f(x))^2-f(n)+1$,$n=1,2,\cdots$. 求证:对所有整数 $n>1$,有

$$1-\frac{1}{2^{2^{n-1}}}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(i)}<1-\frac{1}{2^{2^n}}.$$

证明 由题设显然有 $f(n)\geqslant2$.

将 $f(n+1)=(f(n))^2-f(n)+1$ 变形为

$f(n+1)-1=f(n)[f(n)-1]$,

则 $\frac{1}{f(n+1)-1}=\frac{1}{f(n)-1}-\frac{1}{f(n)}$. ①

$$\begin{aligned}故\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(i)}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{f(i)-1}-\frac{1}{f(i+1)-1}\right)\\&=\frac{1}{f(1)-1}-\frac{1}{f(n+1)-1}\\&=1-\frac{1}{f(n+1)-1}.\end{aligned}$$ ②

$f(2)=f(1)[f(1)-1]+1=3$,

$f(3)=f(2)[f(2)-1]+1=7$.

由此猜想

$$2^{2^{n-1}}<f(n+1)-1<2^{2^n}. \quad ③$$

用数学归纳法证明式③对 $n\geqslant2$ 的整数成立.

当 $n=2$ 时,$4<f(3)-1<16$,式③成立.

假设 $n=m$ 时,式③成立.

当 $n=m+1$ 时,有

$$f(m+2)=f(m+1)[f(m+1)-1]+1. \quad ④$$

由归纳假设有

$$2^{2^{m-1}}<f(m+1)-1<2^{2^m}.$$

因为 $f(m+1)$ 是正整数,由上式有

$$2^{2^{m-1}}+1\leqslant f(m+1)-1\leqslant2^{2^m}-1. \quad ⑤$$

由式④、式⑤有

$$f(m+2)\geqslant(2^{2^{m-1}}+2(2^{2^{m-1}}+1)+1=2^{2^m}+3\times2^{2^{m-1}}+3\geqslant2^{2^m}+1. \quad ⑥$$

又 $f(m+2)\leqslant2^{2^m}(2^{2^m}-1)+1=2^{2^{m+1}}-2^{2^m}+1<2^{2^{m+1}}+1. \quad ⑦$

由式⑥、式⑦知式③对 $n=m+1$ 成立.

所以,式③对任意正整数 $n\geqslant2$ 成立.

因此,所证不等式成立.

例 4 (2004 年 IMO 中国国家队集训选拔赛题)设 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 是 $k(k\geqslant2)$ 个正整数,且 $1<n_1<n_2<\cdots<n_k$,正整数 a、b 满足

$$(1-\frac{1}{n_1})(1-\frac{1}{n_2})\cdots(1-\frac{1}{n_k})\leqslant\frac{a}{b}<(1-\frac{1}{n_1})(1-\frac{1}{n_2})\cdots(1-\frac{1}{n_{k-1}}).$$

证明:$n_1n_2\cdots n_k\leqslant(4k)^{2^k-1}$.

证明 先证明一个引理.

引理 若正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 及 a、b 满足题设中的不等式,则必有一个 $r(1\leqslant r\leqslant k)$,使得 $n_1n_2\cdots n_r(2^{r+1}a)^r$.

引理的证明:我们先证明,存在 $n_i(1\leqslant i\leqslant k)$,使得 $n_i\leqslant2^{i+1}a$.

注意到 $\frac{a}{b}<\prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{1}{n_i})<1$ 及 a、b 为正整数,则有 $b\geqslant a+1$.

若所有的 n_i 均满足 $n_i>2^{i+1}a$,易知

$$\frac{a}{a+1}\geqslant\frac{a}{b}\geqslant\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{n_i})>1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}>1-\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^{i+1}}>1-\frac{1}{2a},$$

即 $1-\frac{1}{a+1}>1-\frac{1}{2a}$.

则 $2a<a+1$. 这是不可能的. 故所证结论成立.

现在设 r 是最小的下标 i,使得 $n_i\leqslant2^{i+1}a$.

由于 $n_1<n_2<\cdots<n_r$,则

$$n_1n_2\cdots n_r\leqslant n_r^r\leqslant(2^{r+1}a)^r. \quad ①$$

下面证明原题. 对 k 用数学归纳法.

对 $k=1$,我们要从

$$1-\frac{1}{n_1}\leqslant\frac{a}{b}<1 \quad ②$$

导出 $n_1\leqslant(4a)^{2^1-1}$.

这是显然的. 因为式②意味着 $b>a$,从而 $b\geqslant a+1$. 故 $1-\frac{1}{n_1}\leqslant\frac{a}{a+1}=1-\frac{1}{a+1}$. 得 $n_1\leqslant a+1<4a$.

假设在 k 换为任意较小的正整数时结论已成立,现证明在 k 时结论也成立.

设 r 是上述引理所确定的一个正整数,又设 $1\leqslant r\leqslant k-1$. 由已知条件得

$$\prod_{i=r+1}^{k}(1-\frac{1}{n_i})\leqslant\frac{A}{B}<\prod_{i=r+1}^{k-1}(1-\frac{1}{n_i}),$$

这里 $A=a\prod_{i=1}^{r}n_i$, $B=b\prod_{i=1}^{r}(n_i-1)$.

由归纳假设知

$$\prod_{i=r+1}^{k}n_i\leqslant(4A)^{2^{k-r}-1}=(4a)^{2^{k-r}-1}(\prod_{i=1}^{r}n_i)^{2^{k-r}-1}.$$

故由引理得出

$$\prod_{i=1}^{k}n_i\leqslant(4a)^{2^{k-r}-1}(\prod_{i=1}^{r}n_i)^{2^{k-r}}\leqslant(4a)^{2^{k-r}-1}(2^{r+1}a)^{r\cdot 2^{k-r}}. \quad ③$$

注意,由引理知,上述不等式在 $r=k$ 时也成立(无需证明归纳假设的结论).

由③可见,为了完成归纳证明,只须证明

$$4^{2^{k-r}-1}\cdot 2^{r(r+1)2^{k-r}}\leqslant 4^{2^k-1}$$

及 $a^{2^{k-r}-1}\cdot a^{r\cdot 2^{k-r}}\leqslant a^{2^k-1}$.

利用 $2+r(r+1)\leqslant 2^{r+1}$ 及 $1+r\leqslant 2^r$(对 $r\geqslant 1$),易知上述两个不等式都成立. 这就完成了归纳证明.

2. 应用于数列问题的证明

例 5 (1999 年河南省竞赛题)整数列$\{a_n\}$($n\in\mathbf{N}$)满足:$a_1=2$,$a_2=7$,且有

$$-\frac{1}{2}<a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{2}.$$

求证:当 $n\geqslant 2$ 时,a_n 为奇数.

证明 当 $n=2$ 时,$-\frac{1}{2}<a_3-\frac{49}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,有 $24<a_3\leqslant 25$.

因 a_n 为整数,则 $a_3=25=3a_2+2a_1$.

故猜想 $a_{n+1}=3a_n+2a_{n-1}$.

当 $n=2$ 时,命题显然成立.

假设 $n=k$ 时,命题成立,即

$a_{k+1}=3a_k+2a_{k-1}$.

则当 $n=k+1$ 时,由 $|a_{k+2}-\frac{a_{k+1}^2}{a_k}|\leqslant\frac{1}{2}$,只须证

$$|3a_{k+1}+2a_k-\frac{a_{k+1}^2}{a_k}|\leqslant\frac{1}{2}.$$

$$|3a_{k+1}+2a_k-\frac{a_{k+1}^2}{a_k}|$$

$=|3(3a_k+2a_{k-1})+2a_k-\frac{(3a_k+2a_{k-1})^2}{a_k}|$

$=|\frac{11a_k^2+6a_ka_{k-1}-9a_k^2-12a_ka_{k+1}-4a_{k+1}^2}{a_k}|$

$=|\frac{2(a_k^2-3a_k\cdot a_{k-1}-2a_{k-1}^2)}{a_k}|=|\frac{2a_{k-1}}{a_k}\cdot\frac{a_k^2-3a_k\cdot a_{k-1}-2a_{k-1}^2}{a_{k-1}}|$

$=|\frac{2a_{k-1}}{a_k}|\cdot|\frac{a_k^2}{a_{k-1}-(3a_k+2a_{k-1})}|=|\frac{2a_{k-1}}{a_k}|\cdot|\frac{a_k^2}{a_{k-1}}-a_{k+1}|\leqslant\frac{1}{2}$.

(因 $2a_{k-1}<a_k=3a_{k-1}+2a_{k-2}$)命题也成立.

由数学归纳法原理知,当 $n\geqslant 2$ 时,有 $a_{n+1}=3a_n+2a_{n-1}$.

又 a_2 为奇数,$a_3=3a_2+2a_1$ 是奇+偶,仍为奇数,而 $a_{n+1}=3a_n+2a_{n-1}$ 是奇+偶,为奇数,故当 $n\geqslant 2$ 时,a_n 为奇数.

例 6 (第 53 届罗马尼亚数学奥林匹克(第二轮)题)已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=1$,当 $n\geqslant 1$ 时,有

$$4(x_1x_n+2x_2x_{n-1}+3x_3x_{n-2}+\cdots+nx_nx_1)=(n+1)(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_{n+1}). \quad ①$$

求 $\{x_n\}$ 的通项公式.

解 将 $n=1$ 代入式①得 $4x_1^2=2x_1x_2$,则 $x_2=2$.

将 $n=2$ 代入式①得

$4(x_1x_2+2x_2x_1)=3(x_1x_2+x_2x_3)$,则 $x_3=3$.

假设 $x_k=k$,其中 $1\leqslant k\leqslant n$. 由

$$4\sum_{k=1}^{n}kx_kx_{n+1-k}=(n+1)\sum_{k=1}^{n}x_kx_{k+1},$$

得 $$4\sum_{k=1}^{n}k^2(n+1-k)=(n+1)\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)+(n+1)nx_{n+1},$$

$$4(n+1)\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}=(n+1)\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+(n+1)\cdot\frac{(n-1)n}{2}+n(n+1)x_{n+1}.$$

所以,$x_{n+1}=\frac{2(n+1)(2n+1)}{3}-n(n+1)-\frac{(n-1)(2n-1)}{6}-\frac{n-1}{2}=n+1$.

综上所述,由数学归纳法原理,知 $x_n=n$.

例 7 (2004 年中国数学奥林匹克题)证明:除了有限个正整数外,其他的正整数 n 均可表示为 2004 个正整数之和:$n=a_1+a_2+\cdots+a_{2004}$,且满足 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{2004}$,$a_i|a_{i+1}$,$i=1,2,\cdots,2003$.

证明 我们证明更一般的结论:

对任给正整数 $r(r\geqslant 2)$,总存在正整数 $N(r)$,当 $n\geqslant N(r)$ 时,存在正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_r$,使得 $n=a_1+a_2+\cdots+a_r$,$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_r$,$a_i|a_{i+1}$,$i=1,2,\cdots,r-1$.

证明如下:

当 $r=2$ 时,有 $n=1+n-1$,取 $N(2)=3$ 即可.

假设当 $r=k$ 时结论成立. 当 $r=k+1$ 时,取

$N(k+1)=4N(k)^3$.

设 $n=2^a(2l+1)$,若 $n\geqslant N(k+1)=4N(k)^3$,则

$2^a\geqslant 2N(k)^2$,或 $2l+1\geqslant 2N(k)$.

若 $2^a\geqslant 2N(k)^2$,则存在正偶数 $2t\leqslant a$,使得 $2^{2t}\geqslant N(k)^2$,即 $2^t+1\geqslant N(k)$. 由归纳假设,存在正整

数 $b_1,b_2,\cdots,b_k$，使得

$2^l+1=b_1+b_2+\cdots+b_k,1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_k$，

$b_i\mid b_{i+1},i=1,2,\cdots,k-1$.

则 $2^a=2^{a-2l}\times 2^{2l}=2^{a-2l}[1+(2^l-1)(2^l+1)]$

$=2^{a-2l}+2^{a-2l}(2^l-1)b_1+2^{a-2l}(2^l-1)b_2+\cdots+2^{a-2l}(2^l-1)b_k$，

$n=2^{a-2l}(2l+1)+2^{a-2l}(2^l-1)b_1(2l+1)+\cdots+2^{a-2l}(2^l-1)b_k(2l+1)$.

若 $2l+1\geqslant 2N(k)$，则 $l\geqslant N(k)$. 由归纳假设，存在正整数 $c_1,c_2,\cdots,c_k$，使得

$l=c_1+c_2+\cdots c_k,1\leqslant c_1<c_2<\cdots<c_k$，

$c_i\mid c_{i+1},i=1,2,\cdots,k-1$.

因此，$n=2^a+2^{a+1}c_1+2^{a+1}c_2+\cdots+2^{a+1}c_k$ 满足要求.

由数学归纳法原理知，上述一般结论对所有的 $r\geqslant 2$ 成立.

3. 应用于几何问题的证明

例 8 平面内有 n 个两两相交的圆，并且任意三个圆不经过同一点. 试问：这 n 个圆把平面分成多少个区域？

解 设 n 个圆把平面分成 a_n 个区域，那么 $a_1=2$. 假设 $k-1$ 个圆把平面分成 a_{k-1} 个区域，则在 $k-1$ 个圆的基础上再增加一个圆后，这个圆和原来的 $k-1$ 个圆中的每一个圆都有两个交点，一共有 $2(k-1)$ 个交点，把新增加的圆分为 $2(k-1)$ 段弧，而每段弧都将原来的一个区域分为两个区域，故 $a_k=a_{k-1}+2(k-1)$，即 $a_k-a_{k-1}=2(k-1)$，由此求得 $a_k=a^2-k+2$. 从而当 $n=k-1$ 时，有 $a_{k-1}=(k-1)^2-(k-1)+2$，那么，当 $n=k$ 时，$a_k=a_{k-1}+2(k-1)=(k-1)^2-(k-1)+2+2(k-1)=k^2-k+2$. 由数学归纳法原理，知这 n 个圆把平面分成 n^2-n+2 个区域.

例 9 （2001 年湖南省竞赛题）边长为 1 的菱形 A_1B_1CD 的两对角线交于 A_2，过 A_2 作 $A_2B_2\,/\!/\,A_1B_1$ 交 B_1C 于 B_2，连结 B_2D 交 A_1C 于 A_3，过 A_3 作 $A_3B_3\,/\!/\,A_1B_1$ 交 B_1C 于 B_3，…，这样作下去得 A_nB_n. 以 B_1 为原点，B_1C 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，设以 $\frac{1}{A_nB_n}$ 为半径，圆心在 y 轴上的一列圆 $T_n(n=1,2,\cdots)$ 依次相外切（即 T_k 与 T_{k+1} 外切，$k=1,2,\cdots$），若圆 T_1 与抛物线 $y=x^2$ 相切. 求证：所有的圆 $T_n(n=1,2,\cdots)$ 都与抛物线 $y=x^2$ 相切.

证明 如图 8-1，由题设知 $A_1B_1=1,A_2B_2=\frac{1}{2}$.

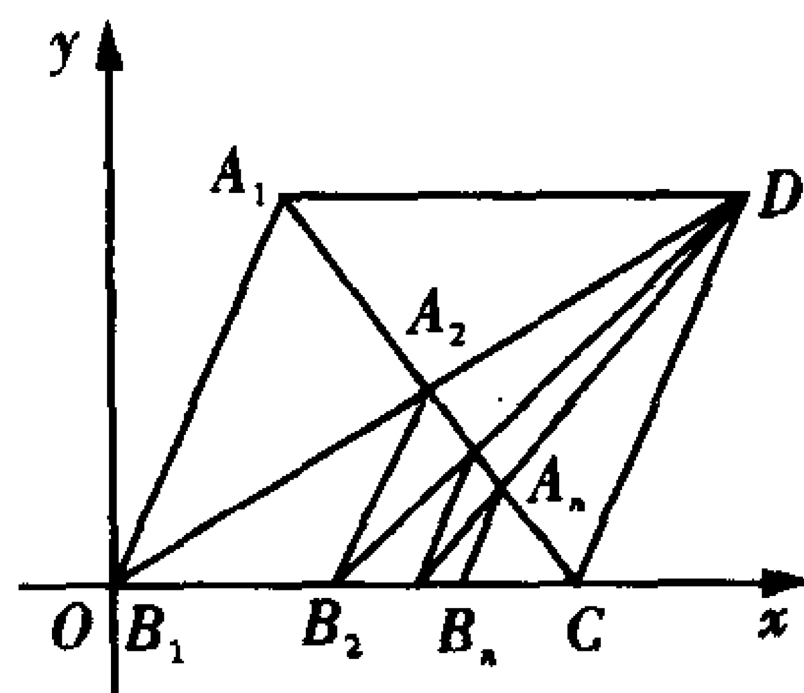


图 8-1

猜测：$A_nB_n=\frac{1}{n}$.

用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，显然成立.

假设 $n=k$ 时，有 $A_kB_k=\frac{1}{k}$. 由三角形相似有

$\frac{A_{k+1}B_{k+1}}{A_kB_k}=\frac{CB_{k+1}}{CB_k}$ 及 $\frac{A_{k+1}B_{k+1}}{DC}=\frac{B_kB_{k+1}}{CB_k}$.

此两式相加即证得

$A_{k+1}B_{k+1}=\frac{1}{k+1}$.

由归纳法原理,知 $n>1$ 时,$A_nB_n=\frac{1}{n}$.

设以$\frac{1}{A_1B_1}$为半径且圆心在 y 轴上的圆与 $y=x^2$ 相切的圆心坐标为$(0,a_1)$.则由

$\begin{cases}x^2+(y-a_1)^2=1\\ y=x^2\end{cases}$ 得 $y^2+(1-2a_1)y+a_1^2-1=0$.

再由其 $\Delta=(2a_1-1)^2-4(a_1^2-1)=0$

求得 $a_1=\frac{5}{4}$. ①

设以$\frac{1}{A_nB_n}$为半径的圆依次外切且圆心在 y 轴上时的圆心坐标为$(0,a_n)$,其中 $n\geqslant2$.则

$$a_n=a_1+\frac{1}{A_1B_1}+\frac{2}{A_2B_2}+\cdots+\frac{2}{A_{n-1}B_{n-1}}+\frac{1}{A_nB_n}.$$

从而,$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{A_nB_n}+\frac{1}{A_{n-1}B_{n-1}}$,

即 $a_k-a_{k-1}=\frac{1}{A_kB_k}+\frac{1}{A_{k-1}B_{k-1}}$.

又$\frac{1}{A_kB_k}-\frac{1}{A_{k-1}B_{k-1}}=1$,

故 $a_k-a_{k-1}=\frac{1}{A_kB_k^2}-\frac{1}{A_{k-1}B_{k-1}^2}$. ②

在式②中,令 $k=2,3,\cdots,n$ 得 $n-1$ 个等式,将这 $n-1$ 个等式及式①两边相加得

$a_n=\frac{1}{4}(1+\frac{4}{A_nB_n^2})$. ③

再由$\begin{cases}x^2+(y-a_n)^2=\frac{1}{A_nB_n^2}\\ y=x^2\end{cases}$

有 $(y-a_n)^2+y-\frac{1}{A_nB_n^2}=0$.

则由 $\Delta=(1-2a_n)^2-4(a_n^2-\frac{1}{A_nB_n^2})$,再将③代入得 $\Delta=0$,这说明这些圆均与抛物线 $y=x^2$ 相切.

例 10 (2001 年全国高中联赛题)将边长为正整数 m、n 的矩形划分成若干边长均为正整数的正方形,每个正方形的边均平行于矩形的相应边.试求这些正方形边长之和的最小值.

证明 记所求最小值为 $f(m,n)$,可以证明

$f(m,n)=m+n-(m,n)$. (*)

其中(m,n)表示 m 和 n 的最大公约数.

事实上,不妨设 $m\geqslant n$.

(1)对 m 归纳.可证明非一种合乎题意的分法,使所得正方形边长之和恰为 $m+n-(m,n)$.

当 $m=1$ 时,命题显然成立.

假设当 $m\leqslant k$ 时,结论成立($k\geqslant1$).当 $m=k+1$ 时,若 $n=k+1$,则命题显然成立.若 $n<k+1$,从矩形 $ABCD$ 中切去正方形 AA_1D_1D 如图 8-2 所示,由归纳假设,矩形 A_1BCD_1 有一种分法使得所得正方形边长之和恰为

$m-n+n-(m-n,n)=m-(m,n)$.

于是，原矩形 $ABCD$ 有一种分法使得所得正方形边长之和为 $m+n-(m,n)$.

(2)对 m 归纳可以证明(*)成立.

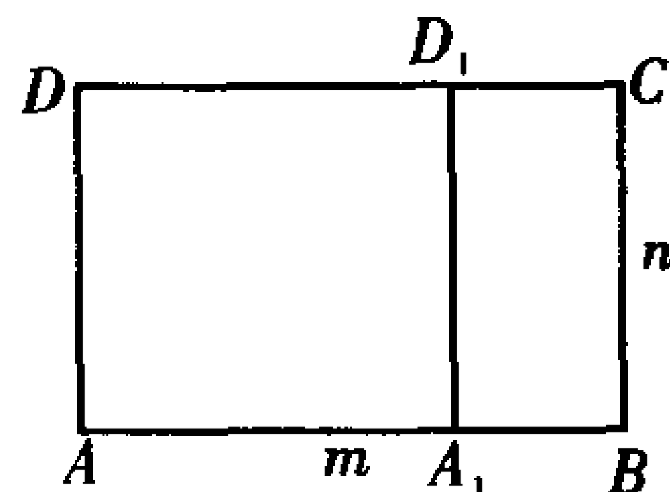


图 8-2

当 $m=1$ 时，由于 $n=1$，显然

$f(m,n)=1=m+n-(m,n)$.

假设当 $m\leqslant k$ 时，对任意 $1\leqslant n\leqslant m$，有

$f(m,n)=m+n-(m,n)$.

若 $m=k+1$，当 $n=k+1$ 时，显然

$f(m,n)=k+1=m+n-(m,n)$.

当 $1\leqslant n\leqslant k$ 时，设矩形 $ABCD$ 按要求分成了 p 个正方形，其边长分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_p$. 不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_p$.

显然，$a_1=n$ 或 $a_1<n$.

若 $a_1<n$，则在 AD 与 BC 之间的与 AD 平行的任一直线至少穿过两个分成的正方形(或其边界)，于是 $a_1+a_2+\cdots+a_p$ 不小于 AB 与 CD 之和.

故 $a_1+a_2+\cdots+a_p\geqslant 2m>m+n-(m,n)$.

若 $a_1=n$，则一个边长分别为 $m-n$ 和 n 的矩形可按题目要求分成边长分别为 $a_2,\cdots,a_p$ 的正方形. 由归纳假设

$a_2+\cdots+a_p\geqslant m-n+n-(m-n,n)=m-(m,n)$.

从而，$a_1+a_2+\cdots+a_p\geqslant m+n-(m,n)$.

于是，当 $m=k+1$ 时，

$f(m,n)\geqslant m+n-(m,n)$.

再由(1)可知，$f(m,n)=(m+n)-(m,n)$.

4. 应用于数论问题的证明

例 11 设 $n\in\mathbf{N}$，求证：大于 $(3+\sqrt{5})^{2n}$ 的最小整数能被 2^{n+1} 整除.

证明 因为 $n\in\mathbf{N}$，所以可设 $(3+\sqrt{5})^{2n}=A_n+B_n\sqrt{5}$，$A_n$、$B_n\in\mathbf{N}$，从而 $(3-\sqrt{5})^{2n}=A_n-B_n\sqrt{5}$，即有 $(3+\sqrt{5})^{2n}+(3-\sqrt{5})^{2n}=2A_n\in\mathbf{N}$.

又因为 $|3-\sqrt{5}|<1$，所以 $0<(3-\sqrt{5})^{2n}<1$.

因此，$2A_n=(3+\sqrt{5})^{2n}+(3-\sqrt{5})^{2n}$ 就是大于 $(3+\sqrt{5})^{2n}$ 的最小整数. 于是，问题转化成证明 $2A_n$ 能被 2^{n+1} 整除.

当 $n=1$ 时，$(3+\sqrt{5})^2=14+6\sqrt{5}$，$A_1=14$，$B_1=6$，$A_1$、$B_1$ 都能被 2^2 整除.

假设 $n=k$ 时，A_k、B_k 都能被 2^k 整除，则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}A_{k+1}+B_{k+1}\sqrt{5}&=(3+\sqrt{5})^{2(k+1)}\\&=(3+\sqrt{5})^2\cdot(A_k+B_k\sqrt{5})\\&=2(7A_k+15B_k)+2(3A_k+7B_k)\sqrt{5},\end{aligned}$$

$A_{k+1}=2(7A_k+15B_k)$，$B_{k+1}=2(3A_k+7B_k)$.

由归纳假设，A_{k+1}，B_{k+1} 都能被 2^{k+1} 整除.

所以，由数学归纳法原理，知对一切 $n\in\mathbf{N}$，A_n、B_n 都能被 2^n 整除，从而 $2A_n$ 能被 2^{n+1} 整除. 原命

题得证.

例 12 （第 26 届俄罗斯数学奥林匹克题）在黑板上依次写出数 $a_1=1,a_2,a_3,\cdots$，法则如下：如果 a_n-2 为自然数且未写出过，则写 $a_{n+1}=a_n-2$，否则就写 $a_{n+1}=a_n+3$. 证明：所有出现在该序列中的完全平方数都是由写在它前面的那个数加 3 得到的.

证明 我们用归纳法证明如下断言：当 $n=5m$ 时，由 1 到 n 的所有自然数全都会被写出，且 $a_{5m}=5m-2$. 而对于任何 $k\leqslant 5m$，都必有 $a_{k+5}=a_k+5$.

$n=5$ 时，有 $1\to4\to2\to5\to3\to6$，结论成立. 假定当 $n=5m$ 时，由 1 到 $5m$ 的所有整数均已被写出，且 $a_{5m}=5m-2$；于是，接下来的 5 个数就只能是 $a_{5m+1}=5m+1,a_{5m+2}=5m+4,a_{5m+3}=5m+2,a_{5m+4}=5m+5,a_{5m+5}=5m+3$. 如此即完成了归纳过程.

这样一来便知，凡是出现在序列中的被 5 除余 4、1 和 0 的数，都是通过写在它前面的那个数加 3 得到的. 而完全平方数被 5 除的余数只能是 4、1 和 0.

例 13 （2003 年美国数学奥林匹克题）证明：对任何正整数 n，存在一个各位数码都是奇数且能被 5^n 整除的 n 位数.

证明 用数学归纳法证明.

$n=1$ 时，结论显然成立，假设 $N=\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ 能被 5^n 整除，且各位数字是奇数. 考虑下列数字：

$N_1=\overline{1a_1a_2\cdots a_n}=1\times10^n+5^nM=5^n(1\times2^n+M)$，

$N_3=\overline{3a_1a_2\cdots a_n}=3\times10^n+5^nM=5^n(3\times2^n+M)$，

$N_5=\overline{5a_1a_2\cdots a_n}=5\times10^n+5^nM=5^n(5\times2^n+M)$，

$N_7=\overline{7a_1a_2\cdots a_n}=7\times10^n+5^nM=5^n(7\times2^n+M)$，

$N_9=\overline{9a_1a_2\cdots a_n}=9\times10^n+5^nM=5^n(9\times2^n+M)$.

$1\times2^n+M,3\times2^n+M,5\times2^n+M,7\times2^n+M,9\times2^n+m$ 除以 5 时所得余数各不相同，否则它们中的某两个的差是 5 的倍数，而这是不可能的. 因为 2^n 不能被 5 整除，而 1,3,5,7,9 中任何两个之差也不是 5 的倍数. 这表明 N_1,N_3,N_5,N_7,N_9 中有一个是 $5^n\times5=5^{n+1}$ 的倍数.

5. 应用于集合问题的证明

例 14 （2004 年全国高中联赛题）对于整数 $n(n\geqslant4)$，求出最小的整数 $f(n)$，使得对于任何正整数 m，集合 $\{m,m+1,\cdots,m+n-1\}$ 的任一个 $f(n)$ 元子集中，均有至少 3 个两两互质的元素.

证明 当 $n\geqslant4$ 时，对集合 $M=\{m,m+1,m+2,\cdots,m+n-1\}$，若 $2|m$，则 $m+1,m+2,m+3$ 两两互素；若 $2\nmid m$，则 $m,m+1,m+2$ 两两互素.

于是，M 的所有 n 元子集中，均有至少 3 个两两互素的元素. 因此，$f(n)$ 存在，且 $f(n)\leqslant n$.

设 $T_n=\{t\,|\,t\leqslant n+1$ 且 $2|t$ 或 $3|t\}$，则 T_n 为 $\{2,3,\cdots,n+1\}$ 的子集. 但 T_n 中任 3 个元素均不能两两互素，因此，$f(n)\geqslant|T_n|+1$. 由容斥原理知

$$|T_n|=[\frac{n+1}{2}]+[\frac{n+1}{3}]-[\frac{n+1}{6}].$$

$$故\ f(n)\geqslant[\frac{n+1}{2}]+[\frac{n+1}{3}]-[\frac{n+1}{6}]+1. \quad ①$$

因此，$f(4)\geqslant4,f(5)\geqslant5,f(6)\geqslant5,f(7)\geqslant6,f(8)\geqslant7,f(9)\geqslant8$.

下面证明 $f(6)=5$.

设 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 为 $\{m,m+1,\cdots,m+5\}$ 中的 5 个数. 若这 5 个数中有 3 个奇数，则它们两两互质；若这 5 个数中有 2 个奇数，则必有 3 个偶数，不妨设 x_1,x_2,x_3 为偶数，x_4,x_5 为奇数. 当 $1\leqslant i<$

$j\leqslant 3$ 时，$|x_i-x_j|\in\{2,4\}$，所以，x_1,x_2,x_3 中至多 1 个被 3 整除，至多 1 个被 5 整除. 从而，至少有 1 个既不被 3 整除也不被 5 整除. 不妨设 $3\nmid x_3$，$5\nmid x_3$，则 x_3,x_4,x_5 两两互质，故这 5 个数中的 3 个两两互质，即

$f(6)=5$.

又由 $\{m,m+1,\cdots,m+n\}=\{m,m+1,\cdots,m+n-1\}\cup\{m+n\}$ 知

$f(n+1)\leqslant f(n)+1$.

因为 $f(6)=5$，所以，

$f(4)=4,f(5)=5,f(7)=6,f(8)=7,f(9)=8$.

因此，当 $4\leqslant n\leqslant 9$ 时，

$$f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1. \quad ②$$

再对 n 用归纳法证明式②对所有 n 都成立.

假设 $n\leqslant k(k\geqslant 9)$ 时式②成立.

当 $n=k+1$ 时，由于

$$\begin{aligned}&\{m,m+1,\cdots,m+k\}\\&=\{m,m+1,\cdots,m+k-6\}\cup\{m+k-5,m+k-5+1,m+k-5+2,m+k-5+3,m+k-5+4,\\&\quad m+k-5+5\},\end{aligned}$$

且由归纳假设 $n=6,n=k-5$ 时，式②成立，所以，

$$f(k+1)\leqslant f(k-5)+f(6)-1=\left[\frac{k+2}{2}\right]+\left[\frac{k+2}{3}\right]-\left[\frac{k+2}{6}\right]+1. \quad ③$$

由式①、式③知，对于 $n=k+1$，式②成立.

所以，对于任意 $n\geqslant 4$，

$$f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1.$$

例 15 （2002 年中国西部数学奥林匹克题）设 n 为正整数，集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}$ 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 $n+1$ 个非空子集. 证明：存在 $\{1,2,\cdots,n+1\}$ 的两个不交的非空子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 和 $\{j_1,j_2,\cdots,j_m\}$，使得

$$A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}=A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup\cdots\cup A_{j_m}.$$

证明 用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，必有 $A_1=A_2=\{1\}$，命题获证.

设命题对 $n=l$ 成立，考虑 $n=l+1$ 的情形.

此时若存在 $A_i=A_j$，则命题成立. 因此，可设 $A_1,A_2,\cdots,A_{l+2}$ 两两不同. 令 $A'_i=A_i\setminus\{l+1\}$，则 $A'_i\subseteq\{1,2,\cdots,l\}$，$i=1,2,\cdots,l+2$.

(1) A'_i 两两不同. 此时，考虑 $A'_1,A'_2,\cdots,A'_{l+1}$，运用归纳假设，可得分组

$$U'_1\xlongequal{\text{记}}A'_{i_1}\cup A'_{i_2}\cup\cdots\cup A'_{i_s}=A'_{j_1}\cup A'_{j_2}\cup\cdots\cup A'_{j_t}\xlongequal{\text{记}}U'_2. \quad ①$$

如果将式①中的 A'_i 改为 A_i 后，得 $U_1=U_2$，则命题获证. 若 $U_1\neq U_2$，则必有一边含有 $l+1$，而另一边不含 $l+1$，不妨设 $l+1\in A_{i_1}$. 而对任意 $1\leqslant k\leqslant t$，均有 $l+1\notin A_{j_k}$.

此时，考虑 $A'_1,A'_2,\cdots,A'_{l+2}$ 中除 A'_{i_1} 以外的 $l+1$ 个集合. 利用归纳假设，可得另一分组

$$U'_3\xlongequal{\text{记}}A'_{i_1}\cup A'_{i_2}\cup\cdots\cup A'_{i_s}=A'_{j_1}\cup A'_{j_2}\cup\cdots\cup A'_{j_t}\xlongequal{\text{记}}U'_4. \quad ②$$

如果将式②中的 $A_j{}'$ 改为 A_j 后，得 $U_3=U_4$，则命题获证. 若 $U_3\neq U_4$，则必有一边含有 $l+1$，而另一边不含 $l+1$，不妨设 $l+1\notin U_3$，$l+1\in U_4$. 此时，考虑下面的并集

$$U'_1\cup U'_3=U'_3\cup U'_4. \quad ③$$

则式③中两边去掉"′"后，必有 $U_1\cup U_3=U_2\cup U_4$. 这时，只需对式③中下标相同的集合予以处理.

注意到，$A'_{i_1}\in U'_1$，但 $A'_{i_1}\notin U'_k$，$k=2,3,4$，故下标 i_1 仅在式③中出现一次. 从而，在将下标相同的集合去掉时(保持式③成立)，式③的两边不会变为空集. 若 A'_i 在式③中重复出现，不妨设 $A'_i\in U'_1$，若 $A'_i\in U'_3$，则从 U'_3 中去掉 A'_i，式③仍成立；若 $A'_i\in U'_4$. 此时结合 $U'_1=U'_2$ 可知，将 A'_i 从 U'_4 中去掉后，式③仍成立. 依此处理，直至式③两边没有相同下标的项，从而命题获证.

(2)若 A'_i 中存在相同的集合($1\leqslant i\leqslant l+2$)，这时，如果 A'_i 中有 3 个相同，不妨设 $A'_1=A'_2=A'_3$，则 A_1、A_2、A_3 中必有 2 个相等，矛盾. 如果 A'_i 中有两对集合分别相等，不妨设 $A_1{}'=A'_2$，$A'_3=A'_4$，这时 A_1、A_2 中恰有一个含有 $l+1$，A_3、A_4 中也恰有一个含有 $l+1$. 不妨设 $l+1\in A_1$，$l+1\in A_3$，而 $l+1\notin A_2$，$l+1\notin A_4$，此时，得到 $A_1\cup A_4=A_2\cup A_3$. 命题获证.

最后，A'_i 中恰有两个集合相同，设为 $A'_1=A'_2$，此时，$l+1$ 必恰属于 A_1、A_2 中的一个. 注意到，两个集合组 $A'_1,A'_3,\cdots,A'_{l+2}$ 与 $A'_2,A'_3,\cdots,A'_{l+2}$ 中没有相同的集合(指同一组内). 这时，利用(1)的处理方法，可知命题成立.

综上可知，命题对一切正整数 n 成立.

6. 应用于组合问题的证明

例 16 (《中等数学 2004 年 2 期奥林匹克训练题》)用 $f(n)$ 表示 0 和 1 组成的长度为 n 的排列中，没有两个 1 相连的排列的个数. 约定 $f(0)=1$. 证明：

(1) $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$，$n\geqslant 2$；

(2) $f(4k+2)$ 能被 3 整除，$k\geqslant 0$.

证明 (1)已约定 $f(0)=1$.

当 $n=1$ 时，由 0,1 组成的排列只有 0,1，则 $f(1)=2$；

当 $n=2$ 时，由 0,1 组成的排列有 00,01,10,11，去掉 11，得 $f(2)=3$. 所以，$f(2)=f(1)+f(0)$.

当 $n>2$ 时，将长度为 n 的排列由末两位数字的特征分成两类：一类是 00,10，最后一个数字为 0 时，无两个 1 相邻的排列有 $f(n-1)$ 个；另一类是 01，最后两个数字为 01 时，无两个 1 相邻的排列有 $f(n-2)$ 个. 所以，

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)\,(n>2).$$

综上所述，对 $n\geqslant 2$，有

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2).$$

(2)用数学归纳法.

当 $k=0$ 时，$f(2)=3$，有 $3\mid f(2)$.

假设 $k=m$ 时命题成立，$3\mid f(4m+2)$，不妨设

$$f(4m+2)=3q,$$

$$f(4m+3)=3q_1+r,\ 0\leqslant r<3.$$

由已证递推式，有

$$f(4m+4)=f(4m+3)+f(4m+2)=3q_2+r,$$

$$f(4m+5)=f(4m+4)+f(4m+3)=3q_3+2r,$$

$f(4(m+1)+2)=f(4m+6)=f(4m+5)+f(4m+4)=3(q_2+q_3+r)$.

所以,$k=m+1$ 时,$3|f(4(m+1)+2)$.

由数学归纳法知,对一切 $k\geqslant 0$,有 $3|f(4k+2)$.

例 17 (第 26 届俄罗斯数学奥林匹克题)在矩形的桌子上放着许多相等的正方形,其边都平行于桌子的边,且被分别染为 k 种不同颜色.如果考察其中任何 k 个颜色不同的正方形,则它们中都有某两个可用一枚钉子钉在桌子上.证明:可用 $2k-2$ 枚钉子把某一种颜色的所有正方形全都钉在桌子上.

证明 对颜色的种类 k 作归纳.

当 $k=2$ 时,我们观察最左面的正方形 K.如果它是 1 号色,则所有 2 号色的正方形都同它有公共点,因而每个 2 号色的正方形都包含了正方形 K 的右边两个顶点之一,从而可用两枚钉子钉住所有 2 号色的正方形.

假设 $k=n$ 时断言已证,我们来证明 $n+1$ 种颜色时断言也成立.考察所有的正方形并从它们中选出最左边的正方形 K,假设它被染为第 $n+1$ 种颜色.凡是与 K 相交的正方形都包含 K 的右边两个顶点之一,所以它们可用两枚钉子全部钉住.现在我们从桌子上取走所有第 $n+1$ 种颜色的正方形以及所有与 K 相交的其他颜色的正方形,于是桌面上仅剩下 n 种不同颜色的正方形.不难证明,对于其中任何 n 个颜色各异的正方形,都可从中找出两个相交的正方形来(如若不然,则把 K 列入其中,得到 $n+1$ 个颜色各异的正方形,它们均两两不交,与题意矛盾).这样一来,由归纳假设知,可从中选出某一种颜色 i,并可用 $2n-2$ 枚钉子钉住所有剩在桌面上的第 i 号的正方形.又因凡被取走的该种颜色的正方形均与 K 相交,它们可用两枚钉子全部钉住,因此一共可用 $2(n+1)-2$ 枚钉子全部钉住它们.

例 18 (2002 年克罗地亚国家数学竞赛题)岛上居住着 n 个本地人,他们中每两人要么是朋友要么是敌人.一天,首领要求每位居民(包括他自己)按以下原则自己做一条石头项链:每两个朋友间,他们的项链上至少有一块相同的石头;每两个敌人间,他们的项链上的石头均不相同(一条项链上可以“无石头”).证明:要完成首领的命令需$\left[\frac{n^2}{4}\right]$种不同的石头,并且当石头种数少于$\left[\frac{n^2}{4}\right]$时,此命令可能无法实现.(其中,$[x]$表示不超过 x 的最大整数.)

证明 用数学归纳法.

当 $n=1$ 和 $n=2$ 时,显然居民可按规定做项链.

假设 $n=k$ 时结论成立,要证 $n=k+2$ 时结论也成立.若每两位居民都是敌人,将不需要石头.现假设在居民中至少有两人是朋友,记作 A 和 B.由假设知另外 k 个人至多用$\left[\frac{k^2}{4}\right]$种不同的石头做项链.因为 A 与 B 是朋友,所以他们在制做项链时可以共同使用一种新石头.

下面考虑 k.在居民中的某人 C,有以下 3 种可能:

(1)C 与 A、B 均是敌人;

(2)C 与 A、B 均是朋友;

(3)C 是一人的朋友,是另一人的敌人.

在(1)中,不需要一种新石头;在(2)中,他们每人在项链上选一种新石头;在(3)中,仅 C 和他的朋友需选一种新石头.每种情况,他们都至多要用一种新石头.综合起来,他们至多需要$\left[\frac{k^2}{4}\right]+1+k$

种石头(A 和 B 需一种,余下 k 人中的每个人需一种),且$[\frac{k^2}{4}+l+1]=[\frac{(k+2)^2}{4}]$.

所以,$[\frac{n^2}{4}]$种石头满足条件.

下面证明,石头种数是不可减少的.

若 n 是偶数,设 $n=2m$,将居民分作相等的两组,使得任何同组的两人是敌人,任何不同组的两人是朋友.他们共需 $m^2=\frac{n^2}{4}=[\frac{n^2}{4}]$种石头(因为有 m^2 对朋友,且在三个居民中至少有两个是敌人,所以这三人没有同一种石头).

设 $n=2m+1$,将所有人分作 m、$m+1$ 两组.如前面,任何同组的两人是敌人,任何不同组的两人是朋友.此时,他们需要

$$m(m+1)=\frac{m^2+4m}{4}=[\frac{4m^2+4m+1}{4}]=[\frac{(2m+1)^2}{4}]=[\frac{n^2}{4}]\text{种石头}.$$

【解题尝试】

A组

1. 设 a、b 为正实数,n 为正整数,试证:$\frac{a^n+b^n}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^n$.
2. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实数,$0<a_n<1(n\in\mathbf{N})$.求证:
   $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n>a_1+a_2+\cdots+a_n+1-n(n\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N})$.
3. 设复数 $z=x+y\mathrm{i}$,x、y 为有理数,且$|z|=1$,求证:对任意自然数 n,$|z^{2n}-1|$是有理数.
4. 将凸 $2n+1(n\geqslant2)$边形的顶点染色,使得任意两个相邻顶点染不同的颜色.证明:对上述的任意一种染法,此 $2n+1(n\geqslant2)$边形都可用不相交的对角线分为若干个三角形,使得三角形中每条对角线的端点不同色.
5. 对任何正数 x 及任何自然数 n,求证:$x^n+x^{n-2}+\cdots+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geqslant n+1$.
6. 已知数列$\{a_n\}(n=1,2,\cdots)$若对任意自然数 n,都有 $a_n>0$ 及 $a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$,试证:$a_n<\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N})$.
7. 设 $0<a<1$,定义 $a_1=1+a$,$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+a$.证明:对一切 n,有 $a_n>1$.
8. 设 $n(n\geqslant2)$是整数,证明:
   $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}<4$.
9. 设 $n\in\mathbf{N}_+$,求证:$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$.
10. 设 a、$b\in Z$,试证:$(a+b)\mid(a^{2n+1}+b^{2n+1})$.
11. 整数列$\{a_n\}$定义如下:$a_1=2$,$a_2=7$,$-\frac{1}{2}<a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{2}(n\geqslant2)$.证明:对所有 $n>1$,a_n 为奇数.

12. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=-1$，$a_2=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-2}(n\geqslant 3)$，则 $a_n=(-1)^n\ \frac{(n-1)!!}{n!!}(n\geqslant 3)$. 其中 $n!!=n(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1$，此时 n 为奇数；或 $n!!=n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2$，此时 n 为偶数.
13. 设 p、r 满足 $p>r>0$，且为常数，又数列$\{a_n\}$满足 $a_1=r$，$a_{n+1}=pa_n=r^{n+1}(n\in\mathbf{N})$，求 a_n.
14. (1991 年全国高中联赛题)设 a_n 为下述自然数 N 的个数：N 的各位数字之和为 n 且每位数字只能取 1,3 或 4. 求证：a_{2n}是完全平方数，这里 $n=1,2,\cdots$.

B 组

1. (《数学通报》问题 1466 题)设 $M=5^{2001}+7^{2002}+9^{2003}+11^{2004}$，求证：$M$ 能被 8 整除.
2. (2002 年罗马尼亚为 IMO 和巴尔干地区数学奥林匹克选拔考试供题(第一轮))求所有集合对 A、B，使得 A、B 满足：
   (1)$A\cup B=\mathbf{Z}$；
   (2)如果 $x\in A$，则 $x-1\in B$；
   (3)如果 $x\in B$，$y\in B$，则 $x+y\in A$.
3. (2003 年 IMO 中国国家队集训选拔赛题)设 $A\subset\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\,|\,a_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$，$A$ 是有限集. 对任意的 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in A$，定义：
   $\gamma(\alpha,\beta)=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$，
   $D(A)=\{\gamma(\alpha,\beta)\}\alpha\in A,\beta\in A\}$.
   试证：$|D(A)|\geqslant|A|$.
4. (第 30 届俄罗斯数学奥林匹克题)某国有若干个城市和 k 个不同的航空公司. 任意 2 个城市之间或者有 1 条属于某个航空公司的双向的直飞航线连接，或者没有航线相连. 已知任意 2 条同一公司的航线都有公共的端点. 证明：可以将所有城市分为 $k+2$ 个组，使得任意 2 个属于同一组的城市之间都没有航线连接.
5. (第 28 届俄罗斯数学奥林匹克题)某城市有若干个广场，有些广场之间有单向行车线路相连，并且自每个广场都刚好有两条往外驶出的线路. 证明：可以把该城市分成 1014 个小区，使得每条线路所连接的两个广场都分属两个不同的小区，并且对于任何两个小区，所有连接它们的线路都是同一个方向的(即都是由小区甲驶往小区乙的单向行车线，或者都是反过来的).
6. (2002 年越南数学奥林匹克题)已知正整数 m、n，$m<2001$，$n<2002$，有 2001×2002 个不同的实数. 将这些数放入 2001×2002 的矩形棋盘(棋盘有 2001 行，2002 列)，使得每个格内有一个数，每个数都放在一个格内. 当格内的数小于其所在列的至少 m 个数，也小于其所在行的至少 n 个数时，将这样的数所在格称为"坏格". 对每种放法，记 S 为"坏格"的数目. 求 S 的最小值.
7. (第 40 届 IMO 预选题)设 n 为大于等于 1 的整数，在 xOy 平面上由$(0,0)$到(n,n)的一条"路"是一条折线，这条折线从$(0,0)$开始每次或者向右(记为 E)或者向上(记为 N)运动一个单位，直到到达(n,n). 所有运动都在满足 $x\geqslant y$ 的半平面内进行. 在一条"路"中形如 EN 的两个相邻的运动称为一"步". 证明从$(0,0)$到(n,n)恰有 s 步$(n\geqslant s\geqslant 1)$的路有$\frac{1}{s}C_{n-1}^{s-1}C_n^{s-1}$ 条.
8. (第 30 届俄罗斯数学奥林匹克题)有一个 9×2004 的方格表，在它的方格里边把正整数 1 到 2004 各填 9 次，且在每一列中所填的数之差都不大于 3. 试求第一行数的和的最小可能值.

第 9 章　图论方法

【学习目标】

图论方法是一种重要的解题方法. 我们先从一个事件谈起.

十八世纪的东普鲁士,有一座叫哥尼斯堡的城市,城中有一条普雷格河,河中有两小岛 A、B,有七座桥联结两小岛与河两岸,如图 9-1. 市民们在散步中,总想走过每座桥恰好一次而回到出发点,但均未成功,他们去请教圣彼得堡大学教授瑞士青年数学家欧拉. 欧拉通过研究,于 1736 年发表论文证明了上述走法是不可能的,从而从反面解答了哥尼斯堡七桥问题,欧拉把七桥问题提炼成如下数学模型:把陆地、岛缩为"点",桥视为"边",于是得到图 9-1 中的虚线所示图,从任一点出发,经过每条边恰好一次,仍回到起点,可能否?

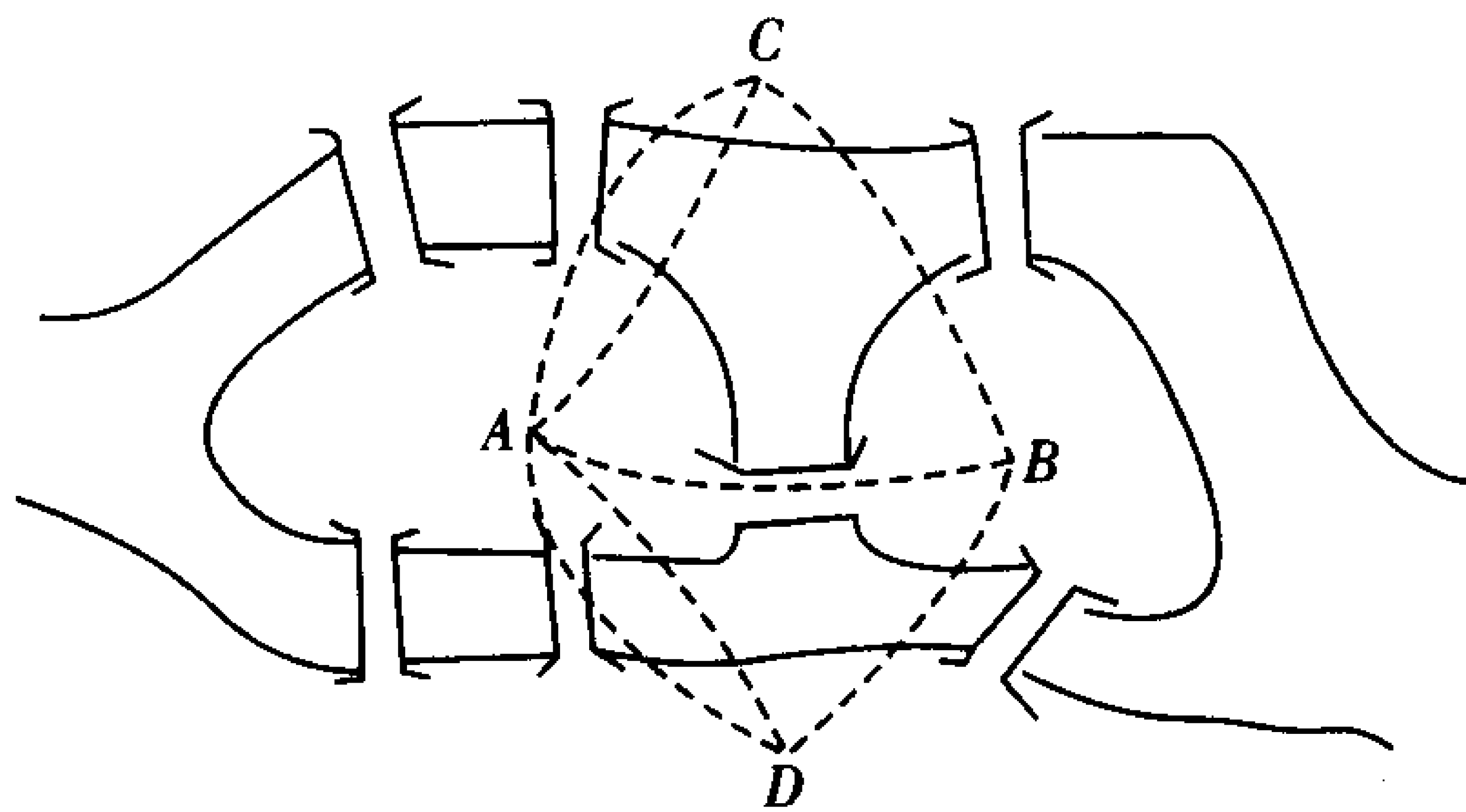


图 9-1

欧拉的研究,归结出了如下的数学方法:

图论方法　把现实世界中的某些事情用点和联结点的边(线段或曲线)所组成的图形来描述,并应用这样的图形特征来解答问题.

数学问题头绪纷呈,画一个图常常有助于问题的解决(数形结合是解题的一大法宝),数学中各种各样的问题有各种各样的图解,我们这里讨论的是一种特殊形式的图解,这种图解我们称之为图. 因此,本章所说的"图"是一种特定的数学对象,一个几何图形,一张画图,或者一张设计图纸等都不是我们要讨论的图,我们要讨论的图就是图 9-1 中虚线所示的图,并记图为 $G(V,E)$,其中 V 为点的集合,E 为边的集合.

下面我们来看七桥问题的解决:

在图 9-1 虚线所示的七桥问题图中,A、B、C、D 称为顶点,AB,AC,…,称为边,由顶点发出的边数称该顶点的度数. 从任一顶点出发,途经各顶点时,从一边进入顶点,又从该顶点的另一边出去,占用该顶点的度数为 2,由于所走过的边不重复,所以要求中途顶点的度数为偶数,即为偶顶点. 又因起终点合一,故也为偶顶点,然而 A、B、C、D 皆为度数是奇数的奇顶点,所以七桥问题的走法是不可能

的.

如果起终点不合一时，那么在上述问题中，要求起终点为奇顶点，而中途顶点仍为偶顶点，此时的走法也是不可能的.

从解决七桥问题中，我们看到了运用图论方法解题，首先要注意如何将一个问题化为图的问题，其次要注意用图的模型解题时的一些基本思考方法(即如何利用图的特征性质).

为了叙述方便及今后的需要我们还须引入一些概念，并介绍图的某些特征性质.

由于每条边恰好有两个端点(顶点)，从而有：

性质 1　一个图的所有顶点的度数和是个偶数，且等于边的数目的两倍.

推论 1　对于任意的图，奇顶点(度数为奇数的顶点)的个数一定是偶数.

由以上性质及推，即有

性质 2　如果一个图中每一条边的两个端点不同，而且没有两条边联结同一对顶点，则至少有两个顶点的度数相同.

我们称一个图的一部分为该图的子图；称两顶点间最多连一条边且边的端点相异的图为简单图. 本章涉及的图都是简单图.

我们又称只有一个顶点的图为平凡图，称任何顶点皆相邻的图(或每两个顶点之间都有一条边的简单图)为完全图，记作 K_p，p 是顶点数；如果 G 是一个有 n 个顶点的简单图，从完全图 K_n 把属于 G 的边全部去掉后，得到的图称为 G 的补图，记为 $\bar{G}$. 显然：

性质 3　一个图的补图的补图就是原来的那个图，即 $\bar{\bar{G}}=G$.

在图 G 中，一个由不同的边组成的序列 $e_1,e_2,\cdots,e_q$，如果其中 e_i 是联结顶点 v_i 与 v_{i+1} 的($i=1,2,\cdots,q$)，我们就称这个序列为从 v_1 到 v_{q+1} 的链，数 q 称为这个链的长(一个链即为一笔画成的线)；如果一个链的两个端点(或起终点)重合，我们称这个链为圈. 于是有：

性质 4　如果图是一个链(圈)，那么图 G 的奇顶点的个数不大于 2(等于 0)，这就是图 G 为一个链(圈)的必要条件.

由性质 4，再一次证明了前面七桥问题的走法是不可能的.

如果对图 G 的任意两个顶点，都有一个从这顶点到那顶点的链，则称图 G 为连通图，否则 G 称为不连通的. 仅由一个顶点组成的图也看做连通图. 每个不连通的图 G 可以分成 n 个连通的子图 $G_1,G_2,\cdots,G_k$，其中 $G_1,G_2,\cdots,G_k$ 相互之间没有公共的顶点，它们称为 G 的连通分支. 因此，连通图可以看成是只有一个连通分支的图.

性质 5　有限图 G(顶点、边均有限)是一条链的充分必要条件是 G 是连通的，且奇顶点的个数等于 0 或 2，并且当且仅当奇顶点的个数为 0 时，连图是一个圈(孤立顶点可看做圈).

证明　只证明充分性. 我们对图 G 的边数 m 采用第二数学归纳法.

设在边数小于 m 时，结论成立. 如果 G 有两个奇顶点 v 与 v'，从 v 出发，沿着 G 的边前进，每条边至多经过一次，那么到达任意一个不同于 v' 的顶点 v'' 时，有两种情况发生：

(i) $v''\neq v'$，那么由于 v'' 是偶顶点，而每次到达 v'' 时用掉奇数条与 v'' 相邻的边，所以还可以从 v'' 继续前进.

(ii) $v''=v'$，那么由于 v 是奇顶点，而每次到达 v 时用掉偶数条与 v 相邻的边，所以也可以从 v'' 继续前进.

但图 G 的边数是有限的，不能无限地走下去，最后一定会到达顶点 v'，这就得到一条从 v 到 v' 的

链 μ.

将链 μ 去掉后，得图 G'，G' 是 G 的子图，它的顶点全部是偶顶点，设 G' 的连通分支为 $G_1,G_2,\cdots,G_k$，根据归纳假设，$G_1,G_2,\cdots,G_k$ 都是圈.

回到原来的图 G，因为 G 是连通图，所以每个 G_i 与 μ 至少有一个公共点，设 v_i 为 G_i 与 μ 的公共点 $(i=1,2,\cdots,k)$，于是由图 9－2 可以看出 G 是一条从 v 到 v 的链，即由 v 出发，沿 μ 前进，每走到一个 v_i 时，就沿 G_i 走一圈再回到 v_i，然后继续前进，一直走到 v'.

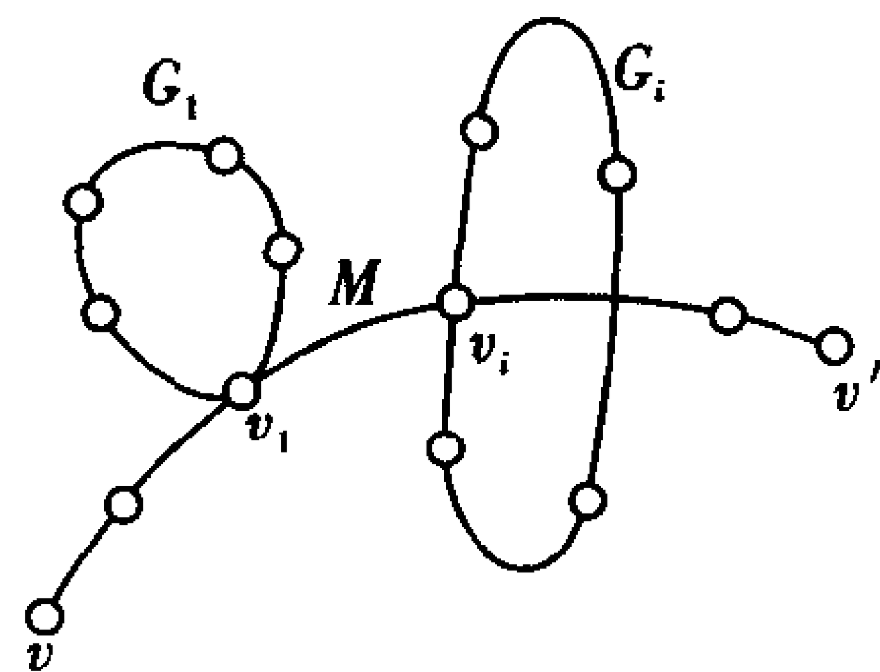


图 9－2

如果 G 没有奇顶点，去掉一条联结 v 与 v' 的边 e，得到图 G'，则刚才所证，G' 是一个从 v 到 v 的链，再添上 e，就成为一个圈.

推论 1　如果图 G 有两个奇顶点，k 个连通分支，那么图 G 可以分解为 $k-1$ 个圈和一个链.

推论 2　如果连通图 G 有 $2k$ 个奇顶点，那么图 G 可以用 k 笔画成，并且至少要用 k 笔才能画成.

我们又称连通无圈的图为树，树上度数为 1 的顶叫做叶，只有一个顶点的树叫平凡树，称只有一个顶且不是叶的非平凡树为星，则有：

性质 6　非平凡树至少有两个叶.

证明　设 $P(v_0,v_l)$ 是非平凡树 T 上的最长链，则 v_0,v_l 是叶. 事实上，由于 T 是连通图，所 v_0 的度数 $d(v_0)\neq0$，v_l 的度数 $d(v_l)\neq0$，若 $d(v_0)\neq1$，则 $d(v_0)\geqslant2$，从而至少有存在一条边 v_0w，w 不在 $P(v_0,v_l)$ 上，不然 T 上有圈，与 T 为树矛盾. 这样，$P(v_0,v_l)$ 可延长为 w，与 $P(v_0,v_l)$ 是最长链矛盾. 可见 $d(v_0)=1$，v_0 是叶，同理可证 v_l 是叶. 证毕.

性质 7　若 T 是树，则 T 的边数等于 T 的顶点数减去.

证明　对 T 的顶点数用第二数学归纳法. 在 T 的顶点数 $\leqslant2$ 时，结论显然成立. 现假设 T 的顶点数 $\leqslant k$ 时结论成立. 下证 T 的顶点数 $=k+1$ 时结论成立. 由性质 6，T 上存在一个叶 v_0，把 v_0（从而连同与 v_0 关联的边）从 T 上删除，可得一个树 T'，由归纳法假设，T' 的边数 $=T'$ 的顶数 -1，而 T' 的边数 $=T$ 的边数 -1，T' 的顶数 $=T$ 的顶数 -1，故结论成立.

如果一个图的顶点集合 V 是由两个没有公共元素的子集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 与 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$ 组成的，并且在 x_i 与 $x_j(1\leqslant i,j\leqslant n)$，$y_s$ 与 $y_t(1\leqslant s,t\leqslant m)$ 之间没有边相联，则称这样的图为偶图. 这个图有一个特点：它的所有顶点分成两部分，使得每一条边联结这两个部分的各一个顶点. 因此偶图又称为二部分图. 这样的图有很好的性质，因而这种图在很多问题中是很有用的. 通常将偶图记为 $G=(X,Y,E)$.

如果在偶图 $G=(X,Y,E)$ 中，X 的元素个数为 n，Y 的元素个数为 m，并且每一个 $x_i\in X$ 与每一个 $y_s\in Y$ 有一条边相联，那么这样的偶图称为完全偶图，记为 $K_{n,m}$.

将图 G 的顶点涂上颜色，如果至少要用 k 种颜色才能使任意两个相邻的顶点颜色不同，我们就说图 G 的色数为 k. 显然

性质 8　偶图的色数 $\leqslant2$（集合 X 与 Y 各用一种颜色），反过来，色数 $\leqslant2$ 的图是偶图.

对于简单图，其中任意两条没有公共端点的边集合称为一个匹配（或对集），假如已经将一个图中的边分解为匹配. 我们把同一匹配中的边用一种颜色来染，不同的匹配用不同的颜色来染，这样的一种给边染色的方法称为一个边染色. 换一句话，一个图的一个边染色是把其中的边用若干种颜色来染，每一条边用一种颜色，而有公共端点的边用不同的颜色来染，一个边染色所需要的最少的颜色

的数目称为这个图的边色数.

性质 9　一个图的边色数大于或等于它的顶点的最大度数.

性质 10　若偶图 G 中每个顶点的度数都是 $k(k>0)$，则它有一个匹配 M 使 G 中每一个点都是 M 中的一条边的端点.

性质 11　若一个偶图中每个顶点的度数均为 k，则它的边色数也等于 k.

性质 12　若一个偶图 G 中最大的度数为 D，则 G 的边色数也是 D.

一个图 G 的图示可以画在平面上，且使得任何两条边都不(在非顶点)相交，则称 G 为平面图，这种图示叫做 G 的平面嵌入，平面嵌入把平面划分成的每个区域叫做平面图的一个面.

性质 13　如果连通的平面图 G 有 n 个顶点，m 条边，f 个面，那么 $n-m+f=2$.

此条性质中的公式称为欧拉公式.

证明　如果 G 是树，那么 $f=1,m=n-1$，所以 $n-m+f=2$. 欧拉公式成立.

如果 G 不是树时，我们取 G 的生成树 T(即对 G 中的圈中去掉一条边，得到的图 G' 还是连通的，若 G' 仍然有圈，再在圈中去掉一条边得连通图 G''，…，最后得到一个树). 在取生成树 T 的过程中，每一次去掉一条边，减少一个圈即减少一个面，因此 $n-mf$ 始终保持不变. 既然对于树 T，欧拉公式成立，所以对于 G，$n-m+f=2$ 也成立.

我们称从图的某一点出发，经过所有边恰好一次，而回到出发点的图为欧拉图；所走的线路称为欧拉回路；如果起终点不重合，则称欧拉路.(参见有向图概念)

性质 14　一个连通图 G 为欧拉图的充要条件是，G 的每个顶的度数都是偶数.

证明　条件的必要性显然成立，下面证明条件的充分性，对 G 的顶数用第二数学归纳法，每个顶的度数为偶数的连通图其边数最少者为 K_3，这时命题成立. 现在假设对 $3\leqslant G$ 的顶数 $\leqslant k$ 的图，命题已成立，考虑 G 的顶数 $=k+1$. 因为没有度数为 1 的顶，所以由性质 6，G 不是树，假设 C 是 G 上的一个圈，把 C 的边从 G 上删除，所得的图 G' 仍是每个顶的度数都是偶数的. 设这个 G' 是由无公共顶的连通图 $G_1,G_2,\cdots,G_w$ 组成的，不妨假设前 k 个是非平凡图，后面 $w-k$ 个是平凡图，由归纳假设，G_1，$G_2,\cdots,G_k$ 中分别有欧拉回路 $W_1,W_2,\cdots,W_k$，于是 $W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_k\cup C$ 中必有 G 的欧拉回路，而有欧拉回路的图叫做欧拉图. 证毕.

前面说的图都是无向图：连结顶点 v 与 v' 的边是没有方向的，或者说这条边既可看成从 v 到 v 的边，又可以看成是从 v' 到 v 的边，若把边规定一个方向，即规定起点、终点，这种有方向的边称为弧；如果一个图的每一条边都规定了方向，则称这个图为有向图. 在有向图中，一个由不同的弧组成的序列称为路；若对应的无向图是简单图，起终点重合的路称为一个回路；并称起点的弧的数目为出度，终点的弧的数目为入度. 于是，有：

性质 15　有向图是一个路或一个回路的充要条件是下面的(i)、(ii)同时成立：

(i)对应的无向图是连通的；

(ii)满足|出度−入度|等于 1 的顶点个数为 2 或 0，并且其余的顶点均满足出度等于入度.

此条性质的证明与性质 5 的证明相近，略.

性质 16　一个连通的有向图是欧拉有向图的充要条件是它的每个点的出度等于入度.(证略)

如果一个完全图的每一条边都规定了一个方向，则称这个图为竞赛图.

我们还介绍一下哈密尔顿(Hamiltion)链的概念. 1859 年爱尔兰数学家哈密尔顿提出了一个“环游世界”游戏：一个正十二面体，其 20 个顶点表示 20 个城市，从任一城市出发，沿棱行进，要求恰好经过一个城市一次，而后回到原城市，问是否可能？

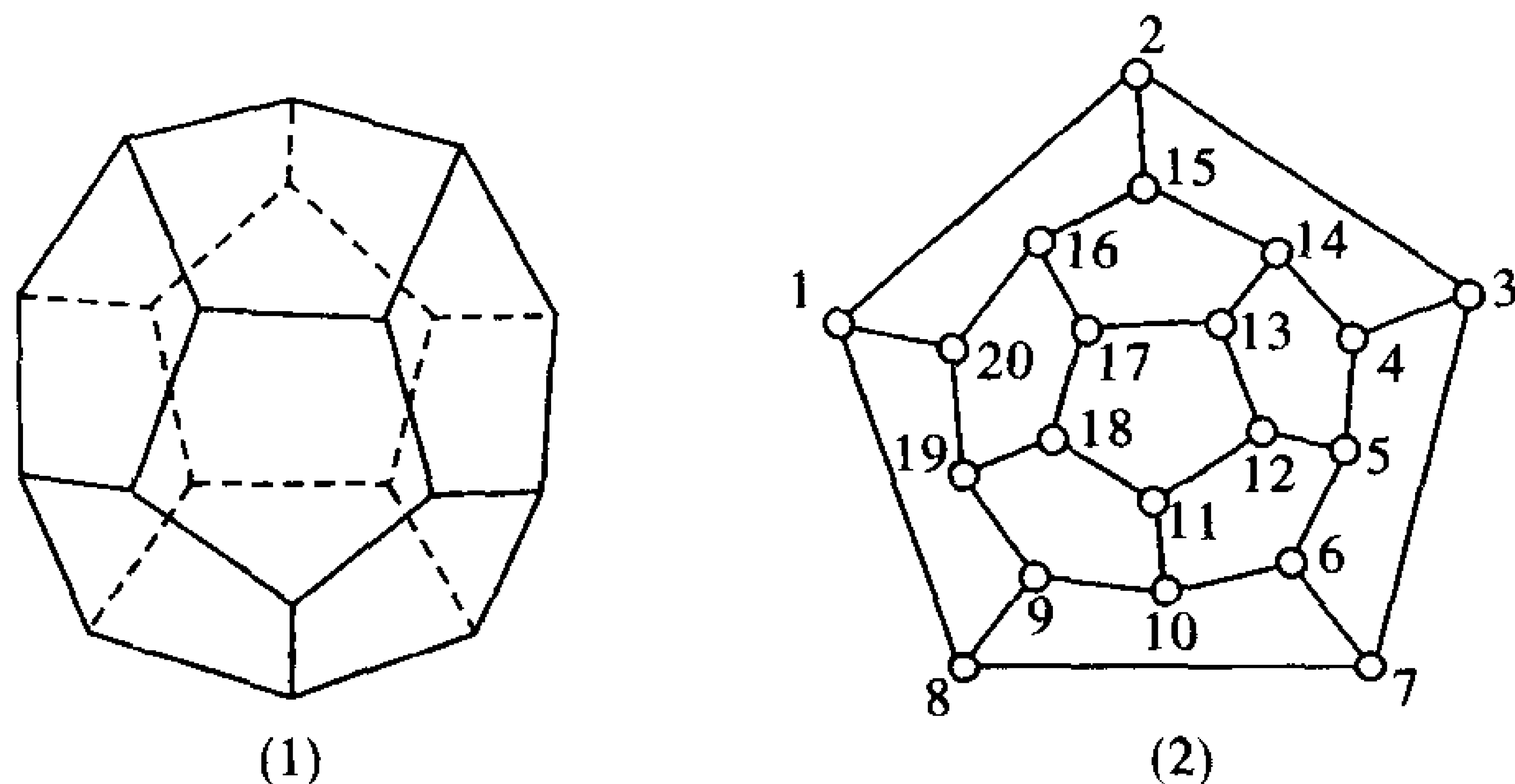


图 9－3

哈密尔顿问题的解：将正十二面体适当投影到平面上，如图 9－3(2)，得图 G. 如果沿图 G 的 1，2，…，20 路线走，即为问题所求. 这样的路线称哈密尔顿圈(回路). 如果起终点不重合，则称为哈密尔顿链(路). 实际上，在一个图中，如果有一个圈(链)经过每个顶点恰好一次，那么这个圈(链)称为哈密尔顿圈(链).

表面上，哈密尔顿圈(链)与一笔画(一般的图(链))非常相似，但实质上，两者的理论迥然不同，利用性质 5 可以判别一个图是否可以一笔画成，可是对于哈密尔顿圈(链)，迄今还没有一个简单而一般的判别法. 但是，我们有：

性质 17　如果在一个偶图 $G=(X,Y;E)$ 中 X 的元素数与 Y 的元素数的差大于 1，那么这个偶图没有哈密尔顿链.

证明　将图中顶点涂上红、蓝两色，使相邻的两顶点色不同. 如果这个图有一个哈密尔顿链，那么这链上的顶点一定是红蓝相间，因而红点的数目与蓝点的数目相等或相差 1. 但由题设，X 的元素个数与 y 的元素个数的差大于 1. 故结论成立.

性质 18　完全偶图 $K_{m,n}$ 在 $m\neq n$ 时无哈密尔顿圈，而完全偶图 $K_{n,n}$ 有 $[\frac{n}{2}]$ 个无公共边的哈密尔顿圈. 其中 $[\frac{n}{2}]$ 表示不超过 $\frac{n}{2}$ 的最大整数.

证明　如果 $K_{m,n}$ 有哈密尔顿圈，那么在圈上 X 与 Y 的点相间，因而 $m=n$.

对于 $K_{n,n}$，将顶点 x_i 与 y_{i+2j} 及 y_{i+1+2} 相联 $(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,[\frac{n}{2}]$，并且认为 $y_{i+n}=y_i)$，就得到了 $[\frac{n}{2}]$ 个无公共边的哈密尔顿圈.

性质 19　如果图 G 有哈密尔顿圈，从 G 中去掉若干个点 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 及与它们相邻的边得到图 G'，那么 G' 的连通分支不超过 k 个.

证明　令 C 为 G 的哈密尔顿圈，那么将 k 个点 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 去掉后，C 至多分为 k 段，因而 G 的连通分支至多为 k 个.

性质 20　如果一个平面有哈密尔顿圈 C，用 f'_i 表示 C 的内部的 i 边形的个数，又用 f''_i 表示 C 的外部的 i 边形的个数，则

(1) $1\cdot f'_3+2\cdot f'_4+3\cdot f'_5+\cdots=n-2$，

(2) $1\cdot f''_3+2\cdot f''_4+3\cdot f''_5+\cdots=n-2$，

(3) $1\cdot(f'_3-f''_3)+2(f'_4-f''_4)+3\cdot(f'_5-f''_5)+\cdots=0$.

其中 n 为 G 的顶点数，显然也是 C 的长.

证明 设 ε' 为 C 的内部的边的条数，则 C 的内部的面的总数为 $f'_1+f'_2+f'_3+\cdots=\varepsilon'+1$，这些面的边数的和为 $2f'_2+3f'_3+4'f_4+\cdots=2\varepsilon'+n$. 这是因为每一条内部的边被数了两次，而 C 上有 n 条边，每条边被数了一次，将第二式减去第一式便得(1)；同理可得(2)；(1)－(2)便得(3).

性质 21 一个图有哈密尔顿回路的一个充分条件是：设图 G 具有 n 个顶点，任二顶点间至多被一条边联结，如果图 G 每一对顶点度数之和大于等于 $n-1$，则图 G 有一个哈密尔顿回路.(证略)

上面，我们简介了一些图的概念与特征性质，要深入地学习请阅读有关专著.

下面，我们列举一些图解实例.

【解题钥匙】

1. 注意图的基本概念的运用

例 1 (1956 年北京市竞赛题)证明：空间中不可能有这样的多面本存在，它们有奇数个面，而它们的每个面又都有奇数条边.

证明 以这种多面体的面作为图的顶点，当多面体两个面有公共棱时，在图的相应两顶点之间联一边得一图 G. 依题意，G 的各顶点的度数是奇数，所有顶点的度数和为奇数，这与性质 1 矛盾. 所以不会有这种多面体.

例 2 (1947 年匈牙利竞赛题，1953 年普特南竞赛题)证明：世界上任何六个人，总有三人彼此认识或者彼此不认识.

证法 1 作一个完全图 K_6，六个顶点表示六个人，如果某两个人互相认识，联结相应两点的边就涂上红色，否则就涂上蓝色，要证明的结论就是这个涂了色的 K_6 中一定有一个各边同色的三角形.

从顶点 v_1 引出的边有五条，而颜色却只有红蓝两种，因此其中必有一种颜色涂了三条或更多的边.

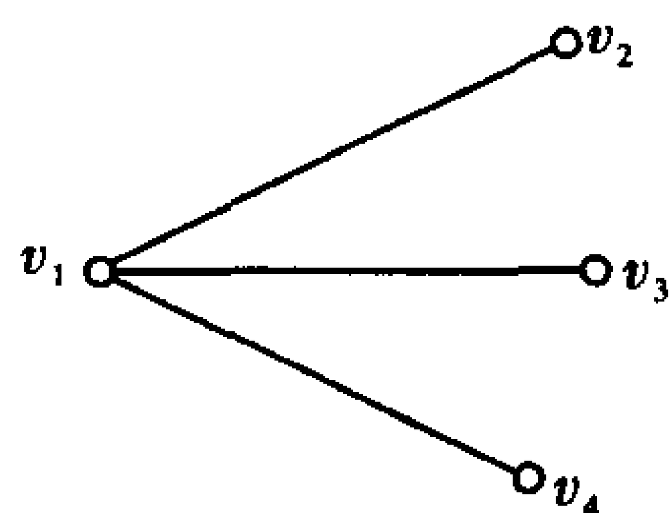


图 9－4

不失一般性，假定有三边 (v_1,v_2)，(v_1,v_3)，(v_1,v_4) 为红色，如图 9－4(有三条边为蓝色的证法与此相同)

(i)如果 $\triangle v_1v_3v_4$ 有一条边，比如说 (v_2,v_3) 是红色的，那么 $\triangle v_1v_2v_3$ 就是一个三边均为红色的同色三角形.

证法 2 用六个顶点表示六个人，如果两个人互相认识，就在相应的两个点之间联一条边，这样得到一个简单图 G，要证明的结论就是 G 或者它的补图 $\overline{G}$ 中有一个三角形.

顶点 V_1 与其余的五个顶点不在 G 中相邻就在 $\overline{G}$ 中相邻，因而在 G 或 $\overline{G}$ 中，V_1 至少与三个顶点相邻，不妨假定在 G 中，v_1 与三个顶点 v_2、v_3、v_4 相邻. 如果 v_2,v_3,v_4 这三中有两个点在 G 中相邻，那么涂上 v_1，就得到一个 G 中的三角形. 如果 v_2,v_3,v_4 这三个点在 G 中均不相邻，那么它们在 $\overline{G}$ 中相邻，即 $\overline{G}$ 中有一个三角形，即 $\triangle v_2v_3v_4$.

上述两个证法并无太大的差别，只是说法不同，但是这两个说法都可以引出这个问题的两种推广.(参见解题尝试 A 组第 8、9 题)

上例实际上就是拉姆赛定理：图 G 具有 6 个顶点，每对顶点间恰有一红边或蓝边相联，那么图 G 必含有一个红边三角形或蓝边三角形，并记为 $N(3,3)=6$.

例 3 设有 $2n$ 个钱币汇换台，如果每架钱币汇换台与至少 n 个台有直通线路，那么其中的任何

两个台之间一次汇换(可通过别的汇换台)总是可能的.

证明 可证明一般的命题:一个有 $2n$ 个顶点的简单图,每个顶点的度数不小于 n,则必为连通图. 用反证法:如果不连通,则必有一点 P,P 点的度数 $\leqslant n-1$. 事实上,不连通图可分出若干子图,而每个子图是连通的,子图中的点度数 $\leqslant n-1$. 证毕.

例 4 将数:1,2,3,4,5 用任何方法分成两组. 证明:总可以在某一组中找到这样两个数,它们之差与这一组中的某一个数相同.

证明 设 S_1 与 S_2 是任意分成的两组数集,以 1,2,3,4,5 为五个顶构作图 K_5 如图 9-5,且仅当二顶 u,v 满足其顶的度数之差属于 $S_j(j=1,2)$时,把边 uv 染成 j 色.

(i)若五边形 123451 与 135241 分别是 1 色与 2 色的同色五边形,则 1 与 4 同在一个数集,2 与 3 同属另一数集. 这时,不论 5 在哪一数集,都使命题成立.

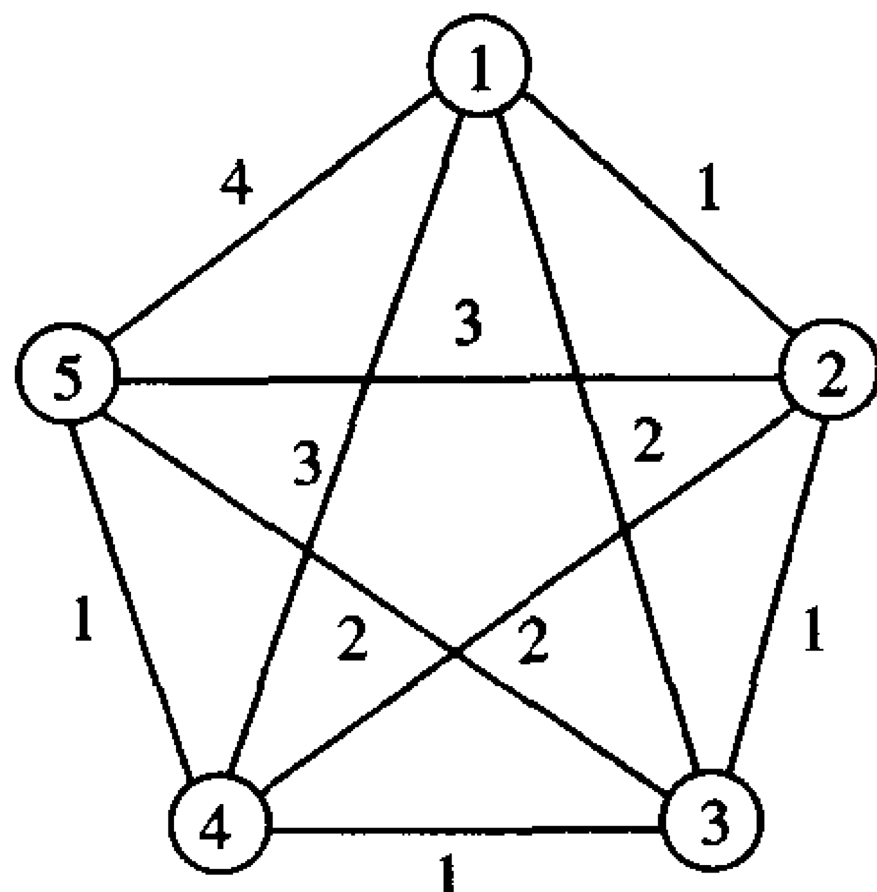


图 9-5

(ii)否则,若边 15 与链 12345 异色,而边 13 与 35 同色,则不论这两条边是什么颜色,都会出现同色三角形;若边 15 与链 12345 同色,则还有一边与五边形 123451 同色. 于是又出现同色三角形. 设$\triangle uvw$ 是同色三角形,不妨假定 $u>v>w$,令 $x=u-v$,$y=v-w$,$z=u-w$,则 x,y,z 不仅属于同一数集,而且 $x+y=z$,即此数集含两个数 x,z 及其差数 y. 证毕.

例 5 (1991 年第 24 届全苏奥林匹克题)n 个点由线段连接着,已知每一点与另外任何一点都有道路相连通,而任何两点都没有两种不同的道路,证明线段总条数为 $n-1$.

证明 我们视 n 个点为一个图 G 的顶,线段是边,依题意,G 是连通无圈图,是树. 由性质 7,边数为 $n-1$,即线段总条数为 $n-1$.

例 6 (1958 年波兰奥林匹克题)平面上有 n 条线段,$n\geqslant 3$,其中任意三条都有公共点,则这 n 条线段有一个公共点.

证明 把 n 条线段的端点看成一个图 G 的顶,线段是 G 的边. 由题意,G 为无圈连通图,是树,且而最长链长度为 2,所以显然 G 是星,故这 n 条线段有一个公共点(G 中度数大于 1 的顶).

例 7 设 n 个工人 n 件工作,每人恰可做 2 件工作,每件工作恰被 2 工人所做,问能否使这 n 件工作被熟悉该工作的 n 个人所承担?

解 设工作集合为 X,工人集合为 Y,将它们视为顶点,某人会做某工作,则用边联接,这样得到一个偶图. 由于顶点的度数皆为 2,故存在 X 对 Y 的匹配,于是所提问题有解.

例 8 (1964 年匈牙利奥林匹克题)在毕业舞会上,每一个小伙子至少和一个姑娘跳舞,但任何一个小伙子都没有和所有的姑娘跳舞,而每一个姑娘至少和一个小伙子跳舞,但任何一个姑娘都没有和所有的小伙子跳舞. 证明:在所有参加舞会的人中,可以找到这样两个小伙子和两个姑娘,这两个小伙子中的每一个只和这两个姑娘中的一个跳过舞,而这两个姑娘中的每一个只和这两个小伙子中的一个跳过舞.

证明 作一个偶图 $G=(X,Y,E)$,X 的每一个顶点表示一个小伙子,Y 的每一个顶点表示一个姑娘. 如果一个小伙子与一个姑娘跳过舞,就在相应的两个点之间连一条边.

设在集合 X 中,点 x 的度数最大(即与 x 跳过舞的姑娘最多),因为 x 的度数<所有姑娘总数,所以在 Y 中存在一个点 y' 与 x 不相邻,但由题设至少有 x' 与 y' 相邻,因为除 y' 外与 x' 相邻的点为 x'

的度数-1，而且

x'的度数$-1\leqslant x$的度数$-1< x$的度数，所以在与x相邻的点中一定有一个点y与x'不相邻. 这样得出的四个点x,x',y,y'就代表了四个符合要求的人.

例 9 （1968 年波兰奥林匹克题）对哪些n，存在n条棱的多面体？

解 以多面体的顶点为顶，以多面体的棱为边，组成一个平面图G，则G的顶点数$n\geqslant 4$，面数$f\geqslant 4$，由欧拉公式，G的边数$\geqslant 6$，即无棱数小于 6 的多面体.

四面体是棱数为 6 的多面体.

又因G的边数的 2 倍$\geqslant$面数的 3 倍，若有 7 条棱的多面体，则$f\leqslant\frac{14}{3}$，即$f=4$，于是$7=n+f-2=n+2$，$n=5$，但$f=4$时惟一的多面体是四面体，它只有 4 个顶，与$n=5$矛盾，可见没有 7 条棱的多面体.

考虑$k\geqslant 4$，以k边形为底的棱锥即$2k$条的多面体；把底为$k-1$边形的棱锥上底角处的一个三面角"锯掉一个尖"，得到一个$2k+1$条棱的多面体. 总之，$n\geqslant 6$且$n\neq 7$时，有n条棱的多面体.

例 10 （1964 年波兰奥林匹克题）在圆上任取$n>2$个点，把每个点用线段与其余各点相连结，能否一笔画出所有这些线段？使第一条线段的终点与第二条线段的起点相重，第二条线段的终点与第三条线段的起点相重，等等，最后一条线段的终点与最初一条线段的起点相重合？

解 以这n个点为顶，以这些线段为边构成一个连通图G，当n为奇数时，G的每个顶都是偶数度数，由性质 14，此题的回答是肯定的；当n为偶数时，回答是否定的.

2. 注意图的基本性质的灵活运用

例 11 有一百种昆虫，每两种中必有一种能消灭另一种（不一定具传递性，即甲能消灭乙，乙能消灭丙，并不意味着甲一定能消灭丙），证明可以将这一百种昆虫依某种顺序排列起来，使得每一种能消灭紧接它后面的那一种昆虫.

解 可将 100 改为更一般的自然数$n\geqslant 2$，用第二数学归纳法证.

作一个有向图，每一个顶点v_i表示一种昆虫，如果昆虫v_i可以消灭昆虫v_j，我们就作一条从v_i到v_j的弧. 由已知条件，G对应的无向图是一个完全图，因此我们可以把G称为有向完全图，要证明的结论就是有向完全图中有一个哈密尔顿路即经过所有顶点恰好一次的路.

假设命题对$n-1\geqslant 2$已经成立，并且路为$(v_1,v_2,\cdots,v_{n-1})$，这时有以下三种情况：

(i)如果有弧(v_{n-1},v_n)，那么$(v_1,v_2,\cdots,v_{n-1},v_n)$就是一个哈密尔顿路；

(ii)如果有弧(v_n,v_1)，那么$(v_n,v_1,v_2,\cdots,v_{n-1})$就是一个哈密尔顿路；

(iii)如果(i)、(ii)都不成立，则意味着存在(v_1,v_n)和(v_n,v_{n-1})，那么一定有一个$i(1\leqslant i\leqslant n-2)$，使弧$(v_i,v_n)$与$(v_n,v_{i+1})$同时存在（我们选取$i$为$1,2,\cdots,n-1$中第一个使弧$(v_n,v_{i+1})$存在的数），这时$(v_1,v_2,\cdots,v_i,v_n,v_{i+1},v_{i+2},\cdots,v_{n-1})$就是所求的哈密尔顿路. 如图 9-6 所示.

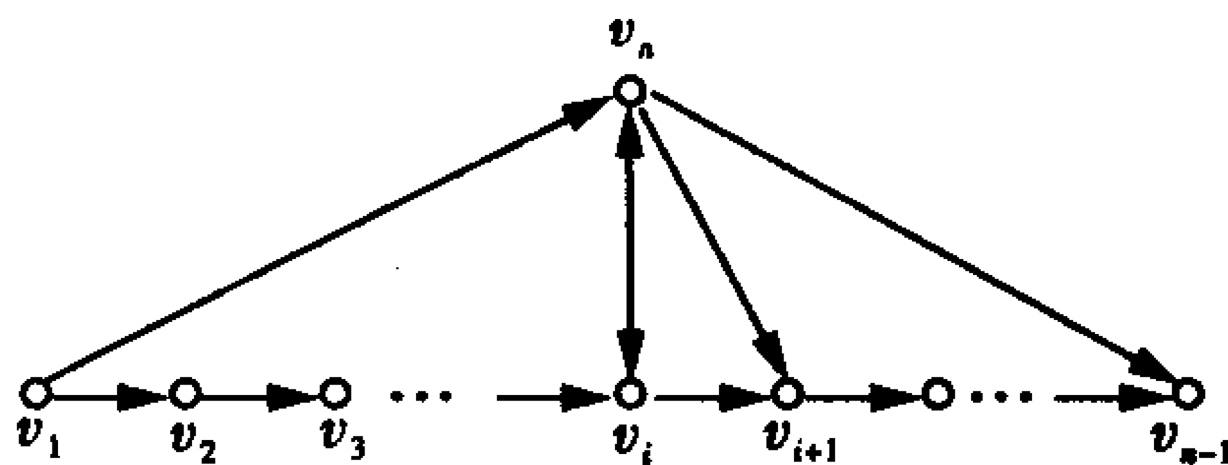


图 9-6

例 12 安排 7 天考 7 门课的考试，使得每位教师任两门课不排在接连的两天中，证明如果没有教师担任多于 4 门课，则符合上述要求的考试安排总是可能的.

证明 视顶点为考试课程，若两顶点所对应考试课程由不同的教师担任，则这两顶点间联结一边，得图G. 因为每

位教师所任课程不超过 4，所以一顶点至少与 3 个顶点有边相联（即至少还有 3 门课未担任）. 这样，两顶点度数之和至少是 6，大于等于 $7-1=6$，故图有一个哈密尔顿路，这个路的各条边是联结不同课程且不为同一个人所监考，这个哈密尔顿路对应了 7 门考试的符合要求的安排.

例 13　(1987 年中国数学奥林匹克题)某次比赛有 $n(n\geqslant 6)$ 各选手，每两名选手都进行一场比赛，每场比赛一定决出胜负，通过比赛确定优秀选手. 选手 a 被确定为优秀选手的条件是对任何其他选手 b，或者 a 胜 b，或者存在选手 c，使得 c 胜 b，a 胜 c. 如果按上述规则确定的优秀选手只有一名，试证这名选手战胜了所有其他选手.

证明　用顶点表示选手，如果选手 v_i 战胜了 v_j，则作弧(v_i,v_j)，根据题设条件，这样可以作出一个竞赛图 G，显然选手 v 胜的次数，就是相应这点的出度 $d^+(v)$. 已知点 a 满足条件：对于 v 中任何点 $b\neq a$，或者有弧(a,b)存在，或者可以找到一点 c，使得路(a,c,b)存在，记此条件为(*). 欲证，如果 a 点是惟一的，那么 $d^+(v)=n-1$.

证明分两步，先证点 a 是存在的，再证如果 a 点是惟一的，则 $d^+(a)=n-1$.

取一点 $a\in V$，使 $d^+(a)$在 G 中最大，对于 V 中其他任意一点 $b\neq a$，都有两种情况：

(i)如果存在弧(a,b)，那么 a 为所求；

(ii)如果存在弧(b,a)，作 V 的子集 C，使得 $C=\{c|(a,c)\}$，那么在 C 中至少有一点 c，使得弧(c,b)存在，否则 $d^+(b)>d^+(a)$，即也存在一条一个路(a,c,b)，那么 a 为所求.

从而，图 G 中一定具有满足条件(*)的点 a.

如果 a 点是惟一的，我们利用反证法来证明 $d^+(a)=n-1$.

假设 $d^+(a)<n-1$，即在 V 中至少有一点 $b\neq a$，使得弧(b,a)存在. 作 V 的子集 S 和 T，使得 $S=\{x|(x,a)\}$，$T=\{y|(a,y)\}$，以及相应的子图 G'和 G''. 显然

$S\cap T=\varnothing$，$S\cup T\cup\{a\}=V$.

因为 $b\in S$，所以 $S\neq\varnothing$，那么在 G'中也一定有满足条件(*)的点 x，并且 $d^+(x)$在 G'中最大. 再在 V 中任取一点 $c\neq x$，那么有以下三种情况：

(i)若 $c\in S$，则或存在弧(x,c)，或者还可以找到一点 d，使得存在一个路(x,d,c)；

(ii)若 $c=a$，则有弧(x,a)存在；

(iii)若 $c\in T$，则有路(x,a,c)存在.

这表明，x 也是 G 中满足条件(*)的点，这样 G 中至少有两点满足条件(*)，与已知条件相矛盾.

所以，$d^+(a)=n-1$，即选手 a 击败了所有其他选手.

例 14　(1994 年全国高中数学联赛题)给定平面上的点集 $P=\{P_1,P_2,\cdots,P_{1994}\}$，$P$ 中任三点均不共线，将 P 中所有的点任意分成 83 组，使得每组至少有 3 个点，且每点恰好属于一组，然后将在同一组的任两点用一条线段相连，不在同一组的两点不连线段，这样得到一个图案 G. 不同的分组方式得到不同的图案. 将图案 G 中所含的以 P 中的点为顶点的三角形的个数记为 $m(G)$.

(1)求 $m(G)$的最小值 m_0；

(2)设 G^* 是使 $m(G^*)=m_0$ 的一个图案，差将 G 中的线段(指以 P 的点为端点的线段)用 4 种颜色染色，每条线段恰好染一种颜色. 证明存在一个染色方案，使 G^* 染色后不含以 P 的点为顶点的三边颜色相同的三角形.

分析　将问题"缩小"，考察简单的类似问题，例如 P 中只有 9 个点，$|P|=9$，分成 2 组，A_1、A_2，若 $|A_1|=3$，$|A_2|=6$，则

$m(G)=C_3^3+C_6^3=21$,

若$|A_1|=4$,$|A_2|=5$,则

$m(G)=C_4^3+C_5^3=14$.

猜想分组越"均匀"$m(G)$的值越小,从而任意两点组中点的数目差不超过1(否则可以调整).若能证明这一条,m_0 易计算.当第一个问题已经解决,点组中点的个数至多可有2种情形,只需对点组的情形进行讨论即可.

解 (1)只要有某两个点组中点的个数之差 $x_i-x_j\geqslant 2$,则可将第 i 组中的点数减少1,第 j 组中点的个数增加1,其余不变,此时对原图案 G_1 与调整后的图案 G_2,有

$$\begin{aligned}m(G_1)-m(G_2)&=(C_{x_i}^3+C_{x_j}^3)-(C_{x_i-1}^3+C_{x_j}^3+1)\\&=(C_{x_i}^3-C_{x_j-1}^3)-(C_{x_i+1}^3-C_{x_j}^3)=C_{x_i-1}^2-C_{x_j}^2>0.\end{aligned}$$

(因 $x_{i-1}>x_j$)

可见当$m(G)$取到最小值 m_0 时,各点组间点的个数之差至多为1.

由 $1994=83\times24+2$,

则当 $m(G)=m_0$ 为最小时83个点组中有81个点组各含24个点,而另2个点组各含25个点.

$m_0=81\cdot C_{24}^3+2\cdot C_{25}^3=168544$.

(2)因不同点组中的点间不连线段,则在不同点组间不存在三角形,只须证明存在对 C^* 的点组的染色方案,使得在点组中不含"同色三角形"即可.

(1)对含25个点的点组,将其划分为5个各含5点的"小组",对每个小组中的10条边(线段),作如图9-7的"2—染色":实线边染"颜色1",虚线边染"颜色2".

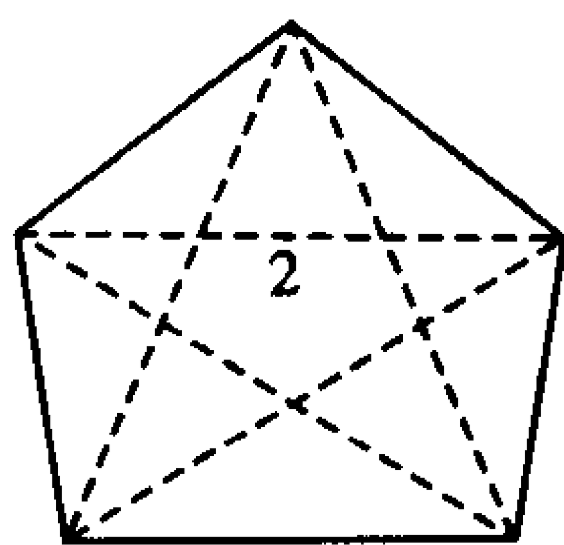


图9-7

图9-8中的A_1、A_2、…、A_5 表示点组中的5个小组,用"颜色3"对 A_1 组与 A_2 组,A_2 组与 A_3 组,…,A_5 组与 A_1 组间的每条边染色,而用"颜色4"对 A_1 与 A_3,A_3 与 A_5,…,A_4 与 A_1 间的每条边染色.

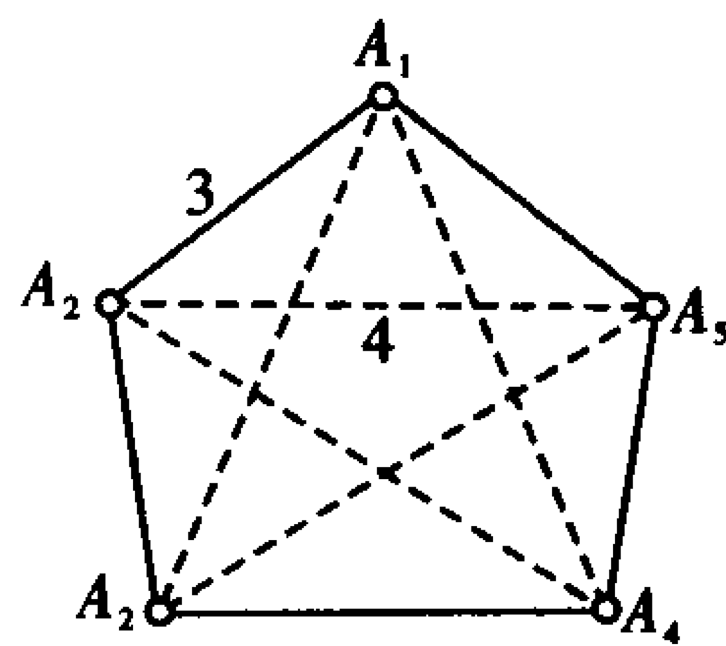


图9-8

显然,在这个25点组中,小组中不存在同色三角形(图9-7),而当三个点不在同一小组中时,也不存在同色三角形.

至于对24点组,显然只需在上述的25个点中取掉任何一个点以及与它所连的24条边,保持原染色方案即可.

例15 (1996年全国高中数学联赛题)有 $n(n\geqslant 6)$个人聚会,已知:(1)每人至少同其中$[\frac{n}{2}]$个人互相认识;

(2)对于其中任意$[\frac{n}{2}]$个人,或者其中有2人相识,或者余下的人中有2个相识.证明:这 n 个人中必有三人两两相识.

分析 利用图的语言,n 个人用 n 个顶点表示,每两个点间连一条线(边),若两人互相认识,则相连的这条边染成红色,否则染成蓝色.问题转化为:(1)每个顶点至少连出了$[\frac{n}{2}]$条红边;(2)图中任意$[\frac{n}{2}]$个顶点间至少有一条红边,或者另外 $n-[\frac{n}{2}]$个顶点间至少有一条红边,则图中至少有一个"红边三角形".

证明 反设图形中不存在红边三角形.

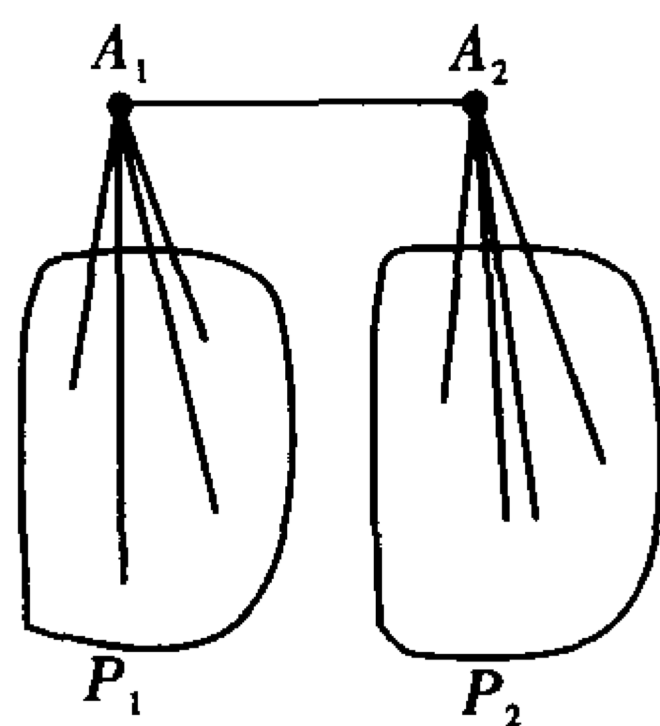


图 9－9

任取一条红边 A_1A_2，设与 A_1 点间连有红边的点（A_2 除外）的集合是 P_1，与 A_2 点间连有红边的集合是 P_2，$|P_1|$ 表示点集 P_1 中点的个数，其余类推.

若 $P_1\cap P_2\neq\varnothing$，则存在点 $B\in P_1\cap P_2$，此时 A_1A_2B 是红边三角形，与假设矛盾.

故 $P_1\cap P_2=\varnothing$.

①设 $n=2m$ 是偶数，则 $[\frac{n}{2}]=m, n-[\frac{n}{2}]=m$.

因每个顶点至少连出了 m 条红边，则 $|P_1|\geqslant m-1$，$|P_2|\geqslant m-1$，但点集中总共只有 $2m$ 个点，

故 $|P_1|=m-1$，$|P_2|=m-1$.

若 P_1 中含有一条红边 C_1C_2，则 $A_1C_1C_2$ 是红边三角形，$\therefore P_1$ 中不含红边. 同理 P_2 中也不含红边.

此时 $|A_1\cup P_2|=m$，$|A_2\cup P_1|=m$，但在 $A_1\cup P_2$ 的 m 个顶点间无红边，在 $A_2\cup P_1$ 的 m 个顶点间也无红边，与条件(2)矛盾.

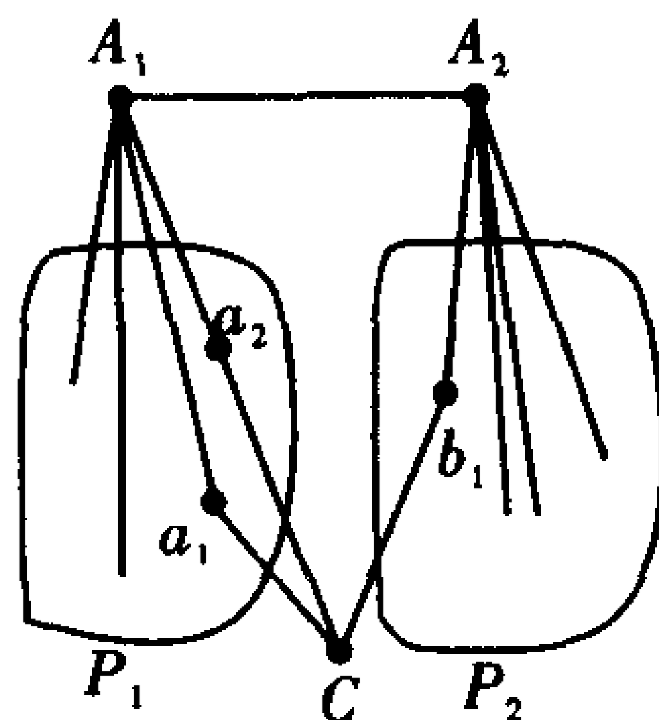


图 9－10

②设 $n=2m+1$ 是偶数，则 $[\frac{n}{2}]=m, n-[\frac{n}{2}]=m+1$.

同前证，已知 $|P_1|\geqslant m-1$，$|P_2|\geqslant m-1$，且 P_1 中不含红边，P_2 中也不含红边.

若 $|P_1|=m$ 或 $|P_2|=m$，不妨设 $|P_1|=m$，则 $|A_1\cup P_2|=m$，$|A_2\cup P_1|=m+1$，同前证与条件(2)矛盾.

于是 $|P_1|=m-1$，且 $|P_2|=m-1$，从而有一个顶点 C（不同于 A_1、A_2），$C\notin P_1$，$C\notin P_2$.

设顶点 C 与 P_1 中的 k_1 个点连有红边，与 P_2 中的 k_2 个点间连有红边，则 $k_1+k_2\geqslant m\geqslant 3$（因 $n\geqslant 6$）.

故不妨设 $k_1\geqslant 2$，易知 $k_2\neq 0$（因 $|P_1|<m$），则 $k_2\geqslant 1$）.

设 a_1、$a_2\in P_1$，a_1C 与 a_2C 是红边，$b_1\in P_2$，b_1C 是红边.

若 b_1a_2 或 b_1a_1 是红边，则图 9－10 中已有红边三角形 b_1a_2C 或 b_1a_1C，与假设矛盾. 若 b_1a_2 与 b_1a_1 均不是红边，则从 b_1 连出的红边数至多为

$(m-1)-2+2=m-1$，矛盾.

综上，图形中必然存在一个红边三角形.

【解题尝试】

A 组

1. 若 n 个选手间安排了对抗赛（一对一），已赛完 $n+1$ 场，那么至少有一人赛过 3 次.
2. （1978 年美国奥林匹克题）在一间房子里有 $N(73)$ 个人，至少有一个人没有和房子里每个人握手，房间里可能与每人握手的人数的极大值是多少？
3. 试证性质 2.

4. (第7届美国数学奥林匹克题)九位数学家在一次国际会议上相遇,他们之中的任意三个人中,至少有两人会说同一种语言,如果每一位数学家最多只能说三种语言. 试证明:至少有三位为数学家能用同一种语言交谈.
5. (1960年匈牙利奥林匹克题)在参观团的任意四个人中,有一个人原先见过其他三人. 证明:在任何四个参观团员中,总可以找到一个人,他原先见过所有的参观团员.
6. 有三个城市与三个风景旅游地,要从每一个城市到每一个旅游地各修一条专用铁路,这些铁路能否在同一个平面上并且互不交叉?
7. 证明:如果 n 个电话交换台的任何两个总可以通话,则至少应有 $n-1$ 条直通线路存在.
8. 九个人中一定有三个人互相认识或者有四个人互不认识.
9. (第6届IMO试题)十七个科学家中每一个和其余十六个通信,在他们的通信中所讨论的仅有三个问题,而任两个科学这通信时所讨论的是同一个问题. 证明:至少有三个科学家通信时所讨论的是同一个问题.
10. (第10届美国奥林匹克题)某县下属每两个区都恰好有汽车、火车、飞机三种交通方式的一种联系. 已知在全县三种交通方式全有,但没有一个区三种方式全有;并且没有任何三个区两两联系的方式全相同,试问这个县至多有几个区?
11. (1957年匈牙利奥林匹克题)某工厂生产由六种不同颜色的纱织成的双色布,在这个工厂所生产的双色布中,每一种颜色至少和三种其他的颜色搭配. 证明:可以排出三种不同的双色布,它们含有所有六种颜色.

B组

1. 设自然数 n 有下面的性质,从 $1,2,\cdots,n$ 中任取51个不同的数. 这51个数中必有两个数之和等于101,这样的 n 最大的一个是多少?
2. (1985年全国高中联赛题)某足球邀请赛有十六个城市参加,每市派甲、乙两个队,根据比赛规则每两队之间至多赛一场,并且同一城市的两个队之间不进行比赛. 比赛若干天后进行统计,发现除 A 市的甲队外,其他各队已比赛过的场次各不相同,问 A 市乙队已赛过多少场? 请证明你的结论.
3. (第18届美国奥林匹克题)某地区网球俱乐部的20名成员举行14场单打比赛,每人至少上场一次. 求证:必有六场比赛,其12个参赛者各不相同.
4. (1989年加拿大奥林匹克题)有五只猴子和5个梯子. 每个梯子的顶端各放一根香蕉,梯子之间有若干绳子相连,每条绳子连接两个梯子的两级,任一梯子的一级上至多只系一条绳子. 开始时五只猴子分别位于不同的梯子底端,它们沿梯子上爬,每遇到绳子都沿之爬到另一端然后继续上爬. 求证:无论有多少绳子,最后每只猴子都各拿到一根香蕉.
5. (普特南26届B-2) n 个参赛者 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 进行循环赛 $(n>1)$,每个参赛者同其他 $n-1$ 个参赛者都进行一局比赛. 假设,比赛结果没有不分胜负的平局出现,w_r 和 l_r 分别表示参赛者 p_r 胜与负的局数. 求证:$\sum_{i=1}^{n}w_i^2=\sum_{i=1}^{n}l_i^2$.
6. 一个国际社团的成员来自6个国家,共有成员1978人,用 $1,2,3,\cdots,1977,1978$ 编号,证明:该社团至少有一个成员的号数与他的两个同胞的号数之和相等或是另一个同胞的号数的两倍.

第二篇　懂得诸子“兵法”

——会寻善析几类题型思路

求解一个问题的重要成绩是构造出一个解题计划的思路.

——波利亚(Polya)

解题的成功要靠正确思路的选择,要靠从可以接近它的方向去攻击堡垒.为了辨别哪一条思路正确,哪一方向可接近它,就要试探各种方向和各种思路.

——波利亚(Polya)

数学竞赛题的求解,要求思路开拓、敏捷.如果思路狭窄,只想到用某一方面的知识和某一种方法来解决,视野局限于一隅,无形中给自己“画地为牢”.这样,在求解过程中要么举步艰难,要么步骤繁琐如入山重水复之境.在数学竞赛中取得较好成绩的人,往往思路开阔、思维灵活,头脑中有更多的思路和方法提取,展现在他眼前的是坦途条条,即使暂时受挫,也会马上柳暗花明,别有洞天.

第 10 章　集合问题的求解思路

【学习目标】

集合是数学中的一个基本概念.数学竞赛中的集合问题是一类涉及代数、几何、数论、组合等知识的综合性题类.集合问题常见的题类有:关于特殊子集的计算和论证问题、关于集合的划分与覆盖问题、关于集合运算的问题等.

【解题钥匙】

1. 抓住对集合概念的理解

例 1　设集合 $A=\{x|x\in\mathbf{Z}$ 且 $\frac{600}{5-x}\in\mathbf{Z}\}$,则 A 的元素个数为______,所有元素的和为________.

解　分别填 48,240.理由:因为 $600=2^3\cdot3\cdot5^2$,所以 600 的正约数有 $(3+1)\cdot(1+1)\cdot(2+1)=24$ 个.从而,集合 A 中共有 $24\cdot2=48$ 个元素.

考虑 600 的相反约数所对应的 A 中元素之和为 10,故 A 中元素之和为 $24\cdot10=240$.

例 2　(1995 年全国高中数学联赛题)设 $M=\{1,2,\cdots,1995\}$,A 是 M 的子集且满足条件:当 $x\in A$ 时,$15x\notin A$.则 A 中元素的个数最多是________.

解　由题设知,k 与 $15k$ 这两个数中至少有一个不属于 A.

由于 $[\frac{1995}{15}]=133$,所以,$k=134,135,\cdots,1995$ 时,$15k$ 一定不属于 A.

同理,$[\frac{133}{5}]=8$,当 $k=9,10,\cdots,133$ 时,k 与 $15k$ 不能同时属于 A,此时至少有 $133-8=125$ 个数不属于 A,于是,

$|A|\leqslant1995-125=1870.$

又可取 $A=\{1,2,\cdots,8\}\cup\{134,135,\cdots,1995\}$,所以,$|A|$ 的最大值为 1870.

例 3　(2003 年北京市竞赛题)a 为非零实数,x 为实数.记命题 M:$x\in\{-a,a\}$,记命题 N:$\sqrt{x^2}=a$ 有解.则 M 是 N 的(　　).

A. 充分非必要条件　　　　B. 必要非充分条件

C. 充分且必要条件　　　　D. 既非充分又非必要条件

解　选 B.理由:设 a 为正数,当 $x=-a$ 时,$x\in\{-a,a\}$,M 真.但 $\sqrt{(-a)^2}=a\neq a$,N 不真.所以,M 不是 N 的充分条件.

若 N 真,$\sqrt{x^2}=a$,显然应有 a 为非负数.但 a 不为 0,所以 a 为正数.于是,$x=a\in\{-a,a\}$,故 M 真.因此,M 是 N 的必要条件.

综上分析,M 是 N 的必要非充分条件.

例 4 （1994 年江苏省竞赛题）已知对任意实数 x，函数 $f(x)$ 都有定义，且 $f^2(x)\leqslant 2x^2 f(\frac{x}{2})$. 如果 $A=\{a\mid f(a)>a^2\}\neq\varnothing$，求证：$A$ 是无限集.

解 在 $f^2(x)\leqslant 2x^2 f(\frac{x}{2})$ 中，令 $x=0$，可得 $f^2(0)\leqslant 0$. 所以，$f(0)=0$，$0\notin A$.

于是必有一个实数 $a(a\neq 0)$，使 $a\in A$，即 $f(a)>a^2$. 由已知

$$f(\frac{a}{2})\geqslant\frac{f^2(a)}{2a^2}>\frac{a^4}{2a^2}>(\frac{a}{2})^2,$$

故 $\frac{a}{2}\in A$.

同理，$\frac{a}{4},\frac{a}{8},\cdots,\frac{a}{2^n},\cdots$ 均是 A 的元素.

所以，A 是无限集.

2. 正确运用集合的子、交、并、补、差的运算法则

例 5 （1989 年全国高中联赛题）集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l$，其中 $m,n,l\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{u\mid u=20p+16q+12r$，其中 $p,q,r\in\mathbf{Z}\}$，M、N 的关系是 （ ）

A. $M=N$ B. $M\not\subseteq N$，$N\not\subseteq M$

C. $M\subset N$ D. $M\supset N$

解 选 A. 理由：对 N 中任一元素 u，有 $u=20p+16q+12r=12r+8\cdot(2q)+4\cdot(5p)\in M$，从而 $N\subseteq M$. 另一方面，对 M 中任一元素 u，有 $u=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-1)\in\mathbf{N}$，从而 $M\subseteq N$，故 $M=N$.

例 6 （1998 年全国高中数学联赛题）若非空集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$，则能使 $A\subseteq(A\cap B)$ 成立的所有 a 的集合是（ ）.

A. $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 9\}$ B. $\{a\mid 6\leqslant a\leqslant 9\}$

C. $\{a\mid a\leqslant 9\}$ D. $\varnothing$

解 选 B. 理由：由 $A\subseteq(A\cap B)$，可知 $A\subseteq B$，如图 10－1 所示.

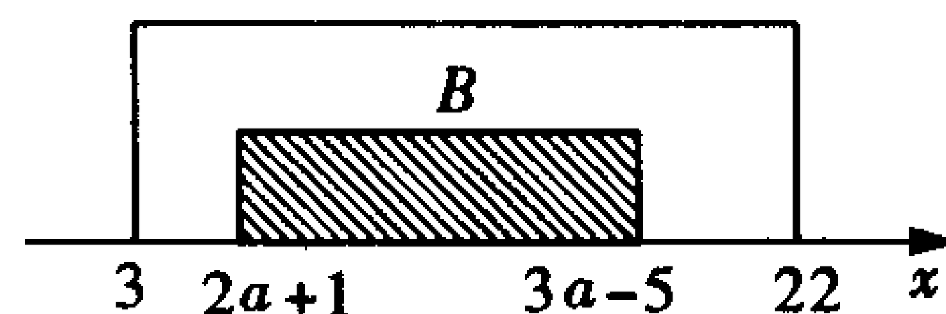


图 10－1

从而，

$$\begin{cases}2a+1\geqslant 3,\\3a-5\leqslant 22,\\3a-5\geqslant 2a+1\end{cases}$$

$\Rightarrow 6\leqslant a\leqslant 9$，即 $a\in\{a\mid 6\leqslant a\leqslant 9\}$.

例 7 （1984 年全国高中数学联赛试题）判断下面命题是否正确：

设 A、B 是坐标平面上的两个点集，

$C_r=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$，

若对任何 $r\geqslant 0$，都有 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，则必有 $A\subseteq B$.

解 这个命题不正确. 我们可以举出下面的反例：

取 $A=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，

$B=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}$，且 $x^2+y^2\neq 0\}$.

显然 $C_r\cup A=A$. 由于 $(0,0)\in C_r$，故 $C_r\cup B=A$.

于是 $C_r\cup A=C_r\cup B$，即 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$.

但由$(0,0)\in A$，$(0,0)\notin B$知$A\nsubseteq B$.

例 8 设函数$f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$，集合$M=\{x\mid x=f(x),x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{x\mid x=f(f(x))\}$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)证明：$M\cap N=M$；

(2)若$M=\{1,3\}$，求$M\cup N$.

解 (1)要证明$M\cap N=M$，只须证明$M\subseteq N$，即证M中的每一个元素均在N中. 事实上，

设任意的$x_0\in M$，则$x_0=f(x_0)$. 又因为

$f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$，

故$x_0\in\mathbf{N}$，所以$M\subseteq N$，从而$M\cap N=M$.

(2)当$M=\{-1,3\}$时，即方程$x=x^2+ax+b$有两个根$-1,3$，于是不难求得$a=-1,b=-3$，

此时，集合N就是方程

$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$的解集.

将上述方程化为

$(x^2-x-3)^2-x^2=0$，

即$(x^2-x-3-x)(x^2-x-3+x)=0$，

从而$x^2-2x-3=0$或$x^2-3=0$，

解之，得$x_1=-1,x_2=3,x_3=\sqrt{3},x_4=-\sqrt{3}$.

故 $N=\{-1,3,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$，$M\cup N=N=\{-1,3,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$.

3. 注意特殊子集的存在、计算及构造

例 9 (1996年全国高中数学联赛题)集合$\{x\mid -1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2},x\in\mathbf{N}_+\}$的真子集的个数是____.

解 $A=\{x\mid -1\leqslant -\log_x^{10}<-\frac{1}{2},x\in\mathbf{N}_+\}$

$=\{x\mid -1\leqslant -\log_1 0<-\frac{1}{2},x\in\mathbf{N}_+\}$

$=\{x\mid 1\leqslant \lg x<2,x\in\mathbf{N}_+\}$

$=\{x\mid 10\leqslant x<100,x\in\mathbf{N}_+\}$.

对一个集合，如果该集合有n个元素，则其子集个数为$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$，真子集个数为$2^n-1$，从而，集合$A$中有90个元素，有$2^{90}-1$个真子集.

例 10 (1996年上海市高中数学竞赛)已知集合$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. 求该集合具有下列性质的子集个数：每个子集至少含有2个元素，且每个子集中任意两个元素之差的绝对值大于1.

解 设a_n为集合$\{1,2,\cdots,n\}$的具有题设性质的子集个数，则$\{1,2,\cdots,k,k+1,k+2\}$的具有题设性质的子集可分为两类：第一类子集中不含有$k+2$，这类子集有a_{k+1}个；第二类子集中含有$k+2$，这类子集或为$\{1,2,\cdots,k\}$的相应子集与$\{k+2\}$的并，或为$\{1,2,\cdots,k\}$的单元子集与$\{k+2\}$的并，共有a_k+k个.

于是，$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k+k$.

显然，$a_3=1,a_4=3$.

从而，$a_5=7,a_6=14,a_7=26$，

$a_8=46, a_9=79, a_{10}=133$.

例 11 （1973 年美国纽约竞赛题）设有限集合 $M\subset R$，B 是 M 的一个子集. 如果集合 M 中每个数都可惟一地表示为集合 B 中数的整数次幂的乘积，则 B 称为 M 的基. 试问，任何有限的正数集合都具有基，对否？

解 我们将证明：有限的正整数集合 $M(M\neq\{1\})$ 具有基 B.

设 S 是正数集合 M 的子集. 如果 M 中每个数都可以表示为

$\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\cdots\alpha_m^{i_m}, \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in S, i_1,i_2,\cdots,i_m\in\mathbf{Z}$.

则 S 称为 M 的上基. 例如集合 M 自身即是 M 的上基.

在 M 的所有上基中，取所含元素最少的集合 $S_0=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$（因为 M 是有限集合，所以 S_0 存在）. 可以证明，如果 $n\geqslant 2$，则 S_0 即是 M 的基. 事实上，设某个 $u\in M$ 可表示为 S_0 中元素的两种不同形式的整数次幂之乘积

$u=\beta_1^{i_1}\beta_2^{i_2}\cdots\beta_n^{i_n}=\beta_1^{j_1}\beta_2^{j_2}\cdots\beta_n^{j_n}$.

记 $k_l=i_l-j_l$，则 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 不全为 0，且

$\beta_1^{k_1}\beta_2^{k_2}\cdots\beta_n^{k_n}=1$.

不妨设 $k_n\neq 0$，则记 $r_i=\beta_i^{1/k_n}$，$i=1,2,\cdots,n-1$，并取 $S_1=\{r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}\}$，于是集合 S_0 中每个元素都可以表示为 S_1 中元素的整数次幂之乘积，这只要取 $\beta_i=r_i^{k_n}$，$i=1,2,\cdots,n-1$，且 $\beta_n=r_1^{-k_1}r_2^{-k_2}\cdots r_{n-1}^{-k_{n-1}}$ 便可. 因此集合 S_1 是 M 的上基，且只含 $n-1$ 个元素，与 S_0 的选取矛盾. 因此 S_0 是 M 的基.

其次当 $n=1$ 时，M 有上基 $S_0=\{\beta\}$. 如果 $\beta\neq 1$，则因为当 $i\neq j$ 时不可能有 $\beta^i\neq\beta^j$，所以 S_0 是 M 的基. 如果 $\beta=1$，则 $S_0=\{1\}$，于是 $M=\{1\}$，这时没有符合题意的基.

例 12 （1988 年上海市数学竞赛试题）对集合 $S=\{(a_1,a_2,\cdots,a_5)\mid a_i=0$ 或 $1, i=1,2,\cdots,5\}$ 中的任意两个元素 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_5)$ 和 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_5)$，定义它们之间的距离为：

$d(A,B)=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_5-b_5|$，

取 S 的一个子集 T，使 T 中任意两个元素之间的距离都大于 2. 子集 T 最多含有多少个元素？证明你的结论.

解 T 中最多能有 4 个元素.

如果有一个 5 个元素以上的子集也符合题设条件，因为每个元素的每一位数码只能取 0 或 1 两个不同的值，所以这五个元素中至少有 3 个的第一位数码相同，不妨设 A,B,C 三个元素的第一位数码相同.

同样，在 A,B,C 三个元素中，第二、第三、第四、第五 4 个数码中，每一位都至少有两个元素的对应数码相同. 但 A,B,C 三元素两两分组只有 $C_3^2=3$ 组，故至少有两个元素，它们除第一个数码相同外，至少还有两位数码相同. 不妨设为 A 与 B，则 A 与 B 的距离不大于 2，与假设矛盾. 故符合题设条件的子集 T 的元素不多于 4 个.

再令 $T=\{(1,1,1,1,1),(0,0,0,1,1),(1,1,0,0,0),(0,0,1,0,0)\}$，则不难验证 T 中任何两个元素的距离都大于 2.

综上知 $|T_{\max}|=4$.

4. 重视对应原理的运用

对应原理 设 A 和 B 都是有限集，f 为从 A 到 B 的一个映射，用 $|X|$ 表示集合 X 的元素的个数.

(1)若 f 为单射,则 $|A|\leqslant|B|$;

(2)若 f 为满射,则 $|A|\geqslant|B|$;

(3)若 f 为双射(一一映射),则 $|A|=|B|$;

(3)若 f 为倍数是 m 的倍数映射,则 $|A|=m|B|$.

例 13 给定一个正整数 n,有多少个满足条件

$0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant n$

的四元有序整数组 (a,b,c,d)?

解 作映射 $f:(a,b,c,d)\to(a,b+1,c+2,d+3)$.

于是 f 是从集合 $A=\{(a,b,c,d)\mid 0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant n\}$ 到 $B=\{(a,b',c',d')\mid 0\leqslant a<b'<c'<d'\leqslant n+3\}$ 的一个映射.

容易验证,这个映射 f 是一一对应的,所以 $|A|=|B|$.

由于 $|B|$ 就是集合 $\{0,1,2,\cdots,n+3\}$ 的四元子集的个数,即 C_{n+4}^4,从而 $|A|=C_{n+4}^4$.

例 14 (1992 年全国高中数学联赛题)设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$.若 X 是 S_n 的子集,把 X 中所有数之和称为 X 的"容量"(规定空集的容量为 0).若 X 的容量为奇(偶)数,则称 X 为 S_n 的奇(偶)子集.求证:S_n 的奇子集与偶子集个数相等.

证明 如能建立起 S_n 的奇子集与偶子集之间的一一对应关系,则说明二者个数相等.

于是,对于 S_n 的任一个偶子集 B,令

$$A=\begin{cases}B\cup\{1\}, & 1\notin B\text{ 时},\\ B\setminus\{1\}, & 1\in B\text{ 时}.\end{cases}$$

从而,A 为 S_n 的奇子集.

反之,对 S_n 的任一个奇子集 A,取

$$B=\begin{cases}A\cup\{1\}, & 1\notin A\text{ 时},\\ A\setminus\{1\}, & 1\in A\text{ 时}.\end{cases}$$

则得 S_n 的任一个偶子集 B.

这说明在 S_n 的奇子集与偶子集之间建立了一个一一对应关系,因此,S_n 的奇子集与偶子集个数相等.

5. 注意集合的划分与覆盖性质的运用

设集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是集合 A 的一族非空子集,且满足

(1)对 $1\leqslant i<j\leqslant n$,均有 $A_i\cap A_j=\varnothing$;

(2)$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为集合 A 的一个划分.

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 仅满足条件(2),则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为集合 A 的一个覆盖.

例 15 (第 29 届 IMO 预选题)设 k 为正整数,M_k 是 $2k^2+k$ 与 $2k^2+3k$ 之间(包括这两个数在内)的所有整数所组成的集,能否将 M_k 分拆为两个子集 A,B,使得

$$\sum_{x\in A}x^2=\sum_{x\in B}x^2?$$

解 先从特殊情况入手.

$k=1$ 时,$M_1=\{3,4,5\}$,而 $3^2+4^2=5^2$.

$k=2$ 时,$M_2=\{10,11,12,13,14\}$,而

$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2=365.$

于是，从 k 的这两个特殊值的情况诱发我们猜想 M_k 中前 $k+1$ 个数的平方和与后 k 个数的平方和相等，这个猜想是正确的. 事实上

$$\begin{aligned}&(2k^2+2k+1)^2+(2k^2+2k+2)^2+\cdots+(2k^2+3k)^2-(2k^2+k)^2-(2k^2+k+1)^2-\cdots-(2k^2+2k)^2\\&=\sum_{j=0}^{k-1}\{(2k^2+2k+1+j)^2-(2k^2+k+j)^2\}-(2k^2+2k)^2\\&=(k+1)\sum_{j=0}^{k-1}(4k^2+3k+2j+1)-(2k^2+2k)^2\\&=(k+1)\{(4k^2+3k)k+k^2\}-(2k^2+2k)^2\\&=4k^2(k+1)^2-(2k^2+2k)^2=0,\end{aligned}$$

得证.

例 16 （1978 年罗马尼亚竞赛题）集合 X 划分为两两不交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，又划分为两两不交的子集 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 已知任意两个不交的子集 A_i 与 B_j 的并集 $A_i\cup B_j$ 至少含有 n 个元素，$1\leqslant i,j\leqslant n$，证明：集合 X 的元素个数至少为$\frac{n^2}{2}$. 它能否等于$\frac{n^2}{2}$？

证明 不失一般性，不妨设集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中元素个数最少的集合为 A_1，A_1 含有 k 个元素，由于 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两不交，因此 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中使 $A_1\cap B_j\neq\varnothing$ 的集合至多有 k 个. 不妨设集合 $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 满足 $A_1\cap B_j\neq\varnothing$，其中 $m\leqslant k$. 集合 $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 都至少含有 k 个元素，因此它们的并至少含有 mk 个元素.

因为当 $j=m+1,\cdots,n$ 时，$A_1\cap B_j=\varnothing$，$A_1\cup B_j$ 至少含 n 个元素，所以集合 $B_j(j=m+1,\cdots,n)$ 都至少含有 $n-k$ 个元素. 因此整个集合 $X=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n$ 中至少有 $l=mk+(n-k)(n-m)$ 个元素.

如果 $k\geqslant\frac{n}{2}$，则集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中每一个都至少含有$\frac{n}{2}$个元素，而 $X=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 中所有元素个数至少为 $n\cdot\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}$.

如果 $k<\frac{n}{2}$，则由 $m\leqslant k$ 得到

$$\begin{aligned}l&=n(n-k)-m(n-2k)\geqslant n(n-k)-k(n-2k)\\&=2(\frac{n}{2})^2+2(\frac{n}{2}-k)^2\geqslant\frac{n^2}{2}.\end{aligned}$$

下面再给出集合 X 恰含有$\frac{n^2}{2}$个元素的例子. 设 n 为偶数，且 $X=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 是把集合 X 划分为 n 个两两不交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，并且每个子集 A_i 恰含$\frac{n}{2}$个元素. 令 $B_1=A_1,B_2=A_2,\cdots,B_n=A_n$，则题中所有条件都满足.

例 17 （2001 年中国西部数学奥林匹克题）我们称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为集合 A 的一个 n 划分，如果：

(1) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A$；

(2) $A_i\cap A_j\neq\varnothing$，$1\leqslant i<j\leqslant n$.

求最小正整数 m，使得对 $A=\{1,2,\cdots,m\}$ 的任意一个 14 划分 $A_1,A_2,\cdots,A_{14}$，一定存在某个集合 A_i $(1\leqslant i\leqslant 14)$，在 A_i 中有两个元素 a、b 满足 $b<a\leqslant\frac{4}{3}b$.

解 (i)若 $m<56$,令 $A_i=\{a|a\equiv i(\mathrm{mod}14),a\in A\}$,则 $\forall b<a\in A_i(i=1,2,\cdots,14)$,均有 $56>a>b$,且 $a-b\geqslant 14$. 故 $b\leqslant a-14<42$.

于是,$\frac{a}{b}=1+\frac{a-b}{b}\geqslant 1+\frac{14}{b}>1+\frac{14}{42}=\frac{4}{3}$.

故正整数 $m\geqslant 56$.

(ii)若 $m=56$,则对 A 的任意分划 $A_1,A_2,\cdots,A_{14}$,数 42,43,…,56 中,必有两个数属于同一个 A_i,它们满足 $b\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}b$.

综上所述,所求 m 的最小正整数值为 56.

例 18 (2003 年 IMO 中国国家队选拔赛题)设 $A=\{1,2,\cdots,2002\}$,$M=\{1001,2003,3005\}$. 对 A 的任一非空子集 B,当 B 中任意两数之和不属于 M 时,称 B 为 $M-$自由集. 如果 $A=A_1\cup A_2$,$A_1\cup A_2=\varnothing$,且 A_1、A_2 均为 $M-$自由集,那么,称有序对(A_1,A_2)为 A 的一个 $M-$划分. 试求 A 的所有 $M-$划分的个数.

解 对 m、$n\in A$,若 $m+n=1001$ 或 2003 或 3005,则称 m 与 n"有关".

易知与 1 有关的数仅有 1000 和 2002,与 1000 和 2002 有关的都是 1 和 1003,与 1003 有关的为 1000 和 2002.

所以,1,1003,1000,2002 必须划分为两组

$\{1,1003\},\{1000,2002\}$.

同理可划分其他各组

$\{2,1004\},\{999,2001\}$;

$\{3,1005\},\{998,2000\}$;

……

$\{500,1502\},\{501,1503\}$;

$\{1001\},\{1002\}$.

这样 A 中的 2002 个数被划分成 501 对,共 1002 组.

由于任意数与且只与对应的另一组有关,所以,若一对中一组在 A_1 中,另一组必在 A_2 中. 反之亦然,且 A_1 与 A_2 中不再有有关的数. 故 A 的 $M-$划分的个数为 2^{501}.

【解题尝试】

A 组

1. (2002 年安徽省竞赛题)已知集合 $P=\{x|x^2=1\}$ 和 $Q=\{x|mx=1\}$. 若 $Q\subset P$,则实数 m 可取值的个数为( ).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. (2003 年安徽省竞赛题)定义:$A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$. 若 $M=\{x|1\leqslant x\leqslant 2002,x\in\mathbf{N}_+\}$,$N=\{y|2\leqslant y\leqslant 2003,y\in\mathbf{N}_+\}$,则 $N-M$ 等于( ).

A. M　　B. N　　C. $\{1\}$　　D. $\{2003\}$

3. (2001 年全国高中联赛题)已知 a 为给定的实数. 那么,集合

$M=\{x \mid x^2-3x-a^2+2=0, x\in\mathbf{R}\}$

的子集的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 不确定

4. (2002年湖南省竞赛题)满足条件$\{1,2,3\}\subseteq X\subseteq\{1,2,3,4,5,6\}$的集合$X$的个数为________.

5. (1990年全国高中数学联赛试题)点集$\{(x,y)\mid \lg(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9})=\lg x+\lg y\}$中元素的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 多于2

6. 设S为满足下列条件的有理数集合:

(1)若$a\in S, b\in S$,则$a+b\in S, ab\in S$;

(2)对任一有理数r,三个关系:$r\in S, -r\in S, r=0$有且仅有一个成立.

证明:S是由全体正有理数组成的集合.

7. 以某些整数为元素的集合M具有下述性质:

(1)M中的元素有正数,有负数;

(2)M中的元素有奇数,有偶数;

(3)$-1\notin M$;

(4)若$x, y\in M$,则$x+y\in M$.

试判断实数0和2与集合M的关系.

8. (1991年全国高中数学联赛题)设集合$M=\{1,2,\cdots,1000\}$,现对M的任一非空子集X,令a_x表示X中最大数与最小数之和.那么,所有这样的a_x的算术平均值为______.

9. 已知集合$M=\{x, xy, \lg xy\}$, $N=\{0,|x|,y\}$,并且$M=N$,那么$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+(x^3+\frac{1}{y^3})+\cdots+(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}})$的值等于________.

10. 对于点集$A=\{(x,y)\mid y=-3x+2, x\in\mathbf{N}_+\}$, $B=\{(x,y)\mid y=m(x^2-x+1), x\in\mathbf{N}_+\}$,试证明:存在惟一的非零整数,使$A\cap B\neq\varnothing$.

B组

1. (1997年上海市高中数学竞赛题)设$S=\{1,2,3,4\}$, n项数列$a_1, a_2, \cdots, a_n$有以下性质:对于S的任何一个非空子集B,在该数列中有相邻的$|B|$项恰好组成集合B.求n的最小值.

2. (1994年四川省高中数学竞赛题)已知集合$M=\{1,2,\cdots,k\}$,对$A\subseteq M$,将A中所有元素的和记为$S(A)$.若可将M分为互不相交的两个子集A、B,且$A\cup B=M$, $S(A)=2S(B)$.求k的所有值.

3. (第43届美国中学数学竞赛题)设S为集合$\{1,2,\cdots,50\}$具有下列性质的子集:S中任意两个不同元素之和不能被7整除.那么,S中元素最多可能有多少个?

4. (1994年河北省高中数学竞赛题)设集合$A=\{1,2,\cdots,366\}$.如果A的一个二元子集$B=\{a,b\}$满足$17\mid(a+b)$,则称B具有性质P.

(1)求A的具有性质P的二元子集的个数;

(2)A的一组二元子集,两两不相交且具有性质P,这组二元子集的个数是多少?

5. (2002年保加利亚冬季数学竞赛题)设A是集合$\{1,2,3,\cdots,16\}$的一个k元子集,且A的任意两个



子集的元素之和互不相等. 而对于集合$\{1,2,3,\cdots,16\}$的包含集合A的任意$k+1$元子集B,则存在B的两个子集,它们的元素之和相等.

(1)证明:$k\leqslant 5$;

(2)求集合A的元素之和的最大值和最小值.

6. (1988年IMO国家集训队选拔赛题)设$n\in\mathbf{N}$大于3,且具有下列性质:把集合$S_n=\{1,2,\cdots,n\}$任意分为两组,总有某个组,它含有三个数a,b,c(允许$a=b$),使得$ab=c$. 求这种n的最小值.

7. 设S是数集合$\{1,2,3,\cdots,1989\}$的一个子集,且S中任意两个数的差不等于4或7,问S最多可以包含多少个数?

8. (1990年中国数学奥林匹克题)设X是一个有限集合,法则f使得X的每一个偶子集E(偶数个元素组成的子集)都对应一个实数$f(E)$,且满足条件:

①存在一个偶子集D,使得$f(D)>1990$;

②对于X的任意两个不相交的偶子集A,B,有$f(A\cup B)=f(A)+f(B)-1990$.

求证:存在X的子集P和Q,满足:

(i)$P\cap Q=\varnothing$,$P\cup Q=X$;

(ii)对P的任何非空偶子集S有$f(S)>1990$;

(iii)对Q的任何偶子集T有$f(T)\leqslant 1990$.

9. (第31届IMO预选题)设r是任意一个自然数,若将全体自然数所成的集N分拆成r个两两不相交的子集$A_1,A_2,\cdots,A_r$:$N=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_r$,则在这些子集中必存在某个子集$A$,具有性质(*),存在$m\in\mathbf{N}$,使得对任何正整数$k$,都能找到$a_1,a_2,\cdots,a_k\in A$,满足$1\leqslant a_{j+1}-a_j\leqslant m$,$j=1,2,\cdots,k-1$.



第 11 章　等式问题的求解思路

【学习目标】

数学竞赛中的等式问题既包括恒等式，又包括条件等式；既包括条件中含有等式和结论中含等式的情况，又包括各学科知识方面的等式情形.

等式问题的求解，既要运用各学科知识推演，又要善于运用一些处理策略. 若要使求解思路快捷地展现在你面前，还要关注如下一些方面的思路规律.

【解题钥匙】

1. 适当变形或构造

例 1　(1996 年全国高中联赛题)存在整数 n，使 $\sqrt{p+n}+\sqrt{n}$ 是整数的质数 p(　　).

A. 不存在　　　　B. 只有一个

C. 多于一个，但为有限个　　　　D. 有无穷多个

解　选 D. 理由：设 p 为任意奇质数，且 $p=2k+1$. 于是 $n=k^2$，便有 $\sqrt{p+n}+\sqrt{n}=\sqrt{2k+1+k^2}+\sqrt{k^2}=2k+1$. 所以，每个奇质数都具有题设性质.

例 2　(1974 年第 6 届加拿大数学奥林匹克题)如果 $x=(1+\frac{1}{n})^n$，$y=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$，证明：$y^x=x^y$.

证明　$y^x=[(1+\frac{1}{n})^{n+1}]^{(1+\frac{1}{n})^n}=[(1+\frac{1}{n})^{n(1+\frac{1}{n})}]^{(1+\frac{1}{n})^n}=[(1+\frac{1}{n})^n]^{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=x^y$.

所以　$y^x=x^y$.

例 3　(1992 年第 21 届美国数学奥林匹克题)证明：$\frac{1}{\cos 0^\circ\cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ\cos 2^\circ}+\cdots+\frac{1}{\cos 88^\circ\cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$.

证明　为了书写方便，我们约定下面各三角函数中的角都以度为单位，即 $\sin 1$ 是 $\sin 1^\circ$，$\sin(x+1)$是指 $\sin(x+1)^\circ$. 于是

原式右边 $=\frac{\cos 1}{\sin^2 1}=\frac{\cot 1}{\sin 1}=\frac{\tan 89}{\sin 1}$.

因　$\frac{\sin 1}{\cos x\cos(x+1)}=\frac{\sin(x+1)\cos x-\cos(x+1)\sin x}{\cos x\cos(x+1)}=\tan(x+1)-\tan x$，

故　$\sin 1\cdot\sum\limits_{x=0}^{88}\frac{1}{\cos x\cos(x+1)}=\sum\limits_{x=0}^{88}(\tan(x+1)-\tan x)=\tan 89-\tan 0=\tan 89$.

所以，原式左边$=\sum\limits_{x=0}^{89}\frac{1}{\cos x\cos(x+1)}=\frac{\tan 89}{\sin 1}=$右边.

例 4 （1990 年全国高中数学联赛题）$n^2(n\geqslant 4)$个正数排列 n 行 n 列：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n}, \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n}, \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n}, \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n}, \\ \cdots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & a_{n_3} & a_{n_4} & \cdots & a_{n_n} \end{matrix}$$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列，并且所有公比相等. 已知

$$a_{24}=1,a_{42}=\frac{1}{8},a_{43}=\frac{3}{16},$$

求 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$的值.

解 由于每行数都成等差数列，且 $a_{42}=\frac{1}{8}$，$a_{43}=\frac{3}{16}$，所以第四行数的公差为$\frac{1}{16}$，同时

$$a_{4k}=\frac{k}{16},k=1,2,3,4,\cdots,n.$$

再由每列数成等比数列，且所有公比相等，利用 $a_{24}=1$，$a_{44}=\frac{1}{4}$可知共同的公比为$\frac{1}{2}$. 于是可得$a_{kk}=(\frac{1}{2})^{k-4}\frac{k}{16}$，$k=1,2,3,4,\cdots,n.$

由此可知 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kk}=\sum\limits_{k=1}^{n}k(\frac{1}{2})^k.$

记 $s=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kk}$，则

$$\frac{s}{2}=\sum_{k=1}^{n}k(\frac{1}{2})^{k+1}=\sum_{k=2}^{n}(k-1)(\frac{1}{2})^k+n(\frac{1}{2})^{n+1},$$

从而 $\frac{s}{2}=s-\frac{s}{2}=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=2}^{n}(\frac{1}{2})^k-n(\frac{1}{2})^{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}.$

于是 $s=2-\frac{n+2}{2^n}.$

例 5 （加拿大国家集训队训练题）对所有正整数 n，证明：

$$1!\ (2n-1)!\ -2!\ (2n-2)!\ +\cdots-(2n-2)!\ 2!\ +(2n-1)!\ 1!\ =\frac{(2n)!}{n+1}.$$

证明 本题相当于证明

$$\frac{1}{C_{2n}^{1}}-\frac{1}{C_{2n}^{2}}+\cdots-\frac{1}{C_{2n}^{2n-2}}+\frac{1}{C_{2n}^{2n-1}}=\frac{1}{n+1}. \qquad ①$$

因为等式 $\frac{1}{C_{2n+1}^{k}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}=\frac{2n-k+1}{(2n+1)C_{2n}^{k}}+\frac{k+1}{(2n+1)C_{2n}^{k}}=\frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{1}{C_{2n}^{k}}$，

所以①式左边为

$$\frac{2n+1}{2n+2}[(\frac{1}{C_{2n+1}^{1}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{2}})-(\frac{1}{C_{2n+1}^{2}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{3}})+\cdots-(\frac{1}{C_{2n+1}^{2n-2}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{2n-1}})+(\frac{1}{C_{2n+1}^{2n-1}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{2n}})]$$

$=\frac{2n+1}{2n+2}(\frac{1}{C_{2n+1}^{1}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{2n}})$

$=\frac{1}{n+1}.$

例 6 (1989 年第 18 届美国数学奥林匹克题)对每个正整数 n,令

$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$,

$T_n=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n$,

$U_n=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{3}T_2+\frac{1}{4}T_3+\cdots+\frac{1}{n+1}T_n.$

试求整数 $0<a,b,c,d<1000000$,使

$T_{1988}=aS_{1989}-b$,

$U_{1988}=cS_{1989}-d.$

并证明你的结果.

解 由已知

$$\begin{aligned}T_n&=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n\\&=1+(1+\frac{1}{2})+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+\cdots+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})\\&=n+\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{3}(n-2)+\cdots+\frac{1}{n}[n-(n-1)]\\&=n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})-[(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{3})+\cdots+(1-\frac{1}{n})]\\&=nS_n-[(n-1)-(S_n-1)]\\&=(n+1)S_n-n\\&=(n+1)S_{n+1}-(n+1),\end{aligned}$$

故 $T_n=(n+1)S_n-n=(n+1)S_{n+1}-(n+1).$

令 $n=1988$,则得

$T_{1988}=1989S_{1989}-1989.$

因此,$a=1989$,$b=1989$.

又 $$\begin{aligned}U_n&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}T_i=\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i}T_{i-1}\\&=\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i}(iS_i-i)=\sum_{i=2}^{n+1}(S_i-1)\\&=\sum_{i=1}^{n+1}(S_i-1)=T_{n+1}-(n+1)\\&=(n+2)S_{n+1}-(n+1)-(n+1)\\&=(n+2)S_{n+1}-2(n+1),\end{aligned}$$

故 $U_n=(n+2)S_{n+1}-2(n+1).$

令 $n=1988$,得

$U_{1988}=1990S_{1989}-3978$,

因此,$c=1990$,$d=3978$.

例 7 (1998 年 IMO 中国国家队选拔赛题)自然数 $n\geqslant3$. 平面上给定一条直线 l,在 l 上依次有 n

个互不相同的点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$. 记点 p_1 到其余 $n-1$ 个点的距离的乘积为 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$. 平面上还有一点 Q 不在 l 上，点 Q 到点 P_i 的距离记为 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$. 求以下和式的值.

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\frac{c_i^2}{d_i}.$$

解 不妨设这 n 个点在实轴上，有坐标 $P_i(x_i,0)(i=1,2,\cdots,n)$，$x_1<x_2<\cdots<x_n$，$Q$ 点有坐标 (α,β). 于是

$$(-1)^{n-i}d_i=(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n),$$

$$c_i^2=(\alpha-x_i)^2+\beta^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha x_i+x_i^2,$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha x_i+x_i^2}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \quad ①$$

令 $$T_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \quad ②$$

其中 $k=0,1,2$.

设部分分式

$$\frac{x^k}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{x-x_i}, \quad ③$$

这里 $k<n$，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为常数.

用 $x-x_j$ 乘式③两端，再令 $x=x_j$，可得

$$\frac{x_j^k}{(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}=A_j(j=1,2,\cdots,n) \quad ④$$

代入②，得 $T_k=\sum_{j=1}^{n}A_j$.

用 x 乘式③两端，得

$$\frac{x^{k+1}}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_ix}{x-x_i}.$$

令 $x\to+\infty$，则

上式左端$\to\begin{cases}1, & k+1=n\text{ 时},\\0, & k+1<n\text{ 时},\end{cases}$

上式右端$\to\sum_{i=1}^{n}A_i$.

所以，$\sum_{i=1}^{n}A_i=\begin{cases}0, & k<n-1\text{ 时},\\1, & k=n-1\text{ 时}.\end{cases}$

代入④，得

$$T_0=T_1=0,T_2=\begin{cases}1, & n=3\text{ 时},\\0, & n>3\text{ 时}.\end{cases}$$

代入①，得

$$S_n=(\alpha^2+\beta^2)T_0-2\alpha T_1+T_2=T_2=\begin{cases}1,n=3\text{ 时},\\0,n>3\text{ 时}.\end{cases}$$

2. 进行代换

例 8 (2004 年全国高中联赛题)数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，满足关系式 $(3-a_{n+1})(6+a_n)=18$，

且 $a_0=3$，则 $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=$________.

解 填 $\frac{1}{3}(2^{n+2}-n-3)$. 理由：

设 $b_n=\frac{1}{a_n}, n=0,1,2,\cdots$.

由题设得 $3b_{n+1}-6b_n-1=0$. 所以，

$b_{n+1}+\frac{1}{3}=2(b_n+\frac{1}{3})$.

故数列 $\{b_n+\frac{1}{3}\}$ 是公比为 2 的等比数列.

$b_n+\frac{1}{3}=2^n(b_0+\frac{1}{3})=2^n(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{3})=\frac{1}{3}\times 2^{n+1}$,

即 $b_n=\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)$.

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=\sum_{i=0}^{n}b_i=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{3}(2^{i+1}-1)=\frac{1}{3}\left[\frac{2(2^{n+1}-1)}{2-1}-(n+1)\right]=\frac{1}{3}(2^{n+2}-n-3).$$

例 9 （1976 年波兰数学奥林匹克题）求数字 a,b,c，使对任何自然数 n 有等式

$$\overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n个}\ \underbrace{bb\cdots b}_{n个}}+1=(\overline{\underbrace{cc\cdots c}_{n个}}+1)^2.$$

解 设 $p_n=\underbrace{11\cdots 1}_{n个}$，则 $p_n=\frac{10^n-1}{9}$，或者 $10^n=9p_n+1$. 数 $\overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n个}\ \underbrace{bb\cdots b}_{n个}}$ 及 $(\overline{\underbrace{cc\cdots c}_{n个}}+1)^2$ 可以用 p_n 表示为：

$$\overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n个}\ \underbrace{bb\cdots b}_{n个}}=\overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n个}}\cdot 10^n+\overline{\underbrace{bb\cdots b}_{n个}}=ap_n\cdot 10^n+bp_n=ap_n(9p_n+1)+bp_n,$$

$$(\overline{\underbrace{cc\cdots c}_{n个}}+1)^2=(cp_n+1)^2=c^2p_n^2+2cp_n+1.$$

因此题设条件中的等式可写成

$9\cdot ap_n^2+(a+b)p_n+1=c^2p_n^2+2cp_n+1$,

或者 $9ap_n+(a+b)=c^2p_n+2c$. ①

①式对任意的 n 均成立. 据多项式恒等的充要条件得知

$9a=c^2, a+b=2c$. ②

由 $9a=c^2$ 知 $3|c$，所以 c 可取 0,3,6,9，从而求出对应的 a,b 值，得到方程组②的下列解：

$a=0,b=0,c=0$；$a=1,b=5,c=3$；

$a=4,b=8,c=6$；$a=9,b=9,c=9$.

例 10 （1988 年第 14 届全俄数学奥林匹克题）设

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{m}{n},$$

其中 m 和 n 是互质的自然数，而等式左边含有 1988 条分数线，试计算 m^2+mn-n^2 的值.

解 设上述含有 k 条分数线的繁分数的值为 $\frac{m_k}{n_k}$（m_k、n_k 为互质的自然数），则

$$\frac{m_{k+1}}{n_{k+1}}=\frac{1}{1+\frac{m_k}{n_k}}=\frac{n_k}{m_k+n_k}.$$

注意到 $\frac{m_1}{n_1}=\frac{1}{1}, m_1=1, n_1=1;$

$\frac{m_2}{n_2}=\frac{n_1}{m_1+n_1}=\frac{1}{2}, m_2=1, n_2=2;$

$\frac{m_3}{n_3}=\frac{n_2}{m_2+n_2}=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3},$

$m_3=2, n_3=3;$

……

所以 $\frac{m_k}{n_k}=\frac{n_{k-1}}{m_{k-1}+n_{k-1}}=\frac{F_k}{F_{k+1}},$

其中 F_k 是斐波那契数列的第 k 项,即 $F_1=1, F_2=1, F_{k+2}=F_{k+1}+F_k(k=1,2,\cdots)$

于是 m^2+mn-n^2

$=F_{1988}^2+F_{1988}F_{1989}-F_{1989}^2$

$=F_{1988}^2+F_{1988}(F_{1988}+F_{1987})-F_{1987}^2-2F_{1988}F_{1987}-F_{1988}^2$

$=-[F_{1987}^2+F_{1987}F_{1988}-F_{1988}^2]$

$=F_{1986}^2+F_{1986}F_{1987}-F_{1987}^2$

$=\cdots\cdots$

$=F_2^2+F_2F_3+F_3^2$

$=1^2+1\times2-2^2$

$=-1.$

例 11 (1993 年第 6 届爱尔兰数学奥林匹克题)x 满足 $0<x<\pi$,证明:对于所有的自然数 n,

$$\sin x+\frac{\sin3x}{3}+\frac{\sin5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

的值为正数.

解 令 $f(x)=\sin x+\frac{\sin3x}{3}+\frac{\sin5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

利用 $2\sin x\sin(2k-1)x=\cos(2k-2)x-\cos2kx$,得

$$2f(x)\sin x=1-\cos2x+\frac{\cos2x-\cos4x}{3}+\frac{\cos4x-\cos6x}{5}+\cdots+\frac{\cos(2n-2)x-\cos2nx}{2n-1}$$

$$=1-(1-\frac{1}{3})\cos2x-(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})\cos4x-(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})\cos6x-\cdots-(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1})\cdot\cos(2n-2)-\frac{\cos2nx}{2n-1}$$

$$\geqslant1-[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1})+\frac{1}{2n-1}]$$

$$=0.$$

若等号成立,则有 $\cos2kx=1,(k=1,2,\cdots,n)$但因 $0<x<\pi$,故 $\cos2x\neq1$.

于是得 $f(x)\sin x>0.$

又因 $\sin x>0,$

所以 $f(x)>0$.

例 12 (1990 年第 31 届国际数学奥林匹克预选题)设 $f(0)=f(1)=0$,及

$f(v+2)=4^{v+2}f(v+1)-16^{v+1}f(v)+v2^{v^2}$ $(v=0,1,2,\cdots)$.

求证:$f(1989)$,$f(1990)$,$f(1991)$均能被 13 整除.

解 令 $f(v)=g(v)2^{v^2}$,所给递推关系就变为

$$g(v+2)-2g(v+1)+g(v)=v16^{-v-1},$$

从 0 到 $v-1$ 对上式求和,我们得到

$$g(v+1)-g(v)=\frac{1}{15^2}[1-(15v+1)\cdot 16^{-v}].$$

再求一次和(从 0 到 $v-1$),得

$$g(v)=\frac{1}{15^3}[15v-32+(15v+2)16^{-v+1}],$$

从而 $f(v)=\frac{1}{15^3}[15v+2+(15v-32)16^{v-1}]2^{(v-2)^2}$ $(v=0,1,2,\cdots)$.

以 13 为模,得

$$15v+2+(15v-32)16^{v-1}\equiv 2v+2+(2v-6)3^{v-1}\equiv 2(v+1+(v-3)3^{v-1})(\text{mod}13).$$

由于

$$1990\equiv 1(\text{mod}13),3^3\equiv 1(\text{mod}13),$$

因此,对于 $v=1989,1990,1991$ 有

$$f(v)\equiv 0(\text{mod}13).$$

3. 引入辅助命题

例 13 (1968 年第 10 届国际数学奥林匹克题)设$[x]$表示不超过 x 的最大整数.试对任意正整数 n,计算$\sum\limits_{k=0}^{\infty}[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]$.

解 首先证明:对一切实数 x,有等式

$$[x+\frac{1}{2}]=[2x]-[x]. \quad ①$$

事实上,设 $x=[x]+\alpha$,则 $0\leqslant\alpha<1$,

于是 $[x+\frac{1}{2}]=[[x]+\alpha+\frac{1}{2}]=[x]+[\alpha+\frac{1}{2}]$,

$[2x]-[x]=[2[x]+2\alpha]-[[x]+\alpha]=[x]+[2\alpha]-[\alpha]$.

从而①式等价于

$$[\alpha+\frac{1}{2}]=[2\alpha]-[\alpha], \quad ②$$

其中 $0\leqslant\alpha<1$.

当 $0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$时,此式左右两端均为 0,而当$\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1$ 时,此式左右两端均为 1.因此②式成立,从而①式也成立.

由①式可知,$[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]=[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}]=[2\cdot\frac{n}{2^{k+1}}]-[\frac{n}{2^{k+1}}]=[\frac{n}{2^k}]-[\frac{n}{2^{k+1}}]$.

于是，$\sum_{k=0}^{\infty}[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]=([n]-[\frac{n}{2}])+([\frac{n}{2}]-[\frac{n}{2^2}])+\cdots$.

因为对固定的自然数 n，当 k 适当大之后，就有 $n<2^k$，$[\frac{n}{2^k}]=0$，所以上式 $\sum_{k=0}^{\infty}[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]=[n]=n$.

例 14 （1977 年第 19 届 IMO 试题）设 $f(n)$ 是定义在自然数集上的函数，并且所取得的函数值也在自然数集中. 试证：如果对于每一个自然数，$f(n+1)>f[f(n)]$，那么 $f(n)=n$ 对于每一个 n 值都成立.

证明 我们先来证明，若 $m\geqslant n$，则 $f(m)\geqslant n$.

事实上，$n=1$ 时，对于任意自然数 m，都有 $f(m)\geqslant 1$，故结论成立.

设 $n=k$ 时结论成立，即若 $m\geqslant k$，则 $f(m)\geqslant k$.

当 $n=k+1$ 时，由 $m\geqslant n$ 得 $m\geqslant k+1$，从而 $m-1\geqslant k$. 根据归纳假设，得 $f(m-1)\geqslant k$. 再根据归纳假设，又得 $f(f(m-1))\geqslant k$. 于是由已知条件，得

$$f(m)>f(f(m-1))\geqslant k,$$

故 $f(m)\geqslant k+1$，即 $n=k+1$ 时，结论也成立.

根据数学归纳原理，对于任意自然数 n，结论都成立. 特别地，取 $m=n$，得

$$f(n)\geqslant n, \quad ①$$

由①得 $f(f(n))\geqslant f(n)$， ②

由已知 $f(n+1)>f(f(n))$， ③

由②、③得 $f(n+1)>f(n)$. ④

这表明函数 f 是严格递增函数，因而由③可得

$$n+1>f(n). \quad ⑤$$

由①、⑤得 $f(n)=n$.

例 15 （1978 年第 20 届国际数学奥林匹克题）全体正整数的集合可以分成两个互不相交的正整数子集 $\{f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots\}$，$\{g(1),g(2),\cdots,g(n),\cdots\}$，

式中 $f(1)<f(2)<\cdots<f(n)<\cdots$，

$g(1)<g(2)<\cdots<g(n)<\cdots$，

且有 $g(n)=f(f(n))+1(n\geqslant 1)$.

求：$f(240)$.

解 我们先来证明以下三个等式：

$$g(n)=f(n)+n, \quad ①$$

$$f(f(n))=f(n)+n-1, \quad ②$$

$$f(f(n)+1)=f(n)+n+1. \quad ③$$

事实上，假设 $f(n)=k$，则 $g(n)=f(k)+1$，于是两个互不相交的集合

$\{f(1),f(2),f(3),\cdots,f(k)\}$ 和 $\{g(1),g(2),g(3),\cdots,g(n)\}$

中包含所有从 1 到 $g(n)$ 的自然数. 计算一下这两个集合中元素的个数就可以得到

$$g(n)=k+n,$$

即 $g(n)=f(n)+n$.

故①式成立.

又由 $k+n=g(n)=f(k)+1$ 得

$f(k)=k+n-1$,

即 $f(f(n))=f(n)+n-1$,

故②式成立.

令 $F=\{f(n)\}, G=\{g(n)\}, n=1,2,3,\cdots$ 由等式

$g(n)-1=f(f(n))$

可知,$g(n)-1$ 是 F 的元素.因此不可能有两个连续的整数都是 G 的元素.

又因为 $k+n$ 是 G 的元素,所以 $k+n-1$ 和 $k+n+1$ 都是 F 的元素,并且是 F 的两个相邻的元素.由②可知

$f(f(n)+1)=k+n+1$,

即 $f(f(n)+1)=f(n)+n+1$.

故③式成立.

下面,我们利用①、②、③三个式子,来逐步求出 $f(240)$.

事实上,由 $g(1)=f(f(1))+1>1$ 得 $f(1)=1$,从而得 $g(1)=2$.

由③得 $f(2)=f(f(1)+1)=f(1)+1+1=3$.

由②得 $f(3)=f(f(2))=f(2)+2-1=4$,

$f(4)=f(f(3))=f(3)+3-1=6$,

$f(6)=f(f(4))=f(4)+4-1=9$,

$f(9)=f(f(6))=f(6)+6-1=14$,

$f(14)=f(f(9))=f(9)+9-1=22$,

$f(22)=f(f(14))=f(14)+14-1=35$,

$f(35)=f(f(22))=f(22)+22-1=56$,

$f(56)=f(f(35))=f(35)+35-1=90$.

由③得 $f(91)=f(f(56)+1)=f(56)+56+1=147$,

$f(148)=f(f(91)+1)=f(91)+91+1=239$,

$f(240)=f(f(148)+1)=f(148)+148+1=388$.

4. 从多个方面考虑

例16 设 S_n 和 T_n 分别为两个等差数列的前 n 项和,如果所有的 n,有 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+1}{4n+27}$,则第一个数列与第二个数列的第11项的比是( ).

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{78}{71}$

解 选A.理由:设前 n 项和为 S_n、T_n 的数列的首项、公差分别为 $a_1,a_2;d_1,d_2$,且 u_n,t_n 为两数列通项.则

$S_n=n(a_1+\frac{n-1}{2}d_1), T_n=n(a_2+\frac{n-1}{2}d_2)$.

从而 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2}=\frac{7n+1}{4n+27}$.

另一方面,$\frac{u_{11}}{t_{11}}=\frac{a_1+10d_1}{a_2+10d_2}=\frac{2a_1+20d_1}{2a_2+20d_2}$.

与上式比较可发现,$n=21$ 时恰好为后一式.

所以 $\dfrac{u_{11}}{t_{11}}=\dfrac{7\cdot 21+1}{4\cdot 21+27}=\dfrac{148}{111}=\dfrac{4}{3}$.

例 17 (1987 年新加坡数学竞赛题)证明或说明不正确:存在素数 a,b,c,d,且 $a<b<c<d$,满足:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

解 假定结论正确,则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Rightarrow\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\Rightarrow cd(b-a)=ab(d-c),$$

故 b 整除 $cd(b-a)$.

另一方面,因为 b,c,d 是互不相等的素数,故 b 不能整除 cd,又不能整除 $b-a$,从而 b 不能整除 $cd(b-a)$,这就导致矛盾.故结论不正确.

例 18 (1987 年第 19 届加拿大数学奥林匹克题)对每一正整数 n,证明:

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}].$$

这里$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

证明 设 x 为正整数,且 $x^2>4n+1$.

若 x 为偶数,则 $x^2=4m>4n+1$,

因而 $m\geqslant n+1$,

$$x^2=4m\geqslant 4n+4>4n+3.$$

若 x 为奇数,则 $x^2=4m+1>4n+1$,

因而 $m\geqslant n+1,x^2\geqslant 4n+5$.

同样有 $x^2>4n+3$.

特别地,取 $x=[\sqrt{4n+1}]+1$,则有

$$[\sqrt{4n+1}]+1>\sqrt{4n+3}>\sqrt{4n+1}\geqslant[\sqrt{4n+1}],$$

从而 $[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}]$.

另一方面,

$$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}>2n+1+2n=4n+1,$$

$$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2<2n+1+2(n+1),$$

所以 $[\sqrt{4n+1}]\leqslant[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\leqslant[\sqrt{4n+3}]$.

于是有

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}].$$

例 19 (第 31 届 IMO 预选题)对于给定的正整数 k,定义 $f_1(k)$为 k 的数字和的平方,并令

$$f_{n+1}(k)=f_1(f_n(k)),$$

求:$f_{1991}(2^{1990})$的值.

解 首先注意对大的 k 值,$f_1(k)$远小于 k.由于 f_1 不单调,我们将这个事实表达成如下的形式:

若 $A\leqslant B$,则 A 的位数$\leqslant B$ 的位数$\leqslant 1+\lg B$,

$$f_1(A)<(9\times(1+\lg B))^2<(4\log_2 16B)^2.$$

利用这个不等式两次,我们得到 $f_2(2^{1990})$的估计:

$f_1(2^{1990})<4^2\times(1994)^2<2^{26}$,

$f_2(2^{1990})<(4\times30)^2=14400$.

所以 $f_2(2^{1990})$的数字和最多是 36($=4\times9$),因此

$f_3(2^{1990})\leqslant36^2=1296$,

$f_4(2^{1990})<(9+9+9)^2=729$,

$f_5(2^{1990})<(6+9+9)^2=576$.

另一方面,因为

$f_1(k)\equiv k^2(\bmod 9)$,

所以

$f_1(2^{1990})\equiv(2^{1990})^2\equiv(-2)^2\equiv4(\bmod 9)$,

$f_2(2^{1990})\equiv4^2\equiv-2(\bmod 9)$,

$f_3(2^{1990})\equiv(-2)^2\equiv4(\bmod 9)$,

……

所以当 n 为奇数时,$f_n(2^{1990})\equiv4(\bmod 9)$.

当 n 为偶数时,$f_n(2^{1990})\equiv-2(\bmod 9)$.

若 $x^2\equiv4(\bmod 9)$且 $x\leqslant24$,则 $x^2\in H=\{4,49,121,256,400\}$,

通过简单计算即知(对每一个 $h\in H$),

$f_3(h)=f_5(h)=f_7(h)=\cdots=169$,

$f_4(h)=f_6(h)=f_8(h)=\cdots=256$.

由于 $f_5(2^{1990})\in H$,所以当 $n\geqslant8$ 时,

$$f_n(2^{1990})=\begin{cases}169,若 n 是偶数;\\256,若 n 是奇数.\end{cases}$$

从而 $f_{1991}(2^{1990})=256$.

5. 注意数学归纳法、反证法等方法的运用

例 20 (1996 年第 58 届莫斯科奥林匹克题)整数 a,b,c 使得

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}与\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$$

均为整数,证明:$|a|=|b|=|c|$.

证明 如果$(a,b,c)=d\neq1$,那么可以转而讨论$\frac{a}{d},\frac{b}{d},\frac{c}{d}$. 因此不妨设$(a,b,c)=1$.

如果结论不真,那么$|a|,|b|,|c|$中至少有一个不等于 1. 不妨设$|a|\neq1$.

设 p 是a 的一个质因数. 则

$$abc\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)=a^2c+b^2a+c^2b$$

可被 p 整除. 因此 c^2b 可被 p 整除,从而 c 或b 可被 p 整除. 不妨设 b 可被 p 整除. 于是 c 不能被 p 整除.

设 p^r 是可整除a 的 p 的最高方幂,p^s 是可整除b 的 p 的最高方幂. 不妨设 $r\leqslant s$. 于是

$$abc\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)=a^2b+c^2a+b^2c$$

可被 p^{r+s} 整除.注意到 a^2b 和 b^2c 都可被 p^{r+s} 整除,因此 c^2a 也可被 p^{r+s} 整除,从而 a 可被 p^{r+s} 整除,矛盾.

故结论成立,且 $|a|=|b|=|c|=1$.

例 21 (1977 年第 11 届全苏数学奥林匹克题)给定自然数 x_1、x_2、…、x_n 以及 y_1、y_2、…、y_m,两个和 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 以及 $y_1+y_2+\cdots+y_m$ 彼此相等且小于 mn. 证明:在等式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_m$ 中可以删去一部分加数,使剩下的部分仍然是等式.

证明 对 $m+n$ 进行归纳.

当 $m+n=4$ 时,$m=2$,$n=2$.我们记 $S=x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_m$,由 $S\geqslant m$,得 $S\geqslant 2$.又由 $S<mn$,得 $S<4$,故 $2\leqslant S\leqslant 3$.容易验证,$S=2$ 或 $S=3$ 时,命题成立.

设 $m+n=k$ 时,命题成立,则当 $m+n=k+1$ 时,我们不妨设 x_1 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最大值,y_1 是 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 中的最大值.

若 $x_1=y_1$,则命题显然成立.

若 $x>y_1$,则令 $x'=x_1-y_1$,

$S'=(x_1-y_1)+x_2+\cdots+x_n=y_2+\cdots+y_m$,

从而有

$S'=x'_1+x_2+\cdots+x_n=y_2+\cdots+y_m$.

由于 $y_1\geqslant\frac{S}{m}$,因此

$$S'=S-y_1\leqslant S-\frac{S}{m}=S\cdot\frac{m-1}{m}<m\cdot n\cdot\frac{m-1}{m}=n(m-1).$$

根据归纳假设,等式

$x'_1+x_2+\cdots+x_n=y_2+\cdots+y_m$

中可以删去部分项,重新得到正确的等式,于是等式

$x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_m$

中必可删去部分项,重新得到正确的等式.

若 $x_1<y_1$,同理可证.

这就是说,$m+n=k+1$ 时,命题也成立.

根据数学归纳原理,原命题成立.

【解题尝试】

A 组

1. 设 $a_0=0,a_1=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n=0,1,2,\cdots)$.又设 $x_1\in\mathbf{R}$,$x_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}\cdot x_1}{a_n+a_{n-1}\cdot x_1}(n=2,3,\cdots)$.若 $x_{2004}=\frac{1}{x_1}-1$,求 x_1.

2. 已知 x,y,z 为正实数,且 $x+y+z=1$.若 $\frac{a}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-2$,求实数 a 的取值范围.

3. 已知对每一对实数 x,y,函数 f 满足 $f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$.若 $f(1)=1$,则满足 $f(n)=$

$n(n\in\mathbf{Z})$的整数 n 的个数是多少？

4. (1994 年第 12 届美国数学邀请赛题)对任意的实数 x，函数 $f(x)$ 具有性质
$f(x)+f(x-1)=x^2$.
如果 $f(19)=94$，那么，$f(94)$ 除以 1000 的余数是多少？

5. (1995 年第 21 届俄罗斯数学奥林匹克决赛题)我们用(m,n)表示自然数 m 与 n 的最大公约数. 今知在以自然数为项的数列$\{a_i\}$中，对任何 $i\neq j$，都有$(a_i,a_j)=(i,j)$. 证明对一切 $i\in\mathbf{N}$，都有 $a_i=i$.

6. (1988 年四川省高中数学竞赛题)设正整数列$\{a_n\}$满足
$a_{n+3}=a_{n+2}(a_{n+1}+2a_n)$，$n=1,2,\cdots$
且 $a_6=2288$. 求 a_1,a_2,a_3.

7. (1994 年第 20 届俄罗斯数学奥林匹克决赛题)证明：如果
$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$，
则 $x+y=0$.

8. (1994 年第 20 届俄罗斯数学奥林匹克决定题)证明恒等式：
$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)}+\cdots+\frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)}=\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)}+\cdots+\frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}.$$

9. (1990 年匈牙利数学奥林匹克题)证明：若$\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}=\frac{z}{t+x+y}=\frac{t}{x+y+z}$，则$\frac{x+y}{z+t}+\frac{y+z}{t+x}+\frac{z+t}{x+y}+\frac{t+x}{y+z}$为整数.

10. (1994 年河北省高中竞赛题)已知数列$\{a_n\}$$(n=1,2,\cdots)$中，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=6$，且当 $n>3$ 时，
$a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}-2a_{n-3}$.
试证：对 $n>3$ 的一切自然数有 $a_n>3\times 2^{n-2}$.

11. (1994 年第 20 届俄罗斯数学奥林匹克决赛题)给定自然数序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 其中 a_1 不能被 5 整除，并且对于每个自然数 n，都有等式
$a_{n+1}=a_n+b_n$.
其中 b_n 是 a_n 的末位数. 证明：该序列中有无限多项是 2 的方幂.

12. (加拿大国家集训队训练题)
(1)证明：当且仅当$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{c+a}$时，$2b^2=a^2+c^2$.
(2)化简$\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$.
(3)设 a,b,p,q,r,s 为正整数，满足 $qr-ps=1$，$\frac{p}{q}<\frac{a}{b}<\frac{r}{s}$. 证明 $b\geqslant q+s$.

B 组

1. (1973 年第 5 届加拿大数学奥林匹克题)对每个正整数 n，设 $h(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. 例如 $h(1)=1$，$h(2)=1+\frac{1}{2}$，$h(3)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$，对 $n\geqslant 2$，证明：
$n+h(1)+h(2)+\cdots+h(n-1)=nh(n)$.

2. (1973 年第 5 届加拿大数学奥林匹克题)观察

$\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2};\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6};\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2};\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}.$

由这些例子的启发,叙述一般规律,并加以证明:对任何大于 1 的整数 n,证明存在整数 i 和 j,使得

$\frac{1}{n}=\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\frac{1}{(i+2)(i+3)}+\cdots+\frac{1}{j(j+1)}.$

3. (1991 年前苏联教育部推荐试题)设数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$满足

$a_0=a_1=11,a_{m+n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})-(m-n)^2,m,n\geqslant 0.$ 求 a_{45}.

4. (1989 年第 21 届加拿大数学奥林匹克题)已知数 $1,2,2^2,\cdots,2^{n-1}$ 对于它们的任一排列 $\sigma=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,定义 $S_1(\sigma)=x_1,S_2(\sigma)=x_1+x_2,S_3(\sigma)=x_1+x_2+x_3,\cdots,S_n(\sigma)=x_1+x_2+\cdots+x_n$,并令 $Q(\sigma)=S_1(\sigma)\cdot S_2(\sigma)\cdot\cdots\cdot S_n(\sigma)$,试求$\sum\frac{1}{Q(\sigma)}$(和式取遍所有的排列).

5. (1996 年北京市中学生数学竞赛题)函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{N}$ 上,在 $\mathbf{N}$ 中取值的严格增函数(如果任意的 $x_1,x_2\in A$,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$是 A 上的严格增函数),并且满足条件 $f(f(k))=3k$. 试求:$f(1)+f(9)+f(96)$之值.

6. (1993 年第 3 届澳门数学奥林匹克题)正数数列$\{a_n\}$满足

$a_1=a_2=1,a_3=997,a_{n+3}=\frac{1993+a_{n+2}\cdot a_{n+1}}{a_n},n\in\mathbf{N}.$

试证所有 a_n 均为整数.

7. (1994 年安徽省合肥市高中数学竞赛题)设 $a_1,a_2,\cdots$与 $b_1,b_2,\cdots$是两个等差数列,它们的前 n 项之和分别为 A_n 与 B_n. 已知对一切 $n\in\mathbf{N}$,有

$\frac{A_n}{B_n}=\frac{2n-1}{3n+1}.$

试对一切 $n\in\mathbf{N}$,写出$\frac{a_n}{b_n}$的表达式.

8. (1996 年第 58 届莫斯科数学奥林匹克题)已知 $\sin\alpha$ 之值. 试问:(1)$\sin\frac{\alpha}{2}$,(2)$\sin\frac{\alpha}{3}$分别最多可能有几个不同的值?

9. (2002 年中国西部数学奥林匹克题)求所有的正整数 n,使得 $n^4-4n^3+22n^2-36n+18$ 是一个完全平方数.

第12章　方程问题的求解思路

【学习目标】

数学竞赛中的方程问题既包括求未知元、求未知函数的问题，也包括探讨未知元、未知函数的性质的问题. 方程的形式既可以是一元未知数的，也可以是多元未知数的；既可以是代数方程，也可以是超越方程、函数方程；既可以是单一方程，也可以是方程组，等等. 解题中既要注意到方程的同解理论，又要注意到处理各种方程的特殊思路.

【解题钥匙】

1. 根据方程根的特定性质探求

例1　(2003年上海市竞赛题)已知 a、b 为实数，i为虚数单位，且关于 z 的二次方程

$$4z^2+(2a+\mathrm{i})z-8b(9a+4)-2(a+2b)\mathrm{i}=0$$

至少有一个实根. 求这个实根的最大值.

解　设 x 为已知二次方程的实根，则

$$4x^2+2ax-8b(9a+4)+[x-2(a+2b)]\mathrm{i}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+2ax-8b(9a+4)=0,\\x-2(a+2b)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5a^2+16(b-\frac{1}{4})^2=1, & ①\\x=2(a+2b). & ②\end{cases}$$

由式①，可设 $a=\frac{1}{\sqrt5}\cos\theta,b=\frac{1}{4}\sin\theta+\frac{1}{4}$，代入式②得

$$x=2(\frac{1}{\sqrt5}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2})=\frac{3\sqrt5}{5}\sin(\theta+\alpha)+1,$$

这里 α 为锐角，且 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$.

因为 θ 可取遍实数，故 $x_{\max}=\frac{3\sqrt5}{5}+1$.

例2　(1994年罗马罗尼亚数学奥林匹克题) a,b,c,A,B,C 是6个正实数，使得方程 $ax^2-bx+c=0$ 和 $Ax^2-Bx+C=0$ 有实根. 求证在方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两实根之间的任一实数 u 与在方程 $Ax^2-Bx+C=0$ 的两实根之间的任一实数 v 有下述不等式：

$$(au+Av)(\frac{c}{u}+\frac{C}{v})\leqslant(\frac{b+B}{2})^2.$$

证明 由题设

$$au^2-bu+c\leqslant 0, \quad ①$$

$$Av^2-Bv+C\leqslant 0. \quad ②$$

由于 a,b,c,A,B,C 都是正实数,因此

$u>0, v>0$.

由①,②得

$$0<au+\frac{c}{u}\leqslant b,$$

和 $0<Av+\dfrac{C}{v}\leqslant B$,

将以上两个不等式相加,得

$$0<au+\frac{c}{u}+Av+\frac{C}{v}\leqslant b+B,$$

因此

$$(au+Av)\left(\frac{c}{u}+\frac{C}{v}\right)\leqslant\frac{1}{4}\left[(au+Av)+\left(\frac{c}{u}+\frac{C}{v}\right)\right]^2\leqslant\left(\frac{b+B}{2}\right)^2.$$

例 3 (1994 年保加利亚数学奥林匹克题)$a,b,c\in\mathbf{R}$,已知方程

$$ax^2+bx+c=0$$

有两个实根,如果

$$|a(b-c)|>|b^2-ac|+|c^2-ab|,$$

求证该方程在区间$(0,2)$内至少有一个根.

证明 因为给定方程有两个实根,所以 $a\neq 0$.

因为用$-a,-b,-c$ 为代替 a,b,c 时,题目所有的条件都不改变,所以只需在 $a>0$ 的情况下,证明本题即可.

由于

$$|(b^2-ac)-(c^2-ab)|\leqslant|b^2-ac|+|c^2-ab|<|a(b-c)|,$$

以及

$$b^2-ac-(c^2-ab)=(b-c)(a+b+c),$$

因此

$$|b-c|\cdot|a+b+c|<a\cdot|b-c|.$$

由这个不等式显然可得

$b\neq c$,

且 $|a+b+c|<a$,

即 $-a<a+b+c<a$,

$-2a<b+c<0$.

记

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

则

$$f(0)+f(2)=2(2a+b+c)>0.$$

如果 $b<c$,则

$$(b^2-ac)+(c^2-ab)\leqslant|b^2-ac|+|c^2-ab|<|a(b-c)|=a(c-b),$$

于是有

$$b^2+c^2<2ac.$$

又由于 $f(x)=0$ 有两个实根,因此判别式

$$b^2-4ac\geqslant 0.$$

故得

$$b^2\geqslant 4ac>2(b^2+c^2),$$

$$0>b^2+2c^2,$$

矛盾.所以 $b>c$.又因上面已经证得 $b+c<0$,所以 $c<0$,即 $f(0)<0$,再利用上面证得的结果

$$f(0)+f(2)>0,$$

可得

$$f(2)>0.$$

因此,在(0,2)内至少有方程 $f(x)=0$ 的一个根.

例 4 (1987 年中国数学奥林匹克题)设 n 为自然数,求证:方程

$$z^{n+1}-z^n-1=0$$

有模为 1 的复根的充分必要条件是 $n+2$ 可被 6 整除.

证明 设 ω 是方程

$$z^{n+1}-z^n-1=0$$

的一个模为 1 的复根,则

$$\omega^{n+1}-\omega^n-1=0,$$

$$\omega^n(\omega-1)=1,$$

$$|\omega|^n\cdot|\omega-1|=1.$$

因为 $|\omega|=1$,所以

$$|w-1|=1.$$

在复平面上,点 w 和 $w-1$ 都在单位圆上,而单位圆上满意 $|\omega-1|=1$ 的点 ω 只能是

$\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$(即图中的 ω_1 和 ω_2 点),而

$$\omega-1=\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3},$$

于是
$$1=\omega^n(\omega-1)$$
$$=\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\frac{n+2}{3}\pi\pm i\sin\frac{n+2}{3}\pi,$$

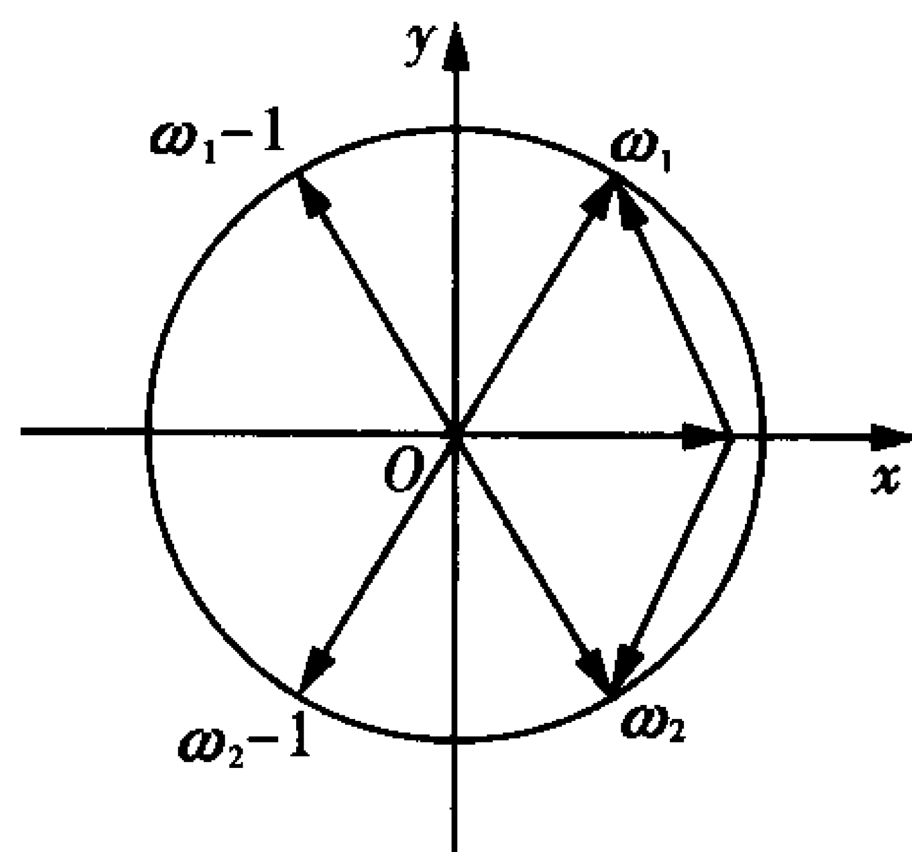


图 12-1

因此 $\frac{n+2}{3}\pi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

$$n+2=6k.$$

故 $n+2$ 可被 6 整除.

反过来,若 $n+2$ 可被 6 整除,我们可设

$n+2=6k(k\in\mathbf{Z})$.

取 $\omega=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$,

则 $\omega-1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$,于是

$$\omega^{n+1}-\omega^{n}-1=\omega^{n}(\omega-1)-1=(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})\cdot(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})-1$$

$$=(\cos\frac{n+2}{3}\pi+i\sin\frac{n+2}{3}\pi)-1=(\cos2k\pi+i\sin2k\pi)-1=0.$$

因此,ω 是方程 $z^{n+1}-z^{n}-1=0$ 的一个根,又因为 $|\omega|=1$,故方程 $z^{n+1}-z^{n}-1=0$ 有模为 1 的复根.

例 5 (1992 年中国数学奥林匹克题)设方程

$$x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{1}x+a_{0}=0$$

的系数都是实数且满足条件 $0<a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_{n-1}\leqslant1$. 已知 λ 为此方程的复根且 $|\lambda|\geqslant1$.

求证:$\lambda^{n+1}=1$.

证明 因 λ 为方程的根,故有

$$\lambda^{n}+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_{1}\lambda+a_{0}=0.$$

将上式两端同乘以 $\lambda-1$,得到

$$0=(\lambda-1)(\lambda^{n}+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_{1}\lambda+a_{0})$$

$$=\lambda^{n+1}+(a_{n-1}-1)\lambda^{n}+(a_{n-2}-a_{n-1})\lambda^{n-1}+\cdots+(a_{0}-a_{1})\lambda-a_{0},$$

由此可得

$$\lambda^{n+1}=(1-a_{n-1})\lambda^{n}+(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}+\cdots+(a_{1}-a_{0})\lambda+a_{0}, \quad ①$$

其中右端的系数都是非负数. 因此有

$$|\lambda|^{n+1}=|(1-a_{n-1})\lambda^{n}+(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}+\cdots+(a_{1}-a_{0})\lambda+a_{0}|$$

$$\leqslant(1-a_{n-1})|\lambda|^{n}+(a_{n-1}-a_{n-2})|\lambda|^{n-1}+\cdots+(a_{1}-a_{0})|\lambda|+a_{0}. \quad ②$$

由已知 $|\lambda|\geqslant1$,故由②式又有

$$|\lambda|^{n+1}\leqslant(1-a_{n-1})|\lambda|^{n}+(a_{n-1}-a_{n-2})|\lambda|^{n}+\cdots+(a_{1}-a_{0})|\lambda|^{n}+a_{0}|\lambda|^{n}=|\lambda|^{n}. \quad ③$$

由此即得 $|\lambda|\leqslant1$,从而得到 $|\lambda|=1$. 这样一来,不等式②,③都变为等式. 因而有如下的辐角关系:

$$\arg(1-a_{n-1})\lambda^{n}=\arg(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}=\cdots=\arg(a_{1}-a_{0})\lambda=\arg a_{0}=0,$$

这意味着

$$\begin{cases}(1-a_{n-1})\lambda^{n}\geqslant0,\\(a_{n-i}-a_{n-i-1})\lambda^{n-1}\geqslant0,i=1,2,\cdots,n-1.\end{cases} \quad ④$$

由④和②式得知

$$\lambda^{n+1}=(1-a_{n-1})\lambda^{n}+(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}+\cdots+(a_{1}-a_{0})\lambda+a_{0}\geqslant0.$$

从而有 $\lambda^{n+1}=|\lambda^{n+1}|=|\lambda|^{n+1}=1$.

2. 利用函数的性质

例 6 (2003 年湖南省竞赛题)满足 $2\sin^2x+\sin x-\sin2x=3\cos x$ 的锐角 $x=$______.

解 填 $\frac{\pi}{3}$. 理由:

因为 x 为锐角,则 $\cos x\neq0$,条件式两边同除以 $\cos x$ 得 $2\sin x\cdot\tan x+\tan x-2\sin x=3$,即 $(2\sin x+1)(\tan x-1)=2$.

因函数 $f(x)=(2\sin x+1)(\tan x-1)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内严格单调递增，且 $f(x)=2=f(\frac{\pi}{3})$，故 $x=\frac{\pi}{3}$.

例 7 （1995 年第 21 届俄罗斯数学奥林匹克决赛题）解方程 $\cos\cos\cos\cos x=\sin\sin\sin\sin x$.

解 本方程无解.

我们来证明，对一切 $x\in\mathbf{R}$，都有

$$\cos\cos\cos\cos x>\sin\sin\sin\sin x. \quad ①$$

事实上，若 $x\in[x,2\pi]$，则

$\cos\cos\cos\cos x>0$，$\sin\sin\sin\sin x\leqslant 0$，此时①式成立.

若 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则

$\cos x,\sin x,\cos\cos x,\sin\sin x,\cos\cos\cos x,\sin\sin\sin x$ 都属于闭区间$[0,1]$. 又因为

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$,

$(\sin x+\cos x)^2\leqslant 2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$,

$\sin x+\cos x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{2}$,

$0\leqslant\cos x<\frac{\pi}{2}-\sin x$,

所以 $\cos\cos x>\cos(\frac{\pi}{2}-\sin x)=\sin\sin x$, ①

$\sin\cos x<\sin(\frac{\pi}{2}-\sin x)=\cos\sin x.$ ②

由②得 $\cos\cos x<\cos\sin\sin x$,

于是有 $\cos\cos\cos x+\sin\sin\sin x<\cos(\sin\sin x)+\sin(\sin\sin x)<\frac{\pi}{2}$,

即 $\cos\cos\cos x<\frac{\pi}{2}-\sin\sin\sin x$,

由上式得

$$\cos\cos\cos\cos x>\cos(\frac{\pi}{2}-\sin\sin\sin x)=\sin\sin\sin\sin x.$$

此时①式成立.

若 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则令 $y=x-\frac{\pi}{2}$，从而 $y\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\cos\sin y\in(0,\frac{\pi}{2})$，由②式可得

$\cos\cos(\cos\sin y)>\sin\sin(\cos\sin y).$ ④

又由于函数

$f(t)=\sin\sin t,t\in(0,\frac{\pi}{2})$

是增函数，因此由③式可得

$\sin\sin(\cos\sin y)>\sin\sin(\sin\cos y)$, ⑤

由④和⑤得

$\cos\cos\cos\sin y>\sin\sin\sin\cos y$,

即 $\cos\cos\cos\sin(x-\frac{\pi}{2})>\sin\sin\sin\cos(x-\frac{\pi}{2})$,

故得 $\cos\cos\cos\cos\cos x > \sin\sin\sin\sin\sin x$,
此时①式也成立.

综上所述,当 $x\in[0,2\pi]$时,①式都成立. 再由周期性可知,对一切 $x\in\mathbf{R}$,①式都成立. 故原方程无解.

例 8 (1999 年河南省竞赛题)已知$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 则方程 $3^{2x}-[10\times 3^{x+1}]+\sqrt{3^{2x}-[10\times 3^{x+1}]+82}=-80$ 的解的个数为________.

解 填 2. 理由:

原方程可以化为

$3^{2x}-[10\times 3^{x+1}]+82+\sqrt{3^{2x}-[10\times 3^{x+1}]+82}-2=0$.

则$(\sqrt{3^{2x}-[10\times 3^{x+1}+82]}+2)\cdot(\sqrt{3^{2x}-[10\times 3^{x+1}]+82}-1)=0$.

即 $3^{2x}-[10\times 3^{x+1}]+81=0$.

只须 $3^{2x}-10\times 3^{x+1}+81\leqslant 0$,

即 $(3^x-3)(3^x-27)\leqslant 0\Rightarrow 3\leqslant 3^x\leqslant 27$.

从而 $1\leqslant x\leqslant 3$.

当 $x=1,3$ 时,为原方程的解;$x=2$ 时,原方程无解. 故原方程有 2 个解.

例 9 (2001 年中国西部数学奥林匹克题)求所有的实数 x,使得$[x^3]=4x+3$. 这里$[y]$表示不超过实数 y 的最大整数.

解 设 x 为满足条件的实数,则可设 $x=\frac{k}{4}(k\in\mathbf{Z})$,且$[\frac{k^3}{64}]=k+3$. 于是,$3\leqslant\frac{k^3}{64}<k-4$,即

$192\leqslant k(k-8)(k+8)<256$.

记 $f(k)=k(k-8)(k+8)$,则 k、$k-8$、$k+8$ 中恰有两个数都小于 0,或都大于 0,即

$-7\leqslant k\leqslant -1$ 或 $k\geqslant 9$.

又当 $k\geqslant 10$ 时,$f(k)\geqslant 10\times 2\times 18>256$,矛盾.

故 $k\in\{-7,-6,\cdots,-1,9\}$.

分别计算,可知满足①的 k 只有两个,即

$k=-4,-5$.

从而,$x=-\frac{5}{4}$或-1.

例 10 (1995 年第 21 届俄罗斯数学奥林匹克决赛题)已知 $f(x)$,$g(x)$和 $h(x)$都是二次三项式. 试问:方程 $f(g(h(x)))=0$ 的所有根能否恰为 1,2,3,4,5,6,7,8?

解 不可能.

事实上,如果 1,2,3,4,5,6,7,8 是方程 $f(g(h(x)))=0$ 的 8 个根,并且抛物线 $y=h(x)$的对称轴是 $x=a$,那么:

$h(x_1)=h(x_2)$当且仅当 $x_1+x_2=2a$.

由于方程 $f(g(x))=0$ 至多四个根,而 $h(1),h(2),\cdots,h(8)$都是它的根,因此必有

$h(1)=h(8),h(2)=h(7),h(3)=h(6),h(4)=h(5)$

且 $a=4.5$,

$h(1),h(2),h(3),h(4)$为单调数列.

又由于方程 $f(x)=0$ 至多有两个根,而 $g(h(1)),g(h(2)),g(h(3)),g(h(4))$都是它的根,因此

必有

$g(h(1))=g(h(4)),g(h(2))=g(h(3))$,

从而得

$h(1)+h(4)=h(2)+h(3)=2b$,

其中 $x=b$ 是抛物线 $y=g(x)$ 的对称轴.

令 $h(x)=Ax^2+Bx+C$,则

$h(1)+h(4)=A\cdot 17+B\cdot 5+C\cdot 2$,

$h(2)+h(3)=A\cdot 13+B\cdot 5+C\cdot 2$,

从而得

$17A+5B+2C=13A+5B+2C$,

$A=0$.

此与 $h(x)$ 是二次三项式矛盾.

因此,方程 $f(g(h(x)))=0$ 的所有根不可能恰为 1,2,3,4,5,6,7,8.

3. 利用不等式取等号的条件

利用"两边夹"方法,逼出方程的解是方程求解的一种思路.在求解含高斯函数[x]的方程时也用到了这种方法,这可参见例8、例9.在求解其他方程时也可这样考虑:利用几个重要不等式,如算术-几何均值不等式、柯西不等式等将方程的一部分(或一端)化成不等式,结合原方程把不等式化为等式,利用重要不等式取等号的条件,得到与原方程同解且比原方程简单的方程来求解,这是方程求解的不等式方法思路.

例 11 (1989年新加坡数学竞赛题)求出所有满足方程 $5(xy+yz+zx)=4xyz$ 的正整数 x,y,z.

解 原方程变形为

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}.$$

不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$,于是,我们有

$$\frac{3}{x}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5},$$

由此得 $x<4$.

又由 $\frac{1}{x}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$,得 $x>1$.

故 $1<x<4$.

下面分两种情况讨论:

情况1 当 $x=2$ 时,我们有

$$\frac{2}{y}\geqslant\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{10}.$$

由此得 $3<x<7$.

若 $y=4$,则 $z=20$;

若 $y=5$,则 $z=10$;

若 $y=6$,则 z 不是整数.

情况2 当 $x=3$ 时,依照情况1的讨论可得

$$\frac{2}{y}\geqslant\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\frac{7}{15},\text{且}\frac{1}{y}<\frac{7}{15}.$$

因此　$2<y<5$.

当 $y=3$ 或 $y=4$ 时，z 都没有整数解.

因此原方程的解共有 12 组：

$(2,4,20)$；$(2,20,4)$；$(4,2,20)$；$(20,2,4)$；

$(4,20,2)$；$(20,4,2)$；$(2,5,10)$；$(2,10,5)$；

$(5,2,10)$；$(10,2,5)$；$(5,10,2)$；$(10,5,2)$.

例 12　(1996 年第 28 届加拿大数学奥林匹克题)求出方程组

$$\begin{cases}\dfrac{4x^2}{1+4x^2}=y,\\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2}=z,\\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2}=x\end{cases}$$

的所有实数解，并证明你的解答是正确的.

解　若 $x=y$，则

$$\frac{4x^2}{1+4x^2}=x,$$

$$4x^2=x+4x^3,$$

$$x(4x^2-4x+1)=0,$$

$$x=0\text{ 或}\frac{1}{2},$$

从而得　$x=y=z=0$ 或 $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

若 $x>y$，则

$$\frac{4z^2}{1+4z^2}>\frac{4x^2}{1+4x^2},$$

$$1-\frac{1}{1+4z^2}>1-\frac{1}{1+4x^2}.$$

注意到由原方程可得 $x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$，因此由上式可得

$$z>x.$$

又由原方程组的轮换对称性可知，由 $z>x$ 可推得 $y>z$. 于是有

$$x>y>z>x,$$

矛盾.

若 $x<y$，则类似地可推出

$$x<y<z<x,$$

矛盾.

因此，原方程组仅有两组解：

$$(x,y,z)=(0,0,0)\text{和}(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

例 13 解方程 $x\sqrt{4-3x^2}+\sqrt{3}x\sqrt{4-x^2}=4$.

解 根据柯西不等式

$$(x\sqrt{4-3x^2}+\sqrt{3}x\sqrt{4-x^2})^2\leqslant[x^2+(\sqrt{4-x^2})^2]\cdot[(\sqrt{4-3x^2})^2+(\sqrt{3}x)^2],$$

而 $x\sqrt{4-3x^2}+\sqrt{3}x\sqrt{4-x^2}=4$,

故 $(x\sqrt{4-3x^2}+\sqrt{3}x\sqrt{4-x^2})^2$

$=[x^2+(\sqrt{4-x^2})^2]\cdot[(\sqrt{4-3x^2})^2+(\sqrt{3}x)^2]=16.$

又根据柯西不等式取等号的条件,有且仅有

$$\begin{cases}x=k\sqrt{4-3x^2},\\ \sqrt{4-x^2}=k\sqrt{3}x(k\text{ 为常数}).\end{cases}$$

将上式代入原方程,得

$k(\sqrt{4-3x^2})^2+k(\sqrt{3}x)^2=4$,

解得 $k=1$,

从而 $x=\sqrt{4-3x^2}\geqslant0$.

再解之取正值,得原方程的根是 $x=1$.

例 14 解方程 $x\sqrt{4-y^2}-y\sqrt{9-z^2}-z\sqrt{9-x^2}=11$.

解 根据柯西不等式

$(x\sqrt{4-y^2}-y\sqrt{9-z^2}-z\sqrt{9-x^2})^2$

$\leqslant[x^2+(-y)^2+(-z)^2]\cdot[(\sqrt{4-y^2})^2+(\sqrt{9-z^2})^2+(\sqrt{9-x^2})^2]$,

因 $x\sqrt{4-y^2}-y\sqrt{9-z^2}-z\sqrt{9-x^2}=11$,

则 $11^2\leqslant(x^2+y^2+z^2)\cdot[22-(x^2+y^2+z^2)]$,

即 $[(x^2+y^2+z^2)-11]^2\leqslant0$.

又 $x、y、z\in\mathbf{R},[(x^2+y^2+z^2)-11]^2\geqslant0$,

从而 $[(x^2+y^2+z^2)-11]^2=0$.

故 $x^2+y^2+z^2=11$,又由上述过程的可逆性还得到

$(x\sqrt{4-y^2}-y\sqrt{9-z^2}-z\sqrt{9-x^2})^2$

$=[x^2+(-y)^2+(-z)^2]\cdot[(\sqrt{4-y^2})^2+(\sqrt{9-z^2})^2+(\sqrt{9-x^2})^2]$.

再根据柯西不等式取等号的条件,有且仅有

$$\begin{cases}x=k\sqrt{4-y^2},\\ -y=k\sqrt{9-z^2},\\ -z=k\sqrt{9-x^2}(k\text{ 为常数}).\end{cases}$$

将此代入原方程,得

$k(\sqrt{4-y^2})^2+k(\sqrt{9-z^2})^2+k(\sqrt{9-x^2})^2=11$.

即 $k[22-(x^2+y^2+z^2)]=11$,

而 $x^2+y^2+z^2=11$,

从而 $k=1$.

因此 $\begin{cases}x=\sqrt{4-y^2},\\-y=\sqrt{9-z^2},\\-z=\sqrt{9-x^2}.\end{cases}$

求得原方程的解为 $\begin{cases}x=\sqrt{2},\\y=-\sqrt{2},\\z=-\sqrt{7}.\end{cases}$

4. 注意取特殊值试探

例 15 （1988 年第 2 届友谊杯国际数学竞赛题）解整数方程 $x^2y+xy^2=30$.

解 原方程化为

$$xy(x+y)=2\times3\times5, \quad ①$$

由对称性，不妨设 $|x|\leqslant|y|$，于是我们有 $|x|\leqslant5$.

令 $x=1$，则①式化为 $y(1+y)=30$，解得 $y=5$ 或 -6.

令 $x=2$，则①式化为 $2y(2+y)=30$，解得 $y=3$ 或 -5.

令 $x=3$，则①式化为 $3y(3+y)=30$，解得 $y=2$ 或 -5.

令 $x=5$，则①式化为 $5y(5+y)=30$，解得 $y=1$ 或 -6.

令 $x=-1$，则①式化为 $-y(y-1)=30$，无解.

令 $x=-2$，则①式化为 $-2y(y-2)=30$，无解.

令 $x=-3$，则①式化为 $-3y(y-3)=30$，无解.

令 $x=-5$，则①式化为 $-5y(y-5)=30$，解得.

$y=2$ 或 $y=3$.

故原方程的整数解为 $\{(1,5);(5,1);(1,-6);(-6,1);(2,3);(3,2);(2,-5);(-5,2);(3,-5);(-5,3);(5,-6);(-6,5)\}$.

例 16 （1992 年 IMO 越南国家队选拔题）试求如下方程的所有正整数解 (x,y)：

$$x^2+y^2-5xy+5=0.$$

解 显然 $x\neq y$. 记

$$S=\{(x,y)\mid x^2+y^2-5xy+5=0, x,y\in\mathbf{N}, y>x\};$$

$$S'=\{(x,y)\mid x^2+y^2-5xy+5=0, x,y\in\mathbf{N}, x>y\}.$$

则 $S\cup S'$ 是原方程的正整数解的全体.

如果 $x=1$，则 $y=2$ 或 3. 同样地，如果 $y=1$，则 $x=2$ 或 3. 所以

$(1,2)\in S,(1,3)\in S$;

$(2,1)\in S',(3,1)\in S'$.

如果 $(x,y)\in S$，且 $x>1$. 则由原方程得

$$(y-x)^2+5=3xy\geqslant3\cdot2\cdot3=18,$$

$$(y-x)^2\geqslant13,$$

$$y-x\geqslant4.$$

此时，若 $4x\geqslant y$，则有

$$5xy=x^2+y^2+5\leqslant x^2+4xy+5,$$

$x(y-x)\leqslant 5$,

$4x\leqslant 5$,

$x=1$.

与 $x>1$ 矛盾. 因此,如果 $(x,y)\in S$,且 $x>1$,则有 $4x<y$.

由于 $x^2-5xy+y^2+5$

$=y^2-5y(5y-x)+(5y-x)^2+5=x^2-5x(5x-y)+(5x-y)^2+5$,

因此,如果 $(x,y)\in S$,则 $(y,5y-x)\in S$;如果 $(x,y)\in S$,且 $x>1$,则 $(5x-y,x)\in S$.

令映射 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $f((x,y))=(y,5y-x)$;及映射 $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $g((x,y))=(5x-y,x)$.

我们有 $f(g((x,y)))=f(5x-y,x)=(x,y)$,

所以 $g((x,y))=f^{-1}((x,y))$.

由上面证得的结果易知,对一切 $n\geqslant 1$,

$f^{[n]}(1,2)\in S, f^{[n]}(1,3)\in S$

其中 $f^{[n]}=\underbrace{f(f(\cdots f}_{n\text{个}f}\cdots))$. 且如果 $(x,y)\in S, x>1$,则 $g((x,y))\in S$.

由此可知,对于任意的 $(x,y)\in S, x>1$,必存在一个 $n\geqslant 1$,使得 $g^{[n]}((x,y))=(1,2)$ 或 $(1,3)$,从而有 $(x,y)=f^{[n]}((1,2))$ 或 $f^{[n]}((1,3))$. 因此

$S=\{(1,2),(1,3),f^{[n]}((1,2)),f^{[n]}((1,3)),n\in\mathbf{N}\}$,

$S'=\{(2,1),(3,1),h(f^{[n]}((1,2))),h(f^{[n]}((1,3))),n\in\mathbf{N}\}$,

其中 $h((x,y))=(y,x)$. 所求的全部正整数解为 $S\cup S'$(显然 S 中及 S' 中所写出的元素是两两不同的.)

例 17 (1995 年澳大利亚 11 年级数学竞赛题)试确定所有的四元数组 (p_1,p_2,p_3,p_4),其中 p_1, p_2, p_3, p_4 都是素数,且满足:

(1) $p_1<p_2<p_3<p_4$;

(2) $p_1p_2+p_2p_3+p_3p_4+p_4p_1=882$.

解 将条件(2)改写成

$(p_1+p_3)(p_2+p_4)=2\times 3^2\times 7^2$,

此式右端不能被 4 整除,因此左端必有一个因式是奇数,从而有

$p_1=2$, p_1+p_3 是 882 的奇因子.

又因为 $p_1+p_3<p_2+p_4$,所以

$p_1+p_3<\sqrt{882}<30$,

从而 $2+p_3\in\{3,7,9,21\}$,

$p_3\in\{5,7,19\}$.

若 $p_3=5$,则 $p_2=3$, $p_2+p_4=2\times 3^2\times 7$,

$p_4=2\times 3^2\times 7-3=3\times(2\times 3\times 7-1)=3\times 41$ 不是素数,矛盾.

若 $p_3=7$,则 $p_2+p_4=2\times 7^2=98$, $p_2=3$ 或 5, $p_4=95$ 或 93 都不是素数,矛盾.

若 $p_3=19$,则 $p_2+p_4=2\times 3\times 7=42$, $3\leqslant p_2\leqslant 17$.

当 $p_2=3$ 时, $p_4=39$ 不是素数,矛盾.

当 $p_2=5$ 时, $p_4=37$.

当 $p_2=7$ 时, $p_4=35$ 不是素数,矛盾.

当 $p_2=11$ 时，$p_4=31$.

当 $p_2=13$ 时，$p_4=29$.

当 $p_2=17$ 时，$p_4=25$ 不是素数，矛盾.

故符合条件的四元数组有(2,5,19,37)，(2,11,19,31)，(2,13,19,29).

例 18 (第 24 届 IMO 试题)求所有在正实数集上定义的函数 f，它们取正实数值，并且满足条件：

(1)对所有正数 x,y，$f(xf(y))=yf(x)$；

(2)当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$.

解 在(1)中取 $y=x$，得

$f(xf(x))=xf(x)$，①

对于任一 x，令 $xf(x)=a$，②

则①成为 $f(a)=a$ ③

在(1)中取 $x=y=a$，得

$f(af(a))=af(a)$，

用③代入得 $f(a^2)=a^2$；

由归纳法，对于所有正整数 n，

$f(a^n)=a^n$. ④

在(1)中取 $x=1,y=a$，得

$f(f(a))=af(1)$，

用③代入得 $a=f(a)=af(1)$；

由②，x 和 $f(x)$ 按定义都是正数，所以 a 也是正数，可用 a 除上式两端，得

$1=f(1)$. ⑤

在(1)中取 $x=a^{-1},y=a$，得

$f(a^{-1}f(a))=af(a^{-1})$，

用③代入得 $f(a^{-1}a)=af(a^{-1})$，

再用⑤代入得 $f(1)=1=af(a^{-1})$，

$f(a^{-1})=a^{-1}$；

由归纳法，对于所有正整数 n，

$f(a^{-n})=a^{-n}$. ⑥

现再利用题设条件(2)来考虑 a 的值.

若 $a>1$，则由④当 $n\to\infty$ 时

$a^n\to\infty$，$f(a^n)\to\infty$，与(2)矛盾；

若 $a<1$，则由⑥当 $n\to\infty$ 时

$a^{-n}\to\infty$，$f(a^{-n})\to\infty$，与(2)矛盾.

由此可知 $a=1$. 再由②中 x 的任意性，可知对于所有 x，

$xf(x)=1$ 即 $f(x)=1/x$.

经检验，$f(x)=1/x$ 确实满足条件(1)和(2).

例 19 (《中等数学》2004 年第 6 期奥林匹克问题)求所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对任意的 x、$y\in\mathbf{R}$，都有

$f(xf(y))=(1-y)f(xy)+x^2y^2f(y)$. ①

解 显然 $f(x)\equiv 0$ 适合式①. 下面设 $f(x)\not\equiv 0$.

在①中取 $y=1$,得

$f(xf(1))=x^2f(1)$. ②

于是,$f(0)=0$.

假设 $f(1)\neq 0$,取 $x=\dfrac{1}{f(1)}$,则 $f(1)=\dfrac{1}{f(1)}$.

解得 $f(1)=1$ 或 $f(1)=-1$.

从而,$f(x)=x^2$ 或 $f(x)=-x^2$.

但这两个函数都不适合式①,因此,$f(1)=0$.

令 $y\neq 0$,在①中取 $x=\dfrac{1}{y}$,得

$f(\dfrac{f(y)}{y})=f(y)$. ③

在①中取 $x=1$ 得

$f(f(y))=(y^2-y+1)f(y)$. ④

在④中用 $\dfrac{f(y)}{y}$ $(y\neq 0)$ 代替 y,并利用③得

$$f(f(\frac{f(y)}{y}))=((\frac{f(y)}{y})^2-\frac{f(y)}{y}+1)f(\frac{f(y)}{y})$$

$$\Rightarrow f(f(y))=\frac{(f(y))^3}{y^2}-\frac{(f(y))^2}{y}+f(y)$$

$$\Rightarrow (y^2-y+1)f(y)=\frac{1}{y^2}(f(y))^3-\frac{1}{y}(f(y))^2+f(y)$$

$\Rightarrow f(y)(f(y)-y^2)(f(y)-y+y^2)=0(y\neq 0)$. ⑤

假设存在某个 $y_1=0,1$,使得

$f(y_1)=y_1^2$.

由④知,$f(y_1^2)=(1-y_1+y_1^2)y_1^2$.

又由⑤知 $f(y_1^2)$ 必等于 0、$(y_1^2)^2$、$y_1^2-(y_1^2)^2$ 三者之一,从而,$y_1=\dfrac{1}{2}$,此时,$f(y_1)=y_1-y_1^2$.

假设存在某个 $y_2\neq 0,1$,使得 $f(y_2)=0$.

在①中取 $y=y_2$,得

$0=f(0)=(1-y_2)f(xy_2)$.

于是,$f(xy_2)=0$.

因此,$f(x)\equiv 0(x\in\mathbf{R})$. 与假设 $f(x)\not\equiv 0$ 矛盾.

由以上讨论及式⑤得

$f(y)=y-y^2(y\neq 0)$.

经验证,$f(x)=x-x^2$ 满足式①.

综上所述,所求为 $f(x)\equiv 0$ 或 $f(x)=x-x^2$.

注:此题曾被作为 2002 年中国 IMO 代表队出国前的训练考试题.

例 20 (1994 年保加利亚数学奥林匹克题)N_0 是所有非负整数的集合,$f(n)$ 是一个函数,使得

$f: N_0 \to N_0$，且对于每个 $n \in N_0$，$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$. 求：$f(1993)$.

解　首先证明如果 $m, n \in N_0$，$m \neq n$，必有 $f(m) \neq f(n)$，即 f 是一一对应的.

用反证法.

如果 $f(m) = f(n)$，则 $f(f(m)) = f(f(n))$. 于是我们由题设条件可得

$$2m+3 = f(f(m)) + f(m) = f(f(n)) + f(n) = 2n+3,$$

从而有　$m = n$ 矛盾.

再求 $f(0)$.

设 $f(0) = x, x \geqslant 0$.

在题目给定的关系式中，令 $n=0$，则得

$$f(x) + x = 3,$$

$$f(x) = 3 - x.$$

由于 $f(x) \geqslant 0$，因此 $x \leqslant 3$.　①

在题目给定的关系式中，令 $n = x$，则得

$$f(f(x)) + f(x) = 2x + 3,$$

将①代入上式，得

$$f(3-x) = 3x. \quad ②$$

在题目给定的关系式中，令 $n = 3 - x$，则得

$$f(f(3-x)) + f(3-x) = 2(3-x) + 3,$$

将②代入上式，得

$$f(3x) = 9 - 5x.$$

由于 $f(3x) \geqslant 0$，因此

$$9 - 5x \geqslant 0,$$

$$x \leqslant \frac{9}{5}.$$

从而有　$x = 0$ 或 $x = 1$.

如果 $x = 0$，即 $f(0) = 0$. 此时，在题目给定的关系式中，令 $n = 0$，则得

$$f(f(0)) + f(0) = 3,$$

从而有　$0 = 3$，矛盾.

故必有 $x = 1$，则必有 $f(0) = 1$.

接着用数学归纳证明：对任何非负整数 n，$f(n) = n + 1$.

事实上，当 $n = 0$ 时，由 $f(0) = 1$ 可知，结论成立.

设当 $n = k$ 时，结论成立，即 $f(k) = k + 1$.

于是，在题目给定的关系式中，令 $n = k$，我们有

$$f(f(k)) + f(k) = 2k + 3,$$

由归纳假设得

$$f(k+1) + k + 1 = 2k + 3,$$

$$f(k+1) = k + 2.$$

根据数学归纳法原理可知，对任何非负整数 n，有

$$f(n) = n + 1.$$

因此,所求的 $f(1993)=1993+1=1994$.

5. 注意数论知识及方法的灵活运用

例 21 (1983 年荷兰数学奥林匹克试题)设 x 与 y 均为两位数字的自然数,且 $x<y$,xy 是一个四位数的自然数,首位数字是 2. 若把这个首位数字去掉,剩下的正好是 $x+y$,试求这两个数.

解 由题意得

$$xy=2000+x+y, \quad ①$$

将①变形分解得

$$(x-1)(y-1)=3\times 23\times 29,$$

由 x、y 是两位数且 $x<y$ 知,

$$\begin{cases}x-1=23\\y-1=87\end{cases} 或 \begin{cases}x-1=29,\\y-1=69.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=24\\y=88\end{cases} 或 \begin{cases}x=30,\\y=70.\end{cases}$$ 为①的两组解.

例 22 (第 7 届莫斯科数学奥林匹克试题)求方程

$$x+y=x^2-xy+y^2 \quad (*)$$

的整数解.

解 将(*)移项配方得

$$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2.$$

易得它的整数解为 $(x,y)=(0,0),(0,1),(1,0),(2,1),(1,2)$ 及 $(2,2)$.

例 23 (1994 年北欧数学奥林匹克试题)求所有正整数 $n<200$,使得 $n^2+(n+1)^2$ 是一个完全平方数.

解 设 $n^2+(n+1)^2=k^2(k\in\mathbf{N}_+)$,则 $(n,n+1,k)$ 为一勾股数组.

由 $(n,n+1)=1$ 知存在 s、$t\in\mathbf{N}_+(s>t)$,

使得 $$\begin{cases}n=2st,\\n+1=s^2-t^2,\\k=s^2+t^2.\end{cases} \quad (\text{I})$$

或 $$\begin{cases}n=s^2-t^2,\\n+1=2mt,\\k=s^2+t^2.\end{cases} \quad (\text{II})$$

若(I)成立,则 $s^2-2st-(t^2+1)=0$,解得 $s=t+\sqrt{2t^2+1}$,

从而 $2t^2+1$ 为完全平方数.

又 $n<200$,

则 $st<100,t^2<100$,

即 $t<10$.

检验知 $t=2$,此时 $s=5,n=20,n+1=21,k=29$.

若(II)成立,则 $s^2-2ts-(t^2-1)=0$,解得 $s=t+\sqrt{2t^2-1}$.

从而 $2t^2-1$ 为完全平方数.

又 $n+1<201$,

则　$t^2<100, t<10$，检验知 $t=1,5$.

当 $t=1$ 时，$s=2, n=3, n+1=4, k=5$.

当 $t=5$ 时，$s=12, n=119, k=169$.

综上所述，所求 n 值为 20,3 和 119.

例 24　(1998 年莫斯科大学数学力学系入学试题)有多少不同的整数对 (x,y)，满足 $x^2=4y^2+2025$?

解　$(x+2y)(x-2y)=3^4\cdot5^2$.

令 $\begin{cases}x+2y=a,\\x-2y=b,\end{cases}$

则 $\begin{cases}x=\dfrac{a+b}{2},\\y=\dfrac{a-b}{4}.\end{cases}$

欲使 x,y 为整数，须且只须 a 与 b 均被 4 整除. 故 a 的可能值为 $\pm3^k\cdot5^m$，其中 $k=1,2,3, m=0,1,2$.

此时 $b=\pm3^{4-k}\cdot5^{2-m}$.

因　k 与 $4-k$ 的奇偶性相同，故 $\pm(-1)^2k$ 与 $\pm(-1)^{4-k}$ 相等，于是，$\pm3^k$ 与 $\pm3^{4-k}$ 被 4 除的余数相同.

又对任意 $t\in\mathbf{N}$，$5^t\equiv1 \pmod 4$，

从而　a 与 b 都被 4 整除.

因　满足 $ab=3^4\cdot5^2$ 的整数 a,b 有 $2\cdot5\cdot3=30$ 对，

故　符合要求的整数对 (x,y) 有 30 个.

例 25　(1994 年英国数学奥林匹克试题)求最小的正整数 $n>1$，使得 $1^2,2^2,3^2,\cdots,n^2$ 的算术平均值为一个完全平方数.

解　因 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，

由题意得

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=k^2(k\in\mathbf{N}_+),$$

即　$(n+1)(2n+1)=6k^2$，　①

由 $n\geqslant2$ 知 $k\geqslant2$.

因　$2n+1$ 为奇数，$6k^2$ 为偶数，由①可知 $n+1$ 为偶数.

则　存在 $m\in\mathbf{N}_+$，使得 $n+1=2m$，代入①得

$$\frac{m(4m-1)}{3}=k^2, \quad ②$$

由②知 $3|m$ 或 $3|(4m-1)$.

(1)当 $3|m$ 时，令 $m=3t(t\in\mathbf{N}_+)$，②变为 $t(12t-1)=k^2$，

因　$(t,12t-1)=1$，

则　t 和 $12t-1$ 均为完全平方数.

一个完全平方数被 4 除的余数是 0 或 1，而 $12t-1\equiv3 \pmod 4$，矛盾.

从而　$m=3t(t\in\mathbf{N}_+)$时①无正整数解.

(2)若$3|(4m-1)$，令$4m-1=3t(t\in\mathbf{N}_+)$，则⑭变为

$t(3t+1)=(2k)^2$，　　③

由$m\geqslant2$知$t\geqslant3$，

由$4m-1=3t$知，$3t+1=4m$为4的倍数，故存在$j\in\mathbf{N}_+$，使得$t=4j+1$，代入③得

$(3j+1)(4j+1)=k^2$，　　④

又　$(4j+1)-(3j+1)=j,(j,4j+1)=1$，

则　$(4j+1,3j+1)=1$，

再据④得$3j+1$与$4j+1$均为完全平方数. 于是存在$a,b\in\mathbf{N}_+$，使得

$3j+1=a^2$，　　⑤

$4j+1=b^2$，　　⑥

$3b^2+1=4a^2$，　　⑦

由⑦知b为大于2的奇数. 令$b=2S+1(S\in\mathbf{N}_+)$，则$3b^2+1=12S(S+1)+4$，$S(S+1)$为偶数. 于是

$3b^2+1\equiv4(\mathrm{mod}\,8)$，　　⑧

由⑦，⑧知a为奇数. 再由⑤，⑥知存在奇数$a\geqslant3$，记为

$b=4c\pm1,a=4d\pm1(c,d\in\mathbf{N}_+)$，　　⑨

代入⑦得

$3(4c\pm1)^2+1=4(4d\pm1)^2$，

将上式展开化简得

$3c(2c\pm1)=4d(2d\pm1)$，　　⑩

因3与$2c\pm1$都是奇数，⑩的右边是4的倍数，故存在$e\in\mathbf{N}_+$，使得$c=4e$，代入㉑的第一式得$b=16e\pm1$，再代入⑥得

$j=8e(8e\pm1)$，

又$t=4j+1$，故$t=32e(8e\pm1)+1$，取$e=1$，括号内取减号，此时n最小，且$t=225$，代入④得$k=195$，再由①得$n=337$.

例26　(2002年台湾数学奥林匹克试题)求所有正整数n和非负整数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1+\frac{4}{4n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.\qquad(*)$$

解　设$X=\sum_{i=1}^{n}x_i$，若$x_i\leqslant1(i=1,2,\cdots,n)$，记$|\{i|x_i=1\}|=a$，$|\{i|x_i=0\}|=b$，则$(*)$改写成

$$a=1+\frac{4a^2}{4n+1}.$$

易知$a\neq1$，则由上式得

$$4n+1=4(a+1)+\frac{4}{a-1},$$

解得$a=5,n=6$.

假设存在某个i，使得$x_i\geqslant2$，则

$$X+1\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1+\frac{4}{4n+1}\cdot X^2.$$

于是　$1\leqslant\frac{4}{4n+1}\cdot X$，

即 $X \geqslant n+\frac{1}{4}$，由 X 为整数知 $X \geqslant n+1$.

又 $\frac{X^2}{n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1+\frac{4}{4n+1}X^2$，由此得 $X^2 \leqslant 4n^2+n$，故 $X \leqslant 2n$.

从而 $n+1 \leqslant X \leqslant 2n$，

即 $1<1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 2$.

由 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\frac{X}{n})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{X^2}{n} = 1-\frac{X^2}{n(4n+1)}<1$，

有 $-1<x_i-\frac{X}{n}<1, i=1,2,\cdots,n$.

于是 $0<-1+\frac{X}{n}<x_i<1+\frac{X}{n} \leqslant 3$.

故 $x_i \in \{1,2\}, i=1,2,\cdots,n$.

设 $|\{i|x_i=2\}|=b, |\{i|x_i=1\}|=n-b$，则(*)化为

$3b+n=1+\frac{4}{4n+1}(b+n)^2$.

故 $n=\frac{1}{4b-3}+b, b=1, n=2$.

综上所述，(*)的解为

(1)$n=6$ 时，$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(0,1,1,1,1,1)$、$(1,0,1,1,1,1)$、$(1,1,0,1,1,1)$、$(1,1,1,0,1,1)$、$(1,1,1,1,0,1)$或$(1,1,1,1,1,0)$；

(2)$n=2$ 时，$(x_1,x_2)=(1,2)$或$(2,1)$.

6. 善于运用各种方法来配合求解

例 27 （1986 年第 20 届全苏数学奥林匹克题）十进制的自然数 a 由 n 个相同的数字 x 组成，而数 b 由 n 个相同的数字 y 组成，数 c 由 $2n$ 个相同的数字 z 组成. 对于任何 $n \geqslant 2$，求出使得 $a^2+b=c$ 成立的数字 x,y,z.

解 设 $a=\overline{\underbrace{xx\cdots x}_{n个}}=x\cdot\overline{\underbrace{11\cdots1}_{n个}}$，

$b=\overline{\underbrace{yy\cdots y}_{n个}}=y\cdot\overline{\underbrace{11\cdots1}_{n个}}$，

$c=\overline{\underbrace{zz\cdots z}_{n个}}=z\cdot\overline{\underbrace{11\cdots1}_{2n个}}$.

则 $x^2\cdot\underbrace{11\cdots1}_{n个}{}^2+y\cdot\underbrace{11\cdots1}_{n个}=z\cdot\underbrace{11\cdots1}_{2n个}$，

即 $x^2\cdot\underbrace{11\cdots1}_{n个}+y=z(10^n+1)$，

$(x^2-9z)\underbrace{11\cdots1}_{n个}=2z-y$.

故 $\begin{cases}x^2-9z=0,\\2z-y=0.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n=2,\\2z-y=11,\\x^2-9z=1.\end{cases}$

解之,得

$x=3,y=2,z=1,n\geqslant 2;x=6,y=8,z=4,n\geqslant 2;$

$x=8,y=3,z=7,n=2.$

例 28 (1988 年第 14 届全俄数学奥林匹克题)证明对每个自然数 n,方程 $(x+\sqrt{3}y)^n=\sqrt{1+\sqrt{3}}$ 没有有理数解 x 和 y.

解 设存在有理数 x 和 y,满足等式

$$x+\sqrt{3}y=\sqrt{1+\sqrt{3}},$$

于是 $(x+\sqrt{3}y)^2=1+\sqrt{3}$,

即 $x^2+3y^2-1=(1-2xy)\sqrt{3}$.

因为数 x 和 y 是有理数,而 $\sqrt{3}$ 不是有理数,故数 x 和 y 满足方程组

$$\begin{cases}1-2xy=0, & ①\\ x^2+3y^2-1=0. & ②\end{cases}$$

②×$4x^2$,得 $4x^2+12x^2y^2-4x^2=0$ ③

由①得 $4x^2y^2=1$ ④

将④代入③得 $4x^4-4x^2+3=0$ 矛盾. 因此,当 $n=1$ 时,本题的结论成立.

对于任意自然数 n 的情况,如果存在自然数 n 和有理数 x 和 y,使

$$(x+\sqrt{3}y)^n=\sqrt{1+\sqrt{3}}$$

成立. 那么利用二项式定理将上式左端展开,就可以知道必存在有理数 x_1 和 y_1,使等式

$$x_1+\sqrt{3}y_1=\sqrt{1+\sqrt{3}}$$

成立,这与已证的 $n=1$ 的结论矛盾. 所以,问题的结论得证.

例 29 (1994 年中国数学奥林匹克题)求适合以下条件的所有函数 $f:[1,\infty)\to[1,\infty)$.

(1) $f(x)\leqslant 2(x+1)$;

(2) $f(x+1)=\dfrac{1}{x}[(f(x))^2-1]$.

解 显然函数 $f(x)=x+1$ 为所求的一个解. 下面证明 $f(x)=x+1$ 是本题的惟一解,即证

$$g(x)=f(x)-(x+1)=0$$

恒成立.

事实上,我们可把 $f(x)$ 的条件

$$\begin{cases}1\leqslant f(x)\leqslant 2(x+1),\\ f(x+1)=\dfrac{(f(x))^2-1}{x}.\end{cases}$$

转变为 $g(x)$ 之条件

$$1\leqslant g(x)+x+1\leqslant 2(x+1),$$

$$g(x+1)+x+2=\frac{(g(x)+(x+1))^2-1}{x}.$$

即 $-x\leqslant g(x)\leqslant x+1$,

$$g(x+1)=\frac{(g(x))^2+2(x+1)g(x)+(x+1)^2-1-x(x+2)}{x}$$

$$=\frac{(g(x))^2+2(x+1)g(x)}{x}=\frac{g(x)[g(x)+x+x+2]}{x}.$$

注意到 $g(x)+x\geqslant 0$,所以有

$$g(x)=\frac{xg(x+1)}{g(x)+x+x+2}.$$

因此由 $-x-1\leqslant g(x)\leqslant x+1$ 有

$$|g(x)|\leqslant x+1.$$

从而有

$$|g(x)|=\frac{x|g(x)+1|}{|(g(x)+x)+x+2|}\leqslant\frac{x|g(x+1)|}{x+2}\leqslant\frac{x(x+2)}{x+2}=x.$$

于是由 $|g(x)|\leqslant x$ 推出 $|g(x+1)|\leqslant x+1$.

从而有

$$|g(x)|\leqslant\frac{x(x+1)}{x+2}.$$

由此得 $|g(x+1)|\leqslant\frac{(x+1)(x+2)}{x+3}$,

有 $|g(x)|\leqslant\frac{\frac{x(x+1)(x+2)}{x+3}}{x+2}=\frac{x(x+1)}{x+3}.$

设 n 为自然数,$|g(x)|\leqslant\frac{x(x+1)}{x+n}$,

则 $|g(x+1)|\leqslant\frac{(x+1)(x+2)}{x+n+1}$,

于是 $|g(x)|\leqslant\frac{x|g(x+1)|}{x+2}\leqslant\frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+n+1)}=\frac{x(x+1)}{x+n+1}.$

由数学归纳法原理,对一切自然数都有

$$|g(x)|\leqslant\frac{x(x+1)}{x+n}.$$

取 $n\to\infty$,便推出

$|g(x)|\leqslant 0$,即 $g(x)=0$ 恒成立.

这就证明了

$f(x)=x+1$

为惟一解.

例 30 (1990 年第 19 届美国数学奥林匹克题)函数列 $\{f_n(x)\}$ 由下列条件递归定义:

$$\begin{cases}f_1(x)=\sqrt{x^2+48},\\ f_{n+1}(x)=\sqrt{x^2+6f_n(x)}\end{cases}\text{对每个 } n\geqslant 1.$$

求方程 $f_n(x)=2x$ 的所有实数解.

解 由已知得

$f_n(x)>0\quad(n=1,2,\cdots)$,

因此方程 $f_n(x)=2x$ 只有正数解.

首先我们用数学归纳法证明 $x=4$ 是方程

$$f_n(x)=2x \qquad ①$$

的解.

事实上,当 $n=1$ 时,将 $x=4$ 代入①式的左边得 $f_1(4)=\sqrt{4^2+48}=8$;代入①的右边得 $2\times4=8$. 因此 $x=4$ 是 $f_1(x)=2x$ 的解.

假设 $x=4$ 是 $f_k(x)=2x$ 的解. 即 $f_k(4)=8$.

于是

$$f_{k+1}(4)=\sqrt{4^2+6f_k(4)}=\sqrt{4^2+48}=8=2\times4.$$

因此,$x=4$ 也是 $f_{k+1}(x)=2x$ 的解.

根据数学归纳原理,对于任意自然数 n,$x=4$ 都是方程①的解.

接着,我们用数学归纳法证明,函数 $\frac{f_n(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调减函数.

事实上,$n=1$ 时,

$$\frac{f_1(x)}{x}=\sqrt{1+\frac{48}{x^2}},$$

显然在 $(0,+\infty)$ 上是单调减函数.

假设 $\frac{f_k(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 是单调减函数. 于是

$$\frac{f_{k+1}(x)}{x}=\sqrt{1+\frac{6}{x}\cdot\frac{f_k(x)}{x}}$$

在 $(0,+\infty)$ 上也是单调减函数.

根据数学归纳原理,对于任意自然数 n,函数 $\frac{f_n(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上都是单调减函数. 从而 $\frac{f_n(x)}{x}=2$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有惟一解 $x=4$.

例 31 (1994 年爱尔兰数学奥林匹克题)w,a,b,c 是两两不同的实数,已知存在实数 x,y,z 满足

$$\begin{cases}x+y+z=1,\\ xa^2+yb^2+zc^2=w^2,\\ xa^3+yb^3+zc^3=w^3,\\ xa^4+yb^4+zc^4=w^4.\end{cases}$$

请用 a,b,c 表示 w.

解 由题目方程组的第一个方程知,x,y,z 不全为零,不妨设 $z\neq0$.

由题目方程组的第一个方程得

$$x=1-(y+z).$$

将上式代入题目方程组的后三个方程,分别有

$$\begin{cases}y(b^2-a^2)+z(c^2-a^2)=w^2-a^2, & ①\\ y(b^3-a^3)+z(c^3-a^3)=w^3-a^3, & ②\\ y(b^4-a^4)+z(c^4-a^4)=w^4-a^4. & ③\end{cases}$$

①·(b^2+a^2)−③,有

$$(c^2-a^2)(b^2-c^2)z=(w^2-a^2)(b-w^2). \qquad ④$$

①·(b^3-a^3)－②·(b^2-a^2)，经化简，可以得到

$$(b-a)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)z=(b-a)(b-w)(w-a)(ab+aw+bw),$$

由于 $a\neq b$，因此上式可知

$$(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)z=(b-w)(w-a)(ab+aw+bw). \quad ⑤$$

由于 $a\neq c, b\neq c, z\neq 0, w\neq a, w\neq b$，因此：

当 $ab+ac+bc=0$ 时，由⑤式，得

$$ab+aw+bw=0,$$

即

$$(a+b)w=-ab,$$

易知 $a+b\neq 0$（否则，$a+b=0$，由上式，有 $ab=0$，从而有 $a=0$ 或 $b=0$，代入 $a+b=0$ 中得 $a=b=0$，与 $a\neq b$ 矛盾）. 所以

$$w=-\frac{ab}{a+b}.$$

当 $ab+ac+bc\neq 0$ 时，④÷⑤，有

$$\frac{(c+a)(b+c)}{ab+ac+bc}=\frac{(w+a)(b+w)}{ab+aw+bw},$$

上式两端都减去 1，得

$$\frac{c^2}{ab+ac+bc}=\frac{w^2}{ab+aw+bw},$$

去分母，有

$$(ab+ac+bc)w^2-(a+b)c^2w-abc^2=0,$$

即

$$(w-c)[(ab+ac+bc)w+abc]=0,$$

由 $w\neq c$，得

$$(ab+ac+bc)w=-abc,$$

即

$$w=-\frac{abc}{ab+ac+bc}.$$

综上所述，我们有

$$w=\begin{cases}-\dfrac{ab}{a+b}, & \text{当 } ab+ac+bc=0 \text{ 时},\\ -\dfrac{abc}{ab+ac+bc}, & \text{当 } ab+ac+bc\neq 0 \text{ 时}.\end{cases}$$

【解题尝试】

A 组

1. （1996 年第 28 届加拿大数学奥林匹克题）如果 α,β,γ 是方程 $x^3-x-1=0$ 的根，求 $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ 的值.

2. (1990 年匈牙利数学奥林匹克题)求方程$[x^2-2x]=[x]^2-2[x]$的实数解.
3. (1987 年第 13 届全俄数学奥林匹克题)求方程 $x^2-8[x]+7=0$ 的全部解. 其中$[x]$表示不大于 x 的最大整数.
4. (1994 年第 12 届美国数学邀请赛题)对实数 x,$[x]$表示不超过 x 的最大整数部分. 求使$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 n]=1994$ 成立的正整数 n.
5. 解方程$\sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt[4]{x^3}=\sqrt{x+1}$.
6. 求方程 $x\sqrt{14-3y^2}-y\sqrt{21-3x^2}=7\sqrt{2}$的整数解.
7. (1994 年保加利亚数学奥林匹克题)求下列方程的所有整数解:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}(3x-\sqrt{9x^2+160x+800})\right)=1.$$

8. (1993 年第 6 届爱尔兰数学奥林匹克题)实数 α、β 满足方程组

$$\begin{cases}\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-17=0,\\ \beta^3-3\beta^2+5\beta+11=0.\end{cases}$$

求 $\alpha+\beta$.

9. (1988 年第 22 届全苏数学奥林匹克题)试问要使下列方程组

$$\begin{cases}\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n=0 & ①\\ \sin x_1+2\sin x_2+\cdots+n\sin x_n=100 & ②\end{cases}$$

有解,n 的最小值是多少?

10. (1989 年第 15 届全俄数学奥林匹克题)求使方程组

$$\begin{cases}ax^2+bx+c=0\\ bx^2+cx+a=0\\ cx^2+ax+b=0\end{cases}$$

有实数解时,系数 a,b,c 之间的关系.

11. (1982 年第 14 届加拿大数学奥林匹克题)若方程 $x^3-x^2-x-1=0$ 的根为 a,b,c. 证明:

(1)a,b,c 互不相同;

(2)$\dfrac{a^{1982}-b^{1982}}{a-b}+\dfrac{b^{1982}-c^{1982}}{b-c}+\dfrac{c^{1982}-a^{1982}}{c-a}$为整数.

12. (1989 年爱尔兰数学奥林匹克题)设 a 为正实数,$b=(a+\sqrt{a^2+1})^{\frac{1}{3}}+(a-\sqrt{a^2+1})^{\frac{1}{3}}$,求证:$b$ 是正整数的充要条件是 a 为$\frac{1}{2}n(n^2+3)$形式的正整数($n\in\mathbf{N}_+$).

B 组

1. (第 51 届捷克和斯洛伐克数学奥林匹克(决赛)题)在实数范围内求 a,b,使得方程

$$\frac{ax^2-24x+b}{x^2-1}=x$$

有两个根,且这两个根的和等于 12,其中重根算一个根.

2. (第 51 届捷克和斯洛伐克数学奥林匹克(开卷)题)对于自然数 $n(n\geqslant 2)$,参数 p 为何值时,方程组

$$\begin{cases} x_1^4+\dfrac{2}{x_1^2}=px_2, \\ x_2^4+\dfrac{2}{x_2^2}=px_3, \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}^4+\dfrac{2}{x_{n-1}^2}=px_n, \\ x_n^4+\dfrac{2}{x_n^2}=px_1 \end{cases}$$

至少有两组实根？

3. (1980 年第 9 届美国数学奥林匹克题)设 $F_r=x^r\sin(rA)+y^r\sin(rB)+z^r\sin(rC)$，式中 x、y、z、A、B、C 为实数，而 $A+B+C$ 为 π 的整数倍. 试证：若 $F_1=F_2=0$，则对一切正整数 r，有 $F_r=0$.

4. (第 53 届罗马尼亚数学奥林匹克(第一轮)题)(1)设 a 是大于 1 的实数，f、g、h：R→R 是实函数，且 $f(x)+g(x)+h(x)\geqslant 0$ 对所有的 $x\in\mathbf{R}$ 成立. 证明：$a^{f(x)}+a^{g(x)}+a^{h(x)}=3$ 有解的充要条件是函数 f、g、h 有公共的根.

(2)解方程 $5^{1+\cos\pi x}+2^{x^2-1}+4^{1-|x|}=3$.

5. (第 51 届捷克和斯洛伐克数学奥林匹克(开卷)题)求所有实系数多项式 $P(x)$，对于所有实数 x，满足 $(x+1)P(x-1)+(x-1)P(x+1)=2xP(x)$.

6. (第 51 届捷克和斯洛伐克数学奥林匹克(决赛)题)设 R^+ 表示正实数集. 求函数 f：$\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}^+$，对所有 x、$y\in\mathbf{R}$，有 $f(xf(y))=f(xy)+x$.

7. (1995 年中国数学奥林匹克题)设 N 是自然数的集合. 设 f：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 适合条件：$f(1)=1$，且对任意自然数 n 都有

$$\begin{cases} 3f(n)f(2n+1)=f(2n)(1+3f(n)), \\ f(2n)<6f(n). \end{cases}$$

试求方程

$f(k)+f(l)=293$，$k<l$

的所有解.

8. (1996 年中国数学奥林匹克题)设函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 适合条件

$$f(x^3+y^3)=(x+y)((f(x))^2-f(x)\cdot f(y)+(f(y))^2),x,y\in\mathbf{R}. \quad ①$$

试证对一切 $x\in\mathbf{R}$，都有

$f(1996x)=1996f(x)$.

9. (1997 年中国数学奥林匹克题)设 $I=[0,1]$，$G=\{(x,y)\mid x\in I,y\in I\}$，求 G 到 I 的所有映射 f，使得对任何 $x,y,z\in I$，都有

(1) $f(f(x,y)z)=f(x,f(y,z))$；

(2) $f(x,1)=x$，$f(1,y)=y$；

(3) $f(zx,zy)=z^kf(x,y)$，其中 k 是与 x,y,z 都无关的正数.

10. (1997 年第 38 届 IMO 试题)求所有的整数对 (a,b)，其中 $a\geqslant 1$，$b\geqslant 1$，且满足等式

$$a^{b^2}=b^a.$$

第13章 最小、最大问题的求解思路

【学习目标】

最小、最大问题是数学竞赛中的一类重要综合题型、热点题型.这类题的载体可以是初等数论、中学代数各学科、中学几何各学科、组合学初步各分支中的知识,这类题可用选择题、填空题、解答题、证明题来呈现.

求解这类问题,既需要掌握扎实的各学科基础知识,又需要掌握一些求解的策略与思路.

【解题钥匙】

1. 先进行试探推导,再构造确定

例1 (2000全国高中联赛题)平面上整点(纵、横坐标都是整数的点)到直线 $y=\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}$ 的距离中的最小值是( ).

A. $\frac{\sqrt{34}}{170}$　　B. $\frac{\sqrt{34}}{85}$　　C. $\frac{1}{20}$　　D. $\frac{1}{30}$

解 选B.理由:设整点为(x_0,y_0),则它到直线 $25x-15y+12=0$ 的距离为 $d=\frac{|25x_0-15y_0+12|}{\sqrt{25^2+(-15)^2}}=\frac{|25x_0-15y_0+12|}{5\sqrt{34}}$.由于 $x_0,y_0\in\mathbf{Z}$,故 $25x_0-15y_0$ 是5的倍数,于是有 $|25x_0-15y_0+12|\geqslant 2$.

而当 $x_0=-1,y_0=-1$ 时,$|25x_0-15y_0+12|=2$.

所以,所求最小值为$\frac{\sqrt{34}}{85}$.

例2 (1989年第7届美国数学邀请赛题)如果 $a<b<c<d<e$ 是连续的正整数,$b+c+d$ 是完全平方数,$a+b+c+d+e$ 是完全立方数,那么 c 的最小值是多少?

解 由于 a,b,c,d,e 是连续的正整数,因此

$b+c+d=3c,a+b+c+d+e=5c.$

根据题设,我们可设

$$3c=m^2(m\in\mathbf{N}),\tag{①}$$

$$5c=n^3(n\in\mathbf{N}).\tag{②}$$

由①得 m 是3的倍数,从而 c 也是3的倍数.再由②得 n 是3的倍数,从而 c 是 $3^3=27$ 的倍数.又由②得 n 是5的倍数,从而 c 是25的倍数.故 c 是 25×27 的倍数,从而 $c\geqslant25\times27$.

另一方面,$c=25\times27$ 时,能使①,②成立,从而满足题设条件.因此 c 的最小值是 $25\times27=675$.

例3 (1988年第6届美国数学邀请赛题)已知 $|x_i|<1,i=1,2,\cdots,n$.又设

$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=19+|x_1+x_2+\cdots+x_n|$.

那么整数 n 的最小值是多少?

解　由已知可得

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|-\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i|<n, \quad ①$$

但　$$\sum_{i=1}^{n}|x|-\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|=19, \quad ②$$

故得　$n>19$,

从而有　$n\geqslant20$.

另一方面,当 $n=20$ 时,我们取 $x_i=\begin{cases}\frac{19}{20},1\leqslant i\leqslant10,\\-\frac{19}{20},11\leqslant i\leqslant20.\end{cases}$

则 $x_1,x_2,\cdots,x_{20}$ 满足题设的所有条件.

综上所述,所求的整数 n 的最小值是 20.

例 4　(1997 年上海市高中竞赛题)设 $S=\{1,2,3,4\}$,n 项的数列:$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有下列性质,对于 S 的任何一个非空子集 B(B 的元素个数记为 $|B|$),在该数列中有相邻的 $|B|$ 项恰好组成集合 B,求 n 的最小值.

解　n 的最小值为 8.

首先证明 S 中的每个数在数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少出现 2 次.

事实上,若 S 中的某个数在这个数列中只出现一次,由于含这个数的二元子集共有 3 个,但在数列中含这个数的相邻两项至多只有两种取法,因此不可能 3 个含这个数的二元子集都在数列相邻两项中出现,矛盾.

由此可得,$n\geqslant8$.

另一方面,数列 3,1,2,3,4,1,2,4 满足题设条件,且只有 8 项,所以,n 的最小值为 8.

例 5　(1991 年第 25 届全苏数学奥林匹克题)设数 $x_1,\cdots,x_{1991}$ 满足条件 $|x_1-x_2|+\cdots+|x_{1990}-x_{1991}|=1991$,而 $y_k=\frac{1}{k}(x_1+\cdots+x_k)$,$k=1,\cdots,1991$.

试求如下表达式所可能取得的最大值:

$|y_1-y_2|+\cdots+|y_{1990}-y_{1991}|$.

解　对 $k=1,\cdots,1990$,我们有关系式

$$\begin{aligned}&|y_k-y_{k+1}|\\=&\left|\frac{1}{k}(x_1+\cdots+x_k)-\frac{1}{k+1}(x_1+\cdots+x_{k+1})\right|\\=&\left|\frac{1}{k(k+1)}(x_1+\cdots+x_k-kx_{k+1})\right|\\\leqslant&\frac{1}{k(k+1)}[|x_1-x_2|+2|x_2-x_3|+\cdots+k|x_k-x_{k+1}|],\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}&|y_1-y_2|+\cdots+|y_{1990}-y_{1991}|\\\leqslant&|x_1-x_2|\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{1990\cdot1991}\right)+2|x_2-x_3|\left(\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{1990\cdot1991}\right)\end{aligned}$$

$$+\cdots+1990|x_{1990}-x_{1991}|\frac{1}{1990\cdot 1991}$$

$$=|x_1-x_2|\left(1-\frac{1}{1991}\right)+|x_2-x_3|\left(1-\frac{2}{1991}\right)+\cdots+|x_{1990}-x_{1991}|\left(1-\frac{1990}{1991}\right)$$

$$\leqslant 1991\cdot\left(1-\frac{1}{1991}\right)=1990.$$

所得的估计,可在 $x_1=1991,x_2=\cdots=x_{1991}=0$ 时取得,故所求的最大值为 1990.

例 6 (1994 年上海市竞赛题)设自然数 $n\geqslant 5$,n 个不同的自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有下列性质:对集合

$$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

的任何两个不同的非空子集 A 和 B,A 中所有数的和与 B 中所有数的和都不会相等.在上述条件下,求

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

的最大值.

解 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$.

先证明对任意自然数 $k\leqslant n$,都有 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_k\geqslant 2^k-1$. ①

用反证法.若 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_k<2^k-1$,则 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 的每个非空子集的元素和不超过 2^k-2.但 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 有 2^k-1 个非空子集,根据抽屉原则,必有两个非空子集的元素和相等,这与题设矛盾.故所证结论①成立.

接着证明:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}. \quad ②$$

事实上,

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)=\frac{a_1-1}{a_1}+\frac{a_2-2}{2a_2}+\cdots+\frac{a_n-2^{n-1}}{2^{n-1}a_n},$$

令 $\quad C_i=\dfrac{1}{2^{i-1}a_i},d_i=a_i-2^{i-1},D_k=\sum\limits_{i=1}^{k}d_i.$

显然 $C_1>C_2>\cdots>C_n,D_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i-(1+2+\cdots+2^{k-1})=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i-(2^k-1)\geqslant 0,$

于是我们有

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)=\sum_{i=1}^{n}c_id_i$$

$$=C_1D_1+C_2(D_2-D_1)+\cdots+C_n(D_n-D_{n-1})$$

$$=(C_1-C_2)D_1+(C_2-C_3)D_2+\cdots+(C_{n-1}-C_n)D_{n-1}+C_nD_n$$

$$\geqslant 0,$$

故②式得证.

注意到,当 $S=\{1,2,2^2,\cdots,2^{n-1}\}$ 时,题设条件成立.此时有

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$



因此所求的最大值是 $2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

例 7 (1997 年全国高中联赛题)在 100×25 的长方形表格中每一格填入一个非负实数,第 i 行第 j 列中填入的数为 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,100;j=1,2,\cdots,25)$(如表 1).然而将表 1 每列中的数按由大到小的次序从上到下重新排列为 $x_{1,j}\geqslant x_{2j}\geqslant\cdots\geqslant x_{100j}(j=1,2,\cdots,25)$

表 1

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\cdots$	$x_{1,25}$
$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$\cdots$	$x_{2,25}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$x_{100,1}$	$x_{100,2}$	$\cdots$	$x_{100,25}$

表 2

$x'_{1,1}$	$x'_{1,2}$	$\cdots$	$x'_{1,25}$
$x'_{2,1}$	$x'_{2,2}$	$\cdots$	$x'_{2,25}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$x'_{100,1}$	$x'_{100,2}$	$\cdots$	$x'_{100,25}$

(如表 2)求最小的自然数 k,使得只要表 1 中填入的数满足 $\sum\limits_{j=1}^{25}x_{ij}\leqslant 1(i=1,2,\cdots,100)$,则当 $i\geqslant k$ 时,在表 2 中就能保证

$$\sum_{j=1}^{25}x_{ij}\leqslant 1$$

成立.

解 k 的最小值为 97.

事实上,如果我们取

$$x_{ij}=\begin{cases}0,4,(j-1)+1\leqslant i\leqslant 4j,\\ \frac{1}{24},其余的\ i.\end{cases}\qquad(j=1,2,\cdots,25)$$

那么,我们有 $\sum\limits_{j=1}^{25}x_{ij}=0+24\times\frac{1}{24}=1\qquad(i=1,2,\cdots,100)$

满足题设条件.重排后有

$$x_{ij}=\begin{cases}\frac{1}{24},1\leqslant i\leqslant 96,\\ 0,97\leqslant i\leqslant 100.\end{cases}\qquad(j=1,2,\cdots,25)$$

这时

$$\sum_{j=1}^{25}x_{ij}=25\times\frac{1}{24}>1(1\leqslant i\leqslant 96).$$

故 k 的最小值 $\geqslant 97$.

另一方面,因为表 2 的后三行一共只有 75 个数,在表 1 中有 100 行,所以表 1 中至少有一行,它的所有元素都在表 2 的前 97 行.不妨设表 1 的第 r 行的所有数

$$x_{r,1},x_{r,2},\cdots,x_{r,25}$$

都在表 2 的前 97 行中出现.于是,当 $i\geqslant 97$ 时,我们有

$$x_{ij}\leqslant x_{rj}(j=1,2,\cdots,25),\sum_{j=1}^{25}x_{ij}\leqslant\sum_{j=1}^{25}x_{rj}\leqslant 1.$$

综上所述,可知所求的 k 的最小值为 97.

例 8 (1998 年全国高中联赛题)对于正整数 a,n,定义

$F_n(a)=q+r$,



其中 q,r 为非负整数,$a=q^{n+r}$,且 $0\leqslant r<n$.

求最大的正整数 A,使得存在正整数 n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6,对于任意的正整数 $a\leqslant A$,都有

$F_{n_6}(F_{n_5}(F_{n_4}(F_{n_3}(F_{n_2}(F_{n_1}(a))))))=1$.

证明你的结论.

解 将满足条件"存在正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_k$,使得只要正整数 $a\leqslant B$,就有

$F_{n_k}(F_{n_{k-1}}(\cdots(F_{n_1}(a))\cdots))=1$"

的最大正整数 B 记为 x_k,

显然,本题所求的最大正整数 $A=x_6$.

(1)先证 $x_1=2$.

事实上,$F_2(1)=1,F_2(2)=1$,所以 $x_1\geqslant 2$.

而当 $n_1\geqslant 3$ 时,$F_{n_1}(2)=2,F_2(3)=2,f_1(2)=2$,所以 $x_1<3$.

于是,我们有 $x_1=2$.

(2)设 x_k 已求出,且 x_k 为偶数,显然 $x_k\geqslant x_1=2$. 显然,x_{k+1} 满足的必要条件是:存在 n_1,使得只要 $a\leqslant x_{k+1}$,就有 $F_{n_1}(a)\leqslant x_k$.

令 $x_{k+1}=qn_1+r$,则 $F_{n_1}(x_{k+1})=q+r\leqslant x_k$,

$x_{k+1}=qn_1+r\leqslant qn_1+x_k-q=x_k+q(n_1-1)$.

若取 $n_1=2$,则 $x_{k+1}=2x_k\geqslant x_k+2$. 由此可得

$q(n_1-1)\geqslant 2,q\geqslant 1,n_1\geqslant 2$.

于是

$0<(q-1)n_1+n_1-1=qn_1-1<x_{k+1}$.

因此

$F_{n_1}((q-1)n_1+n_1-1)=q+n_1-2\leqslant x_k$.

故有

$$q(n_1-1)\leqslant\left[\left(\frac{q+n_1-1}{2}\right)^2\right]\leqslant\left[\left(\frac{x_k+1}{2}\right)^2\right]=\left[\frac{x_k^2}{4}+\frac{x_k}{2}+\frac{1}{4}\right].$$

因为 x_k 是偶数,所以 $q(n_1-1)\leqslant\frac{x_k^2}{4}+\frac{x_k}{2}$.

又由 $x_{k+1}\leqslant x_k+q(n_1-1)$ 得 $x_{k+1}\leqslant x_k+\frac{x_k^2}{4}+\frac{x_k}{2}=\frac{x_k(x_k+6)}{4}$.

另一方面,若取 $n_1=\frac{x_k}{2}+2$,则

$\frac{x_k(x_k+6)}{4}=\frac{x_k}{2}\cdot n_1+\frac{x_k}{2}$.

对每个 $a\leqslant\frac{x_k(x_k+6)}{4}$,令 $a=qn_1+r$,那么

$q=\frac{x_k}{2},r\leqslant\frac{x_k}{2}$;

或者

$q\leqslant\frac{x_k}{2}-1,r\leqslant n_1-1=\frac{x_k}{2}+1$.

以上两种情况下，都有 $q+r\leqslant x_k$，即 $F_{n_1}(a)\leqslant x_k$.

综上所述，我们有

$$x_{k+1}=\frac{x_k(x_k+6)}{4}.$$

因为 x_k 是偶数，所以 x_k+6 也是偶数，并且 x_k 和 x_k+6 中必有一个是 4 的倍数，从而 $x_k(x_k+6)$ 是 8 的倍数，故得 x_{k+1} 是偶数.

这样，根据数学归纳法原理，我们证明了递推关系式：

$$x_1=2,x_{k+1}=\frac{x_k(x_k+6)}{4}(k=1,2,\cdots\cdots).$$

由这个关系式不难通过计算逐次得到

$$x_2=4,x_3=10,x_4=40,x_5=460,x_6=53590.$$

故所求的最大正整数 $A=53590$.

例 9 （1999 年全国高中联赛题）给定正整数 n，已知用克数都是正整数的 k 块砝码和一台天平可以称出质量为 $1,2,3,\cdots n$ 克的所有物品.

（1）求 k 的最小值 $f(n)$.

（2）当且仅当 n 取什么值时，上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一确定的？并证明你的结论.

解 （1）设这 k 块砝码的质量数分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，且 $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k$，$a_i\in\mathbf{Z}$，$1\leqslant i\leqslant k$. 因为天平两端都可以放砝码，所以可称质量为

$$\sum_{i=1}^{k}x_ia_i,x_i\in\{-1,0,1\}.$$

若利用这 k 块砝码可以称出质量为 $1,2,\cdots,n$ 的物品，则上述表示中包含有 $1,2,\cdots,n$. 由对称性易知，也包含有 $-1,-2,\cdots,-n$. 因此

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}x_ia_i\,|\,x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\supseteq\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n\}.$$

由于在集合 $\left\{\sum_{i=1}^{k}x_ia_i\,|\,x_i\in\{-1,0,1\}\right\}$ 中的元素个数不超过 3^k 个，而在集合 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n\}$ 中共有 $2n+1$ 个元素，因此

$$3^k\geqslant2n+1,n\leqslant\frac{3^k-1}{2}.$$

若 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\frac{3^m-1}{2}(m\geqslant1,m\in\mathbf{Z})$，则 $k\geqslant m$.

另一方面，若 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\frac{3^m-1}{2}(m\geqslant1,m\in\mathbf{Z})$，则我们可以取 m 块砝码：$a_1=1,a_2=3,\cdots,a_m=3^{m-1}$ 来称出 $1,2,\cdots,n$ 克的所有物品.

事实上，由数的三进制表示可知，对任意 $0\leqslant p\leqslant3^m-1$，都存在 $y_i\in\{0,1,2\}$，$1\leqslant i\leqslant m$，使得

$$p=\sum_{i=1}^{m}y_i3^{i-1},$$

从而有 $$p-\frac{3^m-1}{2}=\sum_{i=1}^{m}y_i\cdot3^{i-1}-\sum_{i=1}^{m}3^{i-1}=\sum_{i=1}^{m}(y_i-1)3^{i-1}.$$

令 $l=p-\frac{3^m-1}{2}$，则 $-\frac{3^m-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{3^m-1}{2}$；

令 $x_i=y_i-1$，则 $x_i\in\{-1,0,1\}$. 于是，我们有 $l=\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot3^{i-1}$.

因为 $n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，所以对任意的 $l\in\{1,2,\cdots,n\}$，都存在 x_i，$1\leqslant i\leqslant m$，使得

$$l=\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot 3^{i-1}=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i.$$

这就是说，用质量为 $1,3,\cdots,3^{m-1}$ 的 m 个砝码，可以称出质量为 $1,2,\cdots,n$ 的所有物品，其中 $n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$.

综上所述，可知 k 的最小值 $f(n)=m$，其中 m 满足不等式 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$.

(2)先证明当 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<n<\frac{3^m-1}{2}$ 时，$f(n)$ 块砝码的组成方式除了在(1)中已经说明的一种方式：

$a_1=1,a_2=3,\cdots,a_m=3^{m-1}$ 以外，至少还有一种方式：

$a_1=1,a_2=3,\cdots,a_{m-1}=3^{m-2},a_m=3^{m-1}-1$.

事实上，若 $1\leqslant l\leqslant\frac{3^{m-1}-1}{2}$，则由(1)可知，存在 $x_i\in\{-1,0,1\}$，使得

$$l=\sum_{i=1}^{m-1}x_i\cdot 3^{i-1}=\sum_{i=1}^{m-1}x_i\cdot 3^{i-1}+0\cdot(3^{m-1}-1).$$

若 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<l\leqslant n<\frac{3^m-1}{2}$，则 $l+1\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，

于是由(1)知，存在 $x_i\in\{-1,0,1\}$，使得

$$l+1=\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot 3^{i-1},$$

并且必有 $x_m=1$. 于是

$$l=\sum_{i=1}^{m-1}x_i\cdot 3^{i-1}+1\cdot(3^{m-1}-1).$$

因此，用砝码 $a_1=1,a_2=3,\cdots,a_{m-1}=3^{m-2},a_m=3^{m-1}-1$ 能称出质量为 $1,2,\cdots,n$ 克的所有物品. 从而此时 $f(n)$ 块砝码的组成方式不惟一.

再证明当 $n=\frac{3^m-1}{2}$ 时，$f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一的，即 $a_i=3^{i-1}(1\leqslant i\leqslant m)$.

事实上，若 m 块砝码 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 可以称出 $1,2,\cdots,n=\frac{3^m-1}{2}$ 克重的所有物品，则对每个 $-\frac{3^m-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，都有

$$l=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i,x_i\in\{-1,0,1\}.$$

因此

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}x_ia_i\,|\,x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\supseteq\left\{0,\pm1,\cdots,\pm\frac{3^m-1}{2}\right\}.$$

注意到上式左边集合中最多有 3^m 个元素，而右边集合中恰有 3^m 个元素，于是，我们有

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}x_ia_i\,|\,x_i\in\{-1,0,1\}\right\}=\left\{0,\pm1,\cdots,\pm\frac{3^m-1}{2}\right\},$$

并且 $\sum_{i=1}^{m}a_i=\frac{3^m-1}{2}$.

将集合的每一元素都加上 $\frac{3^m-1}{2}$，得

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}x_ia_i+\sum_{i=1}^{m}a_i \mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}=\{0,1,2,\cdots,3^m-1\}.$$

即 $$\left\{\sum_{i=1}^{m}y_ia_i \mid y_i\in\{0,1,2,\}\right\}=\{0,1,2,\cdots,3^m-1\}.$$

并且对于每个 $l(0\leqslant l\leqslant 3^m-1)$，都可惟一地表示成 $l=\sum_{i=1}^{m}y_ia_i$. 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_m$，因此 a_1 是集合 $\{0,1,2,\cdots,3^m-1\}$ 中的最小正整数，即 $a_1=1$. 设 $a_1=1,a_2=3,\cdots,a_s=3^{s-1}$，则 $\sum_{i=1}^{s}a_i=3^s-1$，从而 a_{s+1} 应是大于 3^s-1 的最小正整数，因此 $a_{s+1}=3^s$.

由数学归纳原理可知：$a_i=3^{i-1}, 1\leqslant i\leqslant m$.

综合以上可知，当且仅当 $n=\frac{3^m-1}{2}$ 时，上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一确定的.

2. 运用函数性质

例 10 （2001 年湖南省竞赛题）若函数 $\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $[0,1]$ 上至少出现 50 次最大值，则 ω 的最小值是（　　）.

A. 98π　　B. $\frac{197}{2}\pi$　　C. $\frac{199}{2}\pi$　　D. 100π

解 选 B. 理由：由于正弦函数在一个周期内出现 1 次最大值，从而由 $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$，并注意到可在端点 1 处取最大值，即知选 B.

例 11 （2000 年湖南省竞赛题）设变量 x 满足不等式 $x^2+bx\leqslant -x\quad(b<-1)$，且 $f(x)=x^2+bx$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$，求实数 b 的值.

解 由 $x^2+(b+1)x\leqslant 0$ 及 $b<-1$ 可解得 $0\leqslant x\leqslant -(b+1)$.

又 $f(x)=(x+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}$.

当 $-(b+1)<-\frac{b}{2}$，即 $-2<b<-1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,-(b+1)]$ 上单调递减，则 $f[-(b+1)]$ 为最小值，即 $f(-b-1)=(\frac{b}{2}+1)^2-\frac{1}{4}b^2=b+1=-\frac{1}{2}$，求得 $b=-\frac{3}{2}\in[-2,-1]$.

当 $-\frac{b}{2}\leqslant -(b+1)$，即 $b\leqslant -2$ 时，$f(x)$ 在 $[0,-(b+1)]$ 上单调递增，则 $f(-\frac{b}{2})$ 为最小值，$f(-\frac{b}{2})=-\frac{b^2}{4}=-\frac{1}{2}$，求得 $b=\pm\sqrt{2}\notin(-\infty,-2]$.

故所求实数 b 的值为 $-\frac{3}{2}$.

例 12 （1995 年全国高中联赛题）给定曲线族

$$2(2\sin\theta-\cos\theta+3)x^2-(8\sin\theta+\cos\theta+1)y=0,$$

其中 θ 为参数. 求该曲线族在直线 $y=2x$ 上所截得的弦长的最大值.

解 显然，该曲线族恒过原点，直线 $y=2x$ 也过原点，因此，曲线族在 $y=2x$ 上所截得的弦长取决于曲线族与 $y=2x$ 的另一交点的坐标.

把 $y=2x$ 代入曲线族方程得

$$(2\sin\theta-\cos\theta+3)x^2-(8\sin\theta+\cos\theta+1)x=0.$$

注意到

$$2\sin\theta-\cos\theta+3=\sqrt{5}\sin(\theta-\operatorname{arctg}\frac{1}{2})+3\neq0,$$

所以当 $x\neq0$ 时,有

$$x=\frac{8\sin\theta+\cos\theta+1}{2\sin\theta-\cos\theta+3}.$$

令 $\sin\theta=\frac{2u}{1+u^2},\cos\theta=\frac{1-u^2}{1+u^2}$,

则 $x=\frac{8u+1}{2u^2+2u+1}$,

$$2xu^2+2(x-4)u+(x-1)=0.$$

由 $u\in\mathbf{R}$ 知,当 $x\neq0$ 时,

$$\Delta=[2(x-4)]^2-8x(x-1)=4(-x^2-6x+16)\geqslant0,$$

即 $x^2+6x-16\leqslant0$ 且 $x\neq0$.

$-8\leqslant x\leqslant2$ 且 $x\neq0$.

所以 $|x|_{\max}=8$.

由 $y=2x$ 得 $|y|_{\max}=16$.

故所求弦长的最大值为 $\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}$.

例 13 (1995 年中国数学奥林匹克题)试求 $\sum\limits_{i=1}^{10}\sum\limits_{j=1}^{10}\sum\limits_{k=1}^{10}|(x+y-10i)(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)k|$ 的最小值,其中 x,y 是任意实数.

解 记题中表达式为 $F(x,y)$,则

$$F(x,y)=57\prod_{i=1}^{3}f_i(x,y),$$

其中 $f_1(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{10}|x+y-10i|,f_2(x,y)=\sum\limits_{j=1}^{10}|x-2y-12j|,f_3(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{10}|x+5y-5k|k$.

设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 为 n 个实数,记

$$\begin{cases}\mu=a_{m+1}, & 当\ n=2m+1\ 时,\\ a_m\leqslant\mu\leqslant a_{m+1}, & 当\ n=2m\ 时.\end{cases}$$

并把上面方式定义的 μ 称为有序数组 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 的中位数.不难证明:对一切实数 t 均有

$$g(t)=\sum_{i=1}^{n}|t-a_i|\geqslant\sum_{i=1}^{n}|\mu-a_i|=g(\mu).$$

这就是说,函数 $g(t)$ 在 $t=\mu$ 时达到最小值.因此

当 $(x,y)\in D_1=\{(x,y)|50\leqslant x+y\leqslant60\}$ 时,$f_1(x,y)$ 达到最小值;

当 $(x,y)\in D_2=\{(x,y)|60\leqslant x-2y\leqslant72\}$ 时,$f_2(x,y)$ 达到最小值;

当 $(x,y)\in D_3=\{(x,y)|x+5y=35\}$ 时,$f_3(x,y)$ 达到最小值.

又因为 $(55,-4)\in D_1\cap D_2\cap D_3$,所以 f_1,f_2,f_3 在点 $(55,-4)$ 处同时达到最小值,从而 $F(x,y)$ 在点 $(55,-4)$ 处达到最小值.

$$F(55,-4)=57\prod_{i=1}^{3}f_i(55,-4)=2394\times10^6.$$

3. 利用著名不等式

例 14 (2003 年安徽省竞赛题)若不等式 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant m\sqrt[4]{a^2+b^2}$ 对所有正实数 a、b 都成立,则 m

的最小值是(　　).

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $2^{\frac{3}{4}}$　　D. 4

解　选 C. 理由:因为$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2(a+b)}\leqslant\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}}$,当且仅当 $a=b$ 时等号取得. 所以 $m\geqslant 2^{\frac{3}{4}}$,即 m 的最小值为 $2^{\frac{3}{4}}$.

例 15　(1999 年河南省竞赛题)设 $0<x<\pi$,则函数 $y=\frac{2-\cos x}{\sin x}$的最小值是(　　).

A. 3　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $2-\sqrt{3}$

解　选 B. 理由:由 $y=\frac{1}{\sin x}+\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}+\tan\frac{x}{2}=\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}+\frac{3}{2}\tan\frac{x}{2}$. 而 $0<x<\pi$,则 $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$,$\tan\frac{x}{2}>0$,故 $y\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{3}{2}\tan\frac{x}{2}}=\sqrt{3}$,等号当 $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$x=\frac{\pi}{3}$时成立.

例 16　(2003 年湖南省竞赛题)记 $\min\{a,b\}$为 a、b 两数的最小值. 当正数 x、y 变化时,$t=\min\left\{x,\frac{y}{x^2+y^2}\right\}$也在变化,则 t 的最大值为__________.

解　填$\frac{\sqrt{2}}{2}$. 理由:由 $t\leqslant x\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\leqslant\frac{xy}{2xy}=\frac{1}{2}$,故 $t\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,当且仅当 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号.

例 17　(1999 年全国高中学生联赛题)给定正整数 n 和正数 M,对于满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 的所有等差数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$,试求 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$的最大值.

设等差数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$的公差为 d.

因 $S=(n+1)a_{n+1}+\frac{n(n+1)}{2}d$,$a_{n+1}=a_1+nd$,

则 $S=\frac{n+1}{2}(3a_{n+1}-a_1)$.

由柯西不等式,有

$$|S|=\left|\frac{n+1}{2}(3a_{n+1}-a_1)\right|\leqslant\frac{n+1}{2}\sqrt{[3^2+(-1)^2](a_{n+1}^2+a_1^2)}=\frac{n+1}{2}\sqrt{10M}.$$

当且仅当 $3a_{n+1}-a_1\geqslant 0$,$a_1^2+a_{n+1}^2=M$,$\frac{a_{n+1}}{3}=\frac{a_1}{-1}$都满足时,上式等号成立. 由此得

$a_{n+1}=\frac{3\sqrt{M}}{\sqrt{10}}$,$a_1=-\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{10}}$时,$S_{\max}=\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$.

例 18　(1994 年河北省竞赛题)设复数 $z=x+\mathrm{i}y(x,y\in\mathbf{R})$满足$|z-\mathrm{i}|\leqslant 1$. 求 $A=x(|z-\mathrm{i}|^2-1)$的最大值、最小值及相应的 z 值.

解　设 $z-\mathrm{i}=x+(y-1)\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

则$\begin{cases}|z-\mathrm{i}|=r\leqslant 1,0\leqslant r\leqslant 1,\\ x=r\cos\theta\end{cases}$

于是　$A=r\cos\theta(r^2-1)=r(r^2-1)\cos\theta$,

$A^2=r^2(r^2-1)^2\cdot\cos^2\theta$,

$$A^2\leqslant r^2(r^2-1)^2=\frac{1}{2}\cdot 2r^2\cdot(1-r^2)(1-r^2)\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{2r^2+(1-r^2)+(1-r^2)}{3}\right]^3=\frac{4}{27},$$

故 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant A\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

当且仅当 $\cos\theta=\pm1$ 且 $2r^2=1-r^2$ 时，上式取等号.

即 $\cos\theta=-1,r=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$A=\frac{2\sqrt{3}}{9}$；

$\cos\theta=1,r=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$A=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

也就是说，$z=-\frac{\sqrt{3}}{3}+i$ 时，A 取最大值$\frac{2\sqrt{3}}{9}$；

$z=\frac{\sqrt{3}}{3}+i$ 时，A 取最小值$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

例 19 （1988 年第 22 届全苏数学奥林匹克题）设 x,y,z 为正数，且 $x^2+y^2+z^2=1$，试求下列表达式的最小值：

$$S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}.$$

解 将表达式平方，得

$$S^2=\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+2(x^2+y^2+z^2),$$

由算术-几何平均值不等式得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)\geqslant y^2, \quad ①$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)\geqslant z^2, \quad ②$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)\geqslant x^2, \quad ③$$

①+②+③得

$$\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\geqslant x^2+y^2+z^2,$$

于是

$$S^2\geqslant 3(x^2+y^2+z^2)=3, S\geqslant\sqrt{3}.$$

又因 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，满足已知条件 $x^2+y^2+z^2=1$，且 $S=\sqrt{3}$，故 S 的最小值是$\sqrt{3}$.

例 20 （1988 年第 22 届全苏数学奥林匹克题）设 a 与 d 是非负数，b 与 c 是正数，并且 $b+c\geqslant a+d$. 试求下式的最小值：

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}.$$

解 如果我们同时将 a 与 d 互换，b 与 c 互换，那么题目的条件与结论都没有变化. 因此，我们不妨设 $a+b\geqslant c+d$. 于是，我们有

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)$$

$$\geqslant\frac{\frac{1}{2}(a+b+c+d)}{c+d}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)$$

$$=\frac{a+b}{2(c+d)}-\frac{1}{2}+\frac{c+d}{a+b}$$

$$\geqslant2\cdot\sqrt{\frac{a+b}{2(c+d)}\cdot\frac{c+d}{a+b}}-\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}.$$

另一方面，当 $a=\sqrt{2}+1,b=\sqrt{2}-1,c=2,d=0$ 时，我们有$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

故所求的最小值是$\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

例 21 (1994 年保加利亚数学奥林匹克题)k 是一个实数，对于任意实数 x，令

$$f(x)=\frac{x^4+kx^2+1}{x^4+x^2+1}.$$

(1)求 $f(x)$的最大值和最小值.

(2)求所有实数 K. 使得对每 3 个实数 a,b 和 c，存在一个三角形，具有边长 $f(a),f(b)$和 $f(c)$.

解 (1)将给定函数化为

$$f(x)=\frac{(k-1)x^2}{x^4+x^2+1}+1.$$

由算术-几何平均不等式，

$$x^4+1\geqslant2x^2,$$

于是，有

$$x^4+x^2+1\geqslant3x^2,0\leqslant\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\leqslant\frac{1}{3}.$$

如果 $k\geqslant1$，那么 $k-1\geqslant0$，从而有

$$0\leqslant\frac{(k-1)x^2}{x^4+x^2+1}\leqslant\frac{1}{3}(k-1),1\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{3}(K+2),$$

所以，当 $k\geqslant1$ 时，$f(x)$的最大值是$\frac{1}{3}(k+2)$，$f(x)$的最小值是 1.

如果 $k<1$，那么 $k-1<0$，从而有

$$0\geqslant\frac{(k-1)x^2}{x^4+x^2+1}\geqslant\frac{1}{3}(k-1),1\geqslant f(x)\geqslant\frac{1}{3}(k+2).$$

所以，当 $k<1$ 时，$f(x)$的最大值是 1，最小值是$\frac{1}{3}(k+2)$.

(2)$f(x)$中的实数 K，能使对每三个实数 a,b,c，都存在一个三角形，具有边长 $f(a),f(b)$和 $f(c)$，当且仅当 $f(x)$中的实数 K 能使

$$2\min f(x)>\max f(x)$$

如果 $k\geqslant1$，那么上式等价于 $2>\frac{1}{3}(k+2)$，即 $1\leqslant k<4$；如果 $k<1$，那么上式等价于$\frac{2}{3}(k+2)>1$，即$-\frac{1}{2}<k<1$. 故所求的所有实数 k 为$-\frac{1}{2}<k<4$.

例 22 (2003 年中国西部数学奥林匹克题)设 $2n$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$满足条件

$\sum_{i=1}^{2n-1}(a_{i+1}-a_i)^2=1$.

求$(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$的最大值.

解 当$n=1$时,$(a_2-a_1)^2=1$,故$a_2-a_1=\pm1$.易知此时欲求的最大值为1.

当$n\geqslant2$时,设$x_1=a_1,x_{i+1}=a_{i+1}-a_i,i=1,2,\cdots,2n-1$.则$\sum_{i=2}^{2n}x_i^2=1$,且$a_k=x_1+x_2+\cdots+x_k$,$k=1,2,\cdots,2n$.

由柯西不等式得

$$\begin{aligned}&(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\&=n(x_1+x_2+\cdots+x_n)+nx_{n+1}+(n-1)x_{n+2}+\cdots+x_{2n}-[nx_1+(n-1)x_2+\cdots+x_n]\\&=x_2+2x_3+\cdots+(n-1)x_n+nx_{n+1}+(n-1)x_{n+2}+\cdots+x_{2n}\\&\leqslant[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+1^2]^{\frac12}(x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{2n}^2)^{\frac12}\\&=\left[n^2+2\times\frac16(n-1)n(2(n-1)+1)\right]^{\frac12}\\&=\sqrt{\frac{n(2n^2+1)}{3}}.\end{aligned}$$

当$a_k=a_1+\frac{\sqrt3k(k-1)}{2\sqrt{n(2n^2+1)}},k=1,2,\cdots,n+1$,

$a_{n+k+1}=a_1+\frac{\sqrt3[2n^2-(n-k)(n-k-1)]}{2\sqrt{n(2n^2+1)}},k=1,2,\cdots,n-1$时,上述不等式等号成立.所以,

$(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$的最大值为$\sqrt{\frac{n(2n^2+1)}{3}}$.

4. 进行计算推导

例 23 (1988年第17届美国数学奥林匹克题)已知三次方程$x^3+ax^2+bx+c=0$有三个实根.求证:$a^2-3b\geqslant0$,并且$\sqrt{a^2-3b}$不大于最大根与最小根的差.

解 不妨设方程的三个实根p,q,r满足$p\leqslant q\leqslant r$.由韦达定理得

$a=-(p+q+r)$,

$b=pq+qr+rp$.

于是

$$\begin{aligned}a^2-3b&=(p+q+r)^2-3(pq+qr+rp)\\&=p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp\\&=\frac12[(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2]\\&\geqslant0.\end{aligned}$$

又由 $q-p\geqslant0,r-q\geqslant0,r-p\geqslant0$得

$$\begin{aligned}(a^2-3b)-(r-p)^2&=\frac12[(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2]-(r-p)^2\\&=\frac12[(p-q)^2+(q-r)^2-(r-p)^2]\leqslant\frac12[(q-p+r-q)^2-(r-p)^2]=0.\end{aligned}$$

即 $a^2-3b\leqslant(r-p)^2$,

开方得 $\sqrt{a^2-3b}\leqslant r-p$.

例 24 （《数学通报》数学问题 1493 题）设 $m,n\in\mathbf{N}^+$，$(m,n)=1$，p,q 是两不相等的奇正质数，求 (p^m+q^m) 和 (p^n+q^n) 的最大公约数 (p^m+q^m,p^n+q^n).

解 记 $I(m,n)=(p^m+q^m,p^n+q^n)$，则有

$I(0,1)=(2,p+q)=2$,

$I(1,1)=(p+q,p+q)=p+q$.

由于 $I(m,n)=I(n,m)$，故不违一般性可令 $n\geqslant m$. 当 $n\geqslant 2m$ 时，

$$\begin{aligned}&(p^m+q^m,p^n+q^n)\\=&(p^m+q^m,(p^m+q^m)(p^{n-m}+q^{n-m})-p^mq^{n-m}-p^{n-m}\cdot q^m)\\=&(p^m+q^m,(p^m+q^m)(p^{n-m}+q^{n-m})-p^mq^m(q^{n-2m}+p^{n-2m}))\\=&(p^m+q^m,p^mq^m(q^{n-2m}+p^{n-2m}))\\=&(p^m+q^m,p^{n-2m}+q^{n-2m}).\end{aligned}$$

当 $m\leqslant n<2m$ 时，

$$\begin{aligned}&(p^m+q^m,p^n+q^n)\\=&(p^m+q^m,(p^m+q^m)(p^{n-m}+q^{n-m})-p^{n-m}q^{n-m}(p^{2m-n}+q^{2m-n}))\\=&(p^m+q^m,p^{2m-n}+q^{2m-n}).\end{aligned}$$

设 $(m',n')=\begin{cases}(m,n-2m),\text{当 } n\geqslant 2m \text{ 时},\\(m,2m-n),\text{当 } m\leqslant n<2m \text{ 时}.\end{cases}$

则有 $I(m',n')=I(m,n)$，$m'+n'\equiv m+n\pmod 2$ $(m',n')=(m,n)$.

当 $(m,n)=1$ 时，不断进行上述变换，最终总有 $(m',n')=(1,0)$ 或者 $(m',n')=(1,1)$. 从而有

$$(p^m+q^m,p^n+q^n)=\begin{cases}2,\text{当 } m+n \text{ 为奇数时},\\p+q,\text{当 } m+n \text{ 为偶数时}.\end{cases}$$

注 以上问题是如下的 1996 年日本数学奥赛题的一种推广形式.

设 $m,n\in\mathbf{N}$，$(m,n)=1$，求 $(5^m+7^m,5^n+7^n)$，其中 (m,n) 表示 m、n 的最大公约数.

例 25 （1991 年中国数学奥林匹克题）求所有自然数 n，使得

$$\min_{k\in\mathbf{N}}\left(k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right]\right)=1991,$$

其中 $\left[\frac{n}{k^2}\right]$ 表示不超过 $\frac{n}{k^2}$ 的最大整数，$\mathbf{N}$ 是自然数集.

解 题中的条件 $\min\limits_{k\in\mathbf{N}}\left(k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right]\right)=1991$ 等价于如下两条：

(1)对于任何 $k\in\mathbf{N}$，都有 $k^2+\frac{n}{k^2}\geqslant 1991$；

(2)存在 $k_0\in\mathbf{N}$，使得 $k_0^2+\frac{n}{k_0^2}<1992$.

而条件(1)和(2)又分别等价于

(1)对任何 $k\in\mathbf{N}$，都有 $k^4-1991k^2+n\geqslant 0$；

(2)存在 $k_0\in\mathbf{N}$，使得 $k_0^4-1992k_0^2+n<0$.

我们先来解(1)中的不等式，这时有

$$\left(k^2-\frac{1991}{2}\right)^2+n-\frac{1991^2}{4}\geqslant 0, \qquad ①$$

因为最靠近$\frac{1991}{2}=995.5$的完全平方数是$32^2=1024$，故由①式有

$$\left(1024-\frac{1991}{2}\right)^2+n-\frac{1991^2}{4}\geqslant 0.$$

解得　$n\geqslant 1024\times 967=990208.$

条件(2)又等价于

$$\min_{k\in \mathbf{N}}\{(k^2-996)^2+n-996^2\}<0, \qquad ②$$

因为$(k^2-996)^2$的最小值为28^2，故由②式得

$n<996^2-28^2=1024\times 968=991232.$

综上可知，满足题目要求的n的范围是$990208\leqslant n\leqslant 991231$.

5. 注意利用图形性质等综合知识推导

例 26　(2002年安徽省竞赛题)定长为m的线段AB的两个端点在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的右支上移动$\left(m>\frac{2b^2}{a}\right)$. 那么，$AB$中点$M$的横坐标的最小值为________(用$a$、$b$、$m$表示).

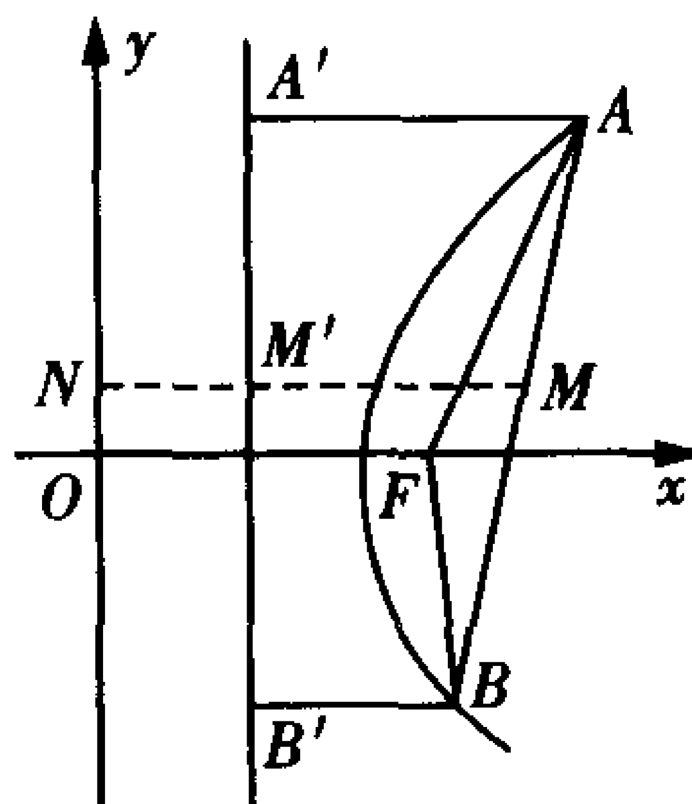


图 13-1

解　填$\frac{a(m+2a)}{2\sqrt{a^2+b^2}}$. 理由：

如图13-1，设A、B、M在双曲线右准线上的射影为A'、B'、M'，右焦点为F，离心率为e.

由双曲线定义，有

$$|MM'|=\frac{|AA'|+|BB'|}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{|AF|}{e}+\frac{|BF|}{e}\right)=\frac{1}{2e}(|AF|+|BF|)\geqslant\frac{|AB|}{2e}=\frac{m}{2e}.$$

故M的横坐标$=|MN|=|MM'|+|M'N|\geqslant\frac{m}{2e}+\frac{a^2}{c}=\frac{am}{2c}+\frac{a^2}{c}=\frac{a(m+2a)}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

例 27　(2004年全国高中联赛题)在平面直角坐标系xOy中，给定两点$M(-1,2)$和$N(1,4)$，点P在x轴上移动. 当$\angle MPN$取最大值时，点P的横坐标为__________.

解　填1. 理由：经过M、N两点的圆的圆心在线段MN的垂直平分线$y=3-x$上. 设圆心为$S(a,3-a)$，则圆S的方程为$(x-a)^2+(y-3+a)^2=2(1+a^2)$.

对于定长的弦在优弧上所对的圆周角会随着圆的半径减小而角度增大，所以，当$\angle MPN$取最大值时，经过M、N、P三点的圆S必与x轴相切于点P，即圆S的方程中的a值必须满足$2(1+a^2)=(a-3)^2$. 解得$a=1$或$a=-7$.

故对应的切点分别为$P(1,0)$和$P'(-7,0)$. 而过点M、N、P'的圆的半径大于过点M、N、P的圆的半径，所以，$\angle MPN>\angle MP'N$. 故点$P(1,0)$为所求，即点P的横坐标为1.

例 28　(2001年中国西部数学奥林匹克题)设$ABCD$是面积为2的长方形，P为边CD上的一点，Q为$\triangle PAB$的内切圆与边AB的切点. 乘积$PA\cdot PB$的值随着长方形$ABCD$及点P的变化而变化，当$PA\cdot PB$取最小值时，

(1)证明：$AB\geqslant 2BC$；

(2)求$AQ\cdot BQ$的值.

解 如图 13-2，记 R 为线段 OP 与 $\odot O$ 的交点，E 为 PD 与 $\odot O$ 的交点(不同于 D).

因 $CQ \cdot QD = AQ \cdot QB = AQ^2$,

$PQ \cdot QO = AQ^2$,

则 $CQ \cdot QD = PQ \cdot QO$.

于是，P、C、O、D 四点共圆.

故 $\angle OPC = \angle ODC = \angle OCD = \angle OPD$，即 PO 为 $\angle CPD$ 的平分线.

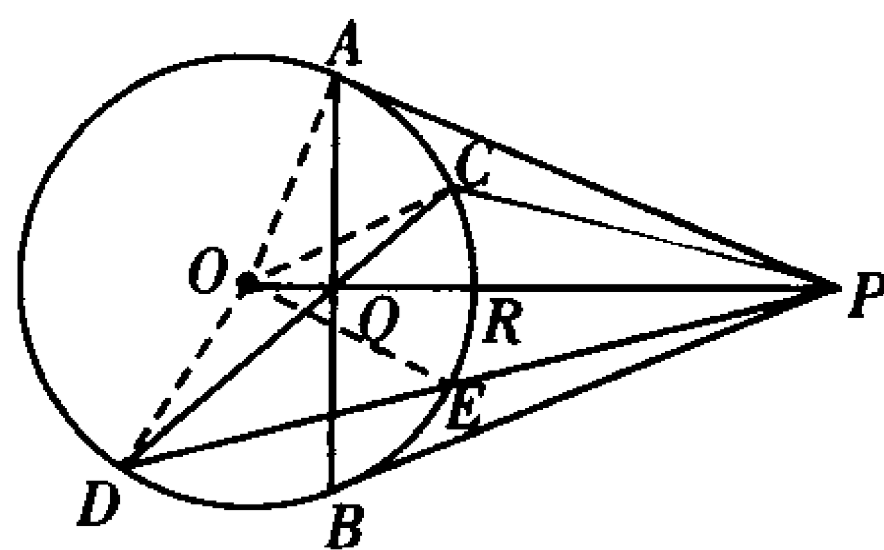


图 13-2

又由 P、C、O、D 四点共圆，得 $\angle COR = \angle CDE$. 而 $\angle COE = 2\angle CDE$，故 $\angle COR = \angle ROE$，即有 $\overset{\frown}{CR} = \overset{\frown}{RE}$. 从而，$\angle CDR = \angle EDR$. 故 R 为 $\triangle PCD$ 的内心.

又显然 R 为 $\triangle PAB$ 的内心，所以命题成立.

例 29 (2001 年中国数学奥林匹克题)给定 a，$\sqrt{2} < a < 2$. 内接于单位圆 Γ 的凸四边形 $ABCD$ 适合以下条件：

(1)圆心在这凸四边形内部；

(2)最大边长是 a，最小边长是 $\sqrt{4-a^2}$.

过点 A、B、C、D 依次作圆 Γ 的 4 条切线 L_A、L_B、L_C、L_D. 已知 L_A 与 L_B、L_B 与 L_C、L_C 与 L_D、L_D 与 L_A 分别交于点 A'、B'、C'、D'. 求面积之比 $\frac{S_{四边形A'B'C'D'}}{S_{四边形ABCD}}$ 的最大值与最小值.

解 记 $\odot \Gamma$ 的圆心为 O，并记 $\angle AOB = 2\theta_1$，$\angle BOC = 2\theta_2$，$\angle COD = 2\theta_3$，$\angle DOA = 2\theta_4$. 于是 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 都是锐角且 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \pi$. 不难求得

$S_{四边形A'B'C'D'} = \tan\theta_1 + \tan\theta_2 + \tan\theta_3 + \tan\theta_4$,

$S_{四边形ABCD} = \frac{1}{2}(\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_3 + \sin 2\theta_4)$. 所以有

$$\frac{S_{四边形A'B'C'D'}}{S_{四边形ABCD}} = \frac{2(\tan\theta_1 + \tan\theta_2 + \tan\theta_3 + \tan\theta_4)}{\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_3 + \sin 2\theta_4}. \quad ①$$

由于式①右端关于 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 对称，故不妨设 $AD = a$，$CD = \sqrt{4-a^2}$. 于是

$$\sin\theta_4 = \frac{a}{2}, \sin\theta_3 = \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}.$$

又因

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_3 \cdot \cos\theta_4 - \sin\theta_3 \cdot \sin\theta_4 = \sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\sqrt{1-\frac{1}{4}(4-a^2)} - \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2} = 0,$$

所以. $\theta_3 + \theta_4 = \frac{\pi}{2}$. 从而，$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

由三角公式有

$$\tan\theta_3 + \tan\theta_4 = \frac{\sin(\theta_3+\theta_4)}{\cos\theta_3 \cdot \cos\theta_4} = \frac{1}{\sin\theta_4 \cdot \sin\theta_3} = \frac{4}{a\sqrt{4-a^2}}, \quad ②$$

$$\tan\theta_1 + \tan\theta_2 = \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2} = \frac{1}{\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2} = \frac{2}{\sin 2\theta_1}, \quad ③$$

$$\sin 2\theta_3 + \sin 2\theta_4 = 2\sin 2\theta_3 = 4\sin\theta_3 \cdot \cos\theta_3 = 4\sin\theta_3 \cdot \sin\theta_4 = a\sqrt{4-a^2}, \quad ④$$

$$\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 = 2\sin 2\theta_1. \quad ⑤$$

简记 $\alpha=\tan\theta_3+\tan\theta_4$，$\beta=\sin2\theta_3+\sin2\theta_4$，$t=\sin2\theta_1$，于是 α、β 为常数而 t 为变数. 将②～⑤代入①，得

$$\frac{S_{\text{四边形}A'B'C'D'}}{S_{\text{四边形}ABCD}}=\frac{2\alpha+\frac{4}{t}}{\beta+2t}. \qquad ⑥$$

容易看出，式⑥右端是 t 的严格递减函数，而 t 的最大值为 1，故得

$$\min\frac{S_{\text{四边形}A'B'C'D'}}{S_{\text{四边形}ABCD}}=\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}}.$$

另一方面，由于 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 都是锐角且 a 是最大边长，$\sqrt{4-a^2}$ 是最小边长，故有 $\theta_3\leqslant\theta_1$，$\theta_2\leqslant\theta_4$. 又因 $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}=\theta_3+\theta_4$，故知 t 的最小值为

$$t_0=2\sin\theta_3\cdot\sin\theta_4=\frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}.$$

于是，由式⑥右端函数的严格递减性即得

$$\max\frac{S_{\text{四边形}A'B'C'D'}}{S_{\text{四边形}ABCD}}=\frac{8}{a^2(4-a^2)}.$$

【解题尝试】

A组

1. (1986 年第 4 届美国数学邀请赛题)求最大的正整数 n，使得 n^3+100 能被 $n+10$ 整除.
2. (1988 年美国 Mathcounts 数学竞赛试)在一个游戏中这样计分，回答一个容易的问题得 3 分，回答一个较难的问题得 7 分，在不能作为选手总分数的整数集合中，求最大值.
3. (1990 年日本数学奥林匹克代表队选拔赛题)某正整数的平方，其末三位是非零的相同数字，求具有该性质的最小正整数.
4. (1982 年第 16 届全苏数学奥林匹克题)从数 1,2,3,4,…,1982 的集合中删去一些数，使得在剩下的数中任何一个数都不等于其他两个数的乘积. 问最少需要删去多少个数才能做到这一点？如何做到这一点？
5. (1990 年第 8 届美国数学邀请赛题)n 是满足下列条件的正整数中最小的数：

   (1)n 是 75 的倍数；

   (2)n 恰有 75 个正整数因子(包括 1 及本身). 试求$\frac{n}{75}$.
6. (1985 年第 3 届美国数学邀请赛题)以下 7 个数的和恰好是 19：$a_1=2.56$，$a_2=2.61$，$a_3=2.65$，$a_4=2.71$，$a_5=2.79$，$a_6=2.82$，$a_7=2.86$.

   欲用整数 A_i 来作 a_i 的近似值($1\leqslant i\leqslant7$)，使得 A_i 的和仍为 19，而误差 $|A_i-a_i|$ 的最大值 M 尽可能小. 那么，对于这最小的 M，$100M$ 是多少？
7. (1990 年匈牙利数学奥林匹克题)对任一正整数 q_0，考虑由

   $q_i=(q_{i-1}-1)^3+3(i=1,2,\cdots,n)$

   定义的序列 $q_1,q_2,\cdots,q_n$. 若每个 $q_i(i=1,2,\cdots,n)$都是质数的幂，求 n 的最大的可能值.
8. (1988 年美国 Mathcounts 数学竞赛题)使用 0,1,2,3,…,9 中每个数字一次，求可能组成的最大的

12 的倍数.

9. (1990 年日本数学奥林匹克代表队选拔赛题)设 $4^{27}+4^{500}+4^{n}$ 是平方数(整数的平方),求整数 n 的最大值.

10. (1990 年第 19 届美国数学奥林匹克题)某州颁布由 6 个数字组成的车牌证号(由 0~9 的数字组成),该州规定任何两个牌号至少有两处的数字不同(因此证号 $\boxed{027592}$ 和 $\boxed{020592}$ 不能都被使用). 试决定车牌证号最多有多少个? 给出证明.

11. (1990 年第 7 届巴尔干地区数学竞赛题)对有限集合 A,存在函数 $f:N-A$ 具有下述性质:若 $|i-j|$ 是素数,则 $f(i)\neq f(j)$,$N=\{1,2,\cdots\}$,求有限集合 A 的元素的最少个数.

12. (1989 年第 15 届全俄数学奥林匹克题)在 1,2,3,…,1989 之间填上"+"、"-"号,求和式可以得到的最小非负数是多少?

13. (1993 年第 53 届美国普特南数学竞赛题)令 S 是 n 个不同实数的集合,A_s 是由 S 中所有互不相同的两元素的平均值所组成的集合. 对给定 $n\geqslant 2$,A_s 最少可能有多少个元素?

14. (1993 年德国数学奥林匹克题)每一个大于 2 的自然数 n 都可以表示成若干个两两不等的自然数的和,设个数的最大值为 $A(n)$. 求 $A(n)$(用 n 表示).

15. (1989 年第 23 届全苏数学奥林匹克题)已知 x,y,z 为正数,且满足等式 $xyz(x+y+z)=1$,求表达式 $(x+y)(y+z)$ 的最小值.

16. (1990 年 IMO 日本第一轮选拔赛题)设 x、y、$z>0$,且 $x+y+z=1$,求 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$ 的最小值.

17. (1993 年第 3 届中国澳门数学奥林匹克题)$x_1,x_2,\cdots,x_{1993}$ 满足
$|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{1992}-x_{1993}|=1993$,
$y_k=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}(k=1,2,\cdots,1993)$.
则 $|y_1-y_2|+|y_2-y_3|+\cdots+|y_{1992}-y_{1993}|$ 的最大可能值是多少?

18. (1994 年保加利亚数学奥林匹克题)n 是一个正整数,A 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集的一个集合,使得 A 内无元素包含 A 的其他元素,求 A 的全部元素的个数的最大值.

19. (1990 年第 24 届全苏数学奥林匹克题)试求如下表达式的最大值:
$|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots-x_{1990}|$,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_{1990}$ 是由 1 到 1990 的不同自然数.

20. (2002 年全国高中联赛题)实数 a、b、c 和正数 λ 使得 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个实数根 x_1、x_2、x_3,且满足
(1)$x_2-x_1=\lambda$;
(2)$x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.
求 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ 的最大值.

21. (2004 年中国西部数学奥林匹克题)设 u、v、w 为正实数,满足条件 $u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}\geqslant 1$. 试求 $u+v+w$ 的最小值.

B 组

1. (1990 年第 31 届国际数学奥林匹克预选题)设 a,b 是自然数,$1\leqslant a\leqslant b$,$M=\left[\frac{a+b}{2}\right]$. 函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$

定义为

$$f(n)=\begin{cases}n+a, 若\ n<M;\\ n-b, 若\ n\geqslant M.\end{cases}$$

$f^1(n)=f(n), f^{i+1}(n)=f(f^i(n)), i=1,2,\cdots$

令 $k\geqslant 1$ 是使 $f^k(0)=0$ 的最小自然数,求证:

$k=(a+b)/(a,b)$.

2. (1993年中国数学奥林匹克题)给定 $k\in\mathbf{N}$ 及实数 $a>0$,设 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 满足下列条件 $k_1+k_2+\cdots+k_r=k, k_i\in\mathbf{N}, 1\leqslant r\leqslant k$,

求 $a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$ 的最大值.

3. (1987年中国数学奥林匹克题)m 个互不相同的正偶数与 n 个互不相同的正奇数的总和为1987,对于所有这样的 m 与 n,$3m+4n$ 的最大值是多少?请证明你的结论.

4. (1996年中国数学奥林匹克题)设 $S=\{1,2,\cdots,50\}$.求最小自然数 K,使 S 的任一 K 元子集中都存在两个不同的数 a 和 b,满足 $(a+b)\mid ab$.

5. (1995年中国数学奥林匹克题)设 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 是任意10个两两不同的自然数,它们的和为1995.试求

$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_9a_{10}+a_{10}a_1$ 的最小值.

6. (1997年中国数学奥林匹克题)设实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{1997}$ 满足如下两个条件:

(1) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant x_i\leqslant\sqrt{3}(i=1,2,\cdots,1997)$;

(2) $x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$.

试求:$x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{12}$ 的最大值,并说明理由.

7. (1997年中国数学奥林匹克题)设 $A=\{1,2,3,\cdots,17\}$,对于映射 $f:A\rightarrow A$,记 $f^{[1]}(x)=f(x)$, $f^{[k+1]}(x)=f(f^{[k]}(x)), k\in\mathbf{N}$.

设从 A 到 A 的一一映射 f 满足条件:存在自然数 M,使得:

(1)当 $m<M, 1\leqslant i\leqslant 16$ 时,有

$f^{[m]}(i+1)-f^{[m]}(i)\not\equiv\pm 1 \pmod{17}$,

$f^{[m]}(1)-f^{[m]}(17)\not\equiv\pm 1 \pmod{17}$;

(2)当 $1\leqslant i\leqslant 16$ 时,有

$f^{[M]}(i+1)-f^{[M]}(i)\equiv 1$ 或 $-1 \pmod{17}$,

$f^{[M]}(1)-f^{[M]}(17)\equiv 1$ 或 $-1 \pmod{17}$.

试对满足上述条件的一切 f,求所对应的 M 的最大可能值,并证明你的结论.

8. (1995年IMO中国国家队选拔赛题),设 $S=\{A=(a_1,\cdots,a_8)\mid a_i=0$ 或 $1, i=1,2,\cdots,8\}$.对于 S 中的两个元素 $A=(a_1,\cdots,a_8)$ 和 $B=(b_1,\cdots,b_8)$,记

$d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{8}|a_i-b_i|$,

并称其为 A 和 B 之间的距离.问 S 中最多能取出多少元素,它们之中任何两个的距离 $\geqslant 5$?

9. (1995年IMO中国国家队选拔赛题)21人参加一次考试,试卷共有15道是非题.已知每两人答对的题中至少有一道是相同的.问答对人数最多的题最少有多少人答对?请说明理由.

10. (1996年IMO中国国家队选拔赛)设$\mathbf{N}$是自然数人集,$\mathbf{R}$是实数集,S是满足以下两个条件的函数$f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$的集合:
(1) $f(1)=2$;
(2) $f(n+1)\geqslant f(n)\geqslant\frac{n}{n+1}f(2n),n=1,2,\cdots$
试求最小的自然数M,使得对任何$f\in S$及任何$n\in\mathbf{N}$,都有
$f(n)<M$.
11. (1996年IMO中国国家队选拔赛题)设$M=\{2,3,4,\cdots,1000\}$.求最小自然数n,使得M的任何n元子集中都存在3个互不相交的4元子集S,T,U,满足下列条件:
(1)对于S中任何两个元素,大数都是小数的倍数,对于T和U也有同样的性质:
(2)对任何$s\in S$和$t\in T$,都有$(s,t)=1$;
(3)对任何$s\in S$和$u\in U$,都有$(s,u)>1$.
12. (1998年IMO中国国家队选拔赛题)对于固定的$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求满足以下两条件的最小正数:
(i)$\frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}+\frac{\sqrt{a}}{\sin\theta}>1$;
(ii)存在$x\in\left[1-\frac{\sqrt{a}}{\sin\theta},\frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\right]$,使得
$[(1-x)\sin\theta-\sqrt{a-x^2\cos^2\theta}]^2+[x\cos\theta-\sqrt{a-(1-x)^2\sin^2\theta}]^2\leqslant a$.
13. (2001年中国数学奥林匹克题)记$a=2001$.设A是适合下列条件的正整数对(m,n)所组成的集合:
(1)$m<2a$;
(2)$2n\mid(2am-m^2+n^2)$;
(3)$n^2-m^2+2mn\leqslant2a(n-m)$.
令$f=\frac{2am-m^2-mn}{n}$,求$\min\limits_{(m,n)\in A}f$和$\max\limits_{(m,n)\in A}f$.
14. (2003年中国数学奥林匹克题)给定正整数n,求最小的正数λ,使得对于任何$\theta_i\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)(i=1,2,\cdots,n)$,只要$\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2\cdot\cdots\tan\theta_n=2^{\frac{n}{2}}$,就有$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n$不大于$\lambda$.
15. (2001年IMO中国国家队选拔赛题)给定大于3的整数n,设实数$x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1},x_{n+2}$满足条件
$0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<x_{n+2}$.
试求 $$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_{j+2}}{x_{j+1}}\right)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_{k+1}x_{k+2}}{x_{k+1}^2+x_kx_{k+2}}\right)\left(\sum\limits_{l=1}^{n}\frac{x_{l+1}^2+x_lx_{l+2}}{x_lx_{l+1}}\right)}$$
的最小值,并求出使该式达到最小值的所有满足条件的实数组$x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1},x_{n+2}$.
16. (2003年IMO中国国家队选拔赛题)已知$p_1,p_2,\cdots,p_{25}$为给定的不超过2004的25个互不相同的质数,求最大的正整数T,使得任何不大于T的正整数,总可以表成$(p_1p_2\cdots p_{25})^{2004}$的互不相同的正约数之和(如$1,p_1,1+p_1^2+p_1p_2+p_3$等均是$(p_1p_2\cdots p_{25})^{2004}$的互不相同的正约数之和).

第 14 章　适应性问题的求解思路

【学习目标】

数学竞赛中常出现一类“适应性”问题. 这些题往往新定义一个概念、一种数、一种函数、一种集合、一个数列等,或给出新的运算法则、一种操作程序、一种操作规则等,然后要求竞赛者按要求解题.

这类题是为了测试竞赛者的适应能力和探索能力而设计的. 这类题新颖灵活,要求解题者既要认真审题,慎密思维,又要大胆联想、猜想,进行灵活思考.

【解题钥匙】

1. 注意新定义概念的关键述语

例 1 (2000 年第 26 届俄罗斯奥林匹克题)称自然数为“完全数”,如果它等于自己的所有不包括自身的正约数的和,例如 $6=1+2+3$. 如果大于 6 的“完全数”可被 3 整除,证明它必可被 9 整除.

解 设“完全数”等于 $3n(n>2)$,其中 n 不是 3 的倍数. 于是,$3n$ 的所有正约数(包括它自己)可以分为若干个形如 d 和 $3d$ 的“数对”,其中 d 不可被 3 整除,从而 $3n$ 的所有正约数的和(它等于 $6n$)是 4 的倍数,因此 n 是 2 的倍数. 我们注意到,此时 $\frac{3}{2}n$、n、$\frac{n}{2}$ 和 1 是 $3n$ 的互不相同的正约数,但它们的和等于 $3n+1>3n$,从而 $3n$ 不可能是“完全数”,得到矛盾. 故原结论获证.

例 2 如果将自然数 N 放在任一个自然数的右面所得的新数总可被 N 整除,则称 N 为“魔术数”. 试求出所有的魔术数.

解 设 N 为魔术数,其位数为 m,则将 N 放在 1 的右面所得新数为 10^m+N. 因为 $N\mid 10^m+N$,所以 $N\mid 10^m$,从而 $N=2^\alpha\cdot 5^\beta$(α、β 为不超过 m 的非负整数),即 $N=2^r\cdot 10^k$ 或 10^k 或 $5^r\cdot 10^k$(k 为 α、β 中较小者,r 为正整数,$r+k\leqslant m$,且 $r+k$ 为 α、β 中较大数).

在 $N=5^r\cdot 10^k$ 时,由于 $5^4=625$,如果 $r\geqslant 4$,则 $5^r=5^4\cdot 5^{r-4}$,它的位数 $\leqslant 3+(r-4)=r-1$. 所以 $5^r\cdot 10^k$ 的位数 $\leqslant r-1+k<r+k=m$,从而矛盾,所以 $r\leqslant 3$,即 $N=5\cdot 10^k, 5^2\cdot 10^k, 5^3\cdot 10^k$.

同样可证,在 $N=2^r\cdot 10^k$ 时,只有 $N=2\cdot 10^k$ 是魔术数.

反之,N 为 $2\cdot 10^k, 5^\alpha\cdot 10^k$($\alpha=0,1,2,3$,$k$ 为非负整数)之一时为魔术数,此时 N 为所求.

把上例最后所求改为问小于 130 的自然数中有多少个魔术数即为 1986 年全国初中数学竞赛题.

例 3 把各位数字均不超过 5 的自然数称为“好数”. 证明:对于任意的自然数 x,在半开区间 $[x, \frac{9}{5}x)$ 内一定有一个好数.

证 设 n 是一个好数,又设在大于 n 的好数中,m 是最小的,即 m 是在 n 后面出现的第一个好



数，下面考虑比值$\frac{m-1}{n}$的大小.

记$n=\overline{a_ra_{r-1}\cdots a_0}$，其中$r$为非负整数，$a_0,a_1,\cdots,a_r\in\{01,2,3,4,5\}$且$a_r\neq 0$.

(i)存在某个$a_i<5,0\leqslant i<r$：

由于$a_{i+1}\leqslant 5$，所以$n'=\overline{a_r\cdots(a_i+1)\cdots a_0}$也是好数，从而$\frac{m-1}{n}<\frac{n'}{n}=1+\frac{10^1}{10}\leqslant 1+\frac{1}{10}<\frac{9}{5}$.

(ii)$n=\overline{a_r55\cdots5}$，$a_r<5$：

这时$n'=\overline{(a_r+1)55\cdots5}$也是好数，从而

$$\frac{m-1}{n}<\frac{n'}{n}=1+\frac{10^r}{n}<1+\frac{10}{15}<\frac{9}{5}.$$

(iii)$n=\underbrace{\overline{55\cdots5}}_{r\text{个}5}$，从而由$m=10^{r+1}$有

$$\frac{m-1}{n}=\frac{\overbrace{99\cdots9}^{r\text{个}}}{\underbrace{55\cdots5}_{r\text{个}}}=\frac{9}{5}.$$

综上所述，$\frac{m-1}{n}\leqslant\frac{9}{5}$.

因此在半开区间$[x,\frac{9}{5}x)$内一定有一个好数.

例4 (2004年全国女子数学奥林匹克题)如果存在$1,2,\cdots,n$的一个排列$a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得$k+a_k(k=1,2,\cdots,n)$都是完全平方数，则称n为“好数”. 问：在集合$\{11,13,15,17,19\}$中，哪些是“好数”，哪些不是“好数”？说明理由.

解 除了11之外都是“好数”.

(1)易知11只能与5相加得到4^2，而4也只能与5相加得到3^2，因此，不存在满足条件的排列，所以11不是“好数”.

(2)13是“好数”，因为如下的排列中，$k+a_k(k=1,2,\cdots,13)$都是完全平方数：

k：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_k：	8	2	13	12	11	10	9	1	7	6	5	4	3

(3)15是“好数”，因为如下的排列中，$k+a_k(k=1,2,\cdots,15)$都是完全平方数：

k：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_k：	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

(4)17是“好数”，因为如下的排列中，$k+a_k(k=1,2,\cdots,17)$都是完全平方数：

k：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a_k：	3	7	6	5	4	10	2	17	16	15	14	13	12	11	1	9	8

其中用到了轮换(1,3,6,10,15).

(5)19是“好数”，因为如下的排列中，$k+a_k(k=1,2,\cdots,19)$都是完全平方数：

k：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
a_k：	8	7	6	5	4	3	2	1	16	15	14	13	12	11	10	9	19	18	17

例5 (加拿大奥林匹克题)一实数集被称为是“单纯的”，如果它包含使得$x+y=z$的元素z. 给定数集$\{1,2,\cdots,2n+1\}$，求其单纯子集所能包含的最多元素的数目.



解 考察$\{1,2,\cdots,2n+1\}$的两个子集:$A=\{1,3,5,\cdots 2n+1\}$,$B=\{2,4,6,\cdots,2n\}$.由于A中任何两数之和为偶数,已不在A中,故A是一单纯子集,A的元素个数是$n+1$.下面来证$n+1$是$\{1,2,\cdots,2n+1\}$的单纯子集的最多元素的数目.设C是原集合的一个子集,C的最多元素的数目为$n+2$,又设C中有p个数来自A,$n+2-p$个数来自B,很明显,必有$p\geqslant 2$.设C中来自A的数为$a_1<a_2<\cdots<a_p$,于是$0<a_2-a_1<a_3-a_1<\cdots<a_p-a_1$是$p-1$个不同的偶数,它们应当是子集$B$的一部分,设$C$中来自$B$的$n+2-p$个数为$b_1<b_2<\cdots<b_{n+2-p}$,由于$(p-1)+(n+2-p)=n+1$,但$B$中只有$n$个偶数,故应有指标$i$与$j$使得$a_i-a_1=b_j$,其中$2\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant n+2-p$.于是$a_i=a_1+b_j$,这表明$C$已不是单纯子集,这表明单纯子集的最多元素数目必不能大于$n+1$.但又已知单纯子集A的元素数是$n+1$,即证.

例 6 (1979年安徽省竞赛题)在线段AB的两个端点,一个标以红色,一个标以蓝色,在线段中间插入几个分点,在各个分点上随意地标上红色或蓝色,这样把原线段分为$n+1$个不重叠的小线段,这些小线段的两端颜色不同者叫做标准线段.证明:标准线段的个数是奇数.

证 设n个分点依次是$A_1,A_2,\cdots,A_n$这$n+1$个线段分别为$AA_1=A_0A_1,A_1A_2,\cdots,A_{n-1}A_n$,$A_nB=A_nA_{n+1}$.

设最后一个标准线段为A_kA_{k+1},若$A_k=A_o$,则仅有一个标准段,命题显然成立;若$A_k\neq A_o$,则A_o必与A_k同色,不妨设A_o和A_k均为红色.那么在A_o和A_k之间若有一红蓝的标准线段,必有一蓝红的标准线段与之对应,否则A_k不可能成为红色,所以在A_0和A_k之间,红蓝和蓝红的标准线段就成对出现,即A_o和A_k之间的标准线段的个数是偶数,加上最后一个标准段A_kA_{k+1},所以A和B之间的标准线段的个数是奇数.

2. 注意新定义运算法则的要点

例 7 (2003年美国南卡罗来纳大学高中竞赛题)如图14-1,a,b,c,d,e,f,g,h,i分别代表1,2,3,4,5,6,7,8,9中的某一个数.将9个圆中的3个数字相加,得到9个和.若这9个和相等,那么,$a+d+g$的值是( ).

A. 15　　B. 16　　C. 18　　D. 19

E. 21

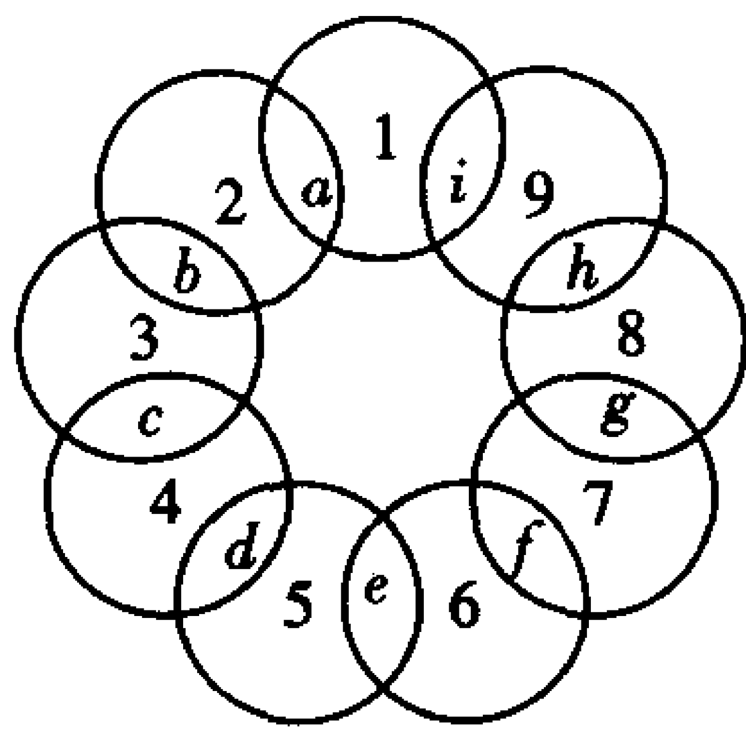


图 14-1

解 选C.理由:

设这个共同的和为s.将这9个和相加,得

$9s=1+2+\cdots+9+2(a+b+\cdots+i)=3\times 45=9\times 15$.

所以,$s=15$.其中6个圆内的数字相加得到$90=6s=1+2+4+5+7+8+(a+b+\cdots+i)+a+d+g=27+45+a+d+g=72+a+d+g$.

因此，$a+d+g=90-72=18$.

例 8 （1985 年全国高中联赛题）对任意实数 x,y，定义运算 $x*y=ax+by+cxy$. 其中 a、b、c 为常数，等式右端的运算是通常的实数加法、乘法运算，现已知 $1*2=3$，$2*3=4$，并且有一个非零实数 d，使得对任意实数 x 都有 $x*d=x$. 求 d.

解 对任一实数 x，有 $x*d=ax+bd+cdx=x_1$（其中 $d\neq 0$），则 $0*d=bd=0$. 而 $d\neq 0$，则 $b=0$.

于是，由 $\begin{cases}1*2=a+2b+2c=3,\\ 2*3=2a+3b+6c=4\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a+2c=3,\\ 2a+6c=4\end{cases}$

从而有 $\begin{cases}a=5,\\ c=-1.\end{cases}$ 又由 $1*d=a+bd+cd=1$ 得 $d=4$.

例 9 定义 $n(!)^0=n, n(!)^1=n!, n(!)^2=(n!)!, \cdots, n(!)^n=[(n(!)^{n-1}]!$.

试证：当 $k\geqslant 2$ 时，$n(!)^k$ 必能被 $(n!)(n-1)!\ (n!\ -1)!\ \cdot[n(!)^2-1]!\ \cdots[n(n)^{k-2}-1]!$ 整除.

证明：由 $n(!)^k=[n(!)^{k-1}]!$ 可知，$n(!)^k$ 可表示为 $n(!)^{k-1}$ 个连续自然数的乘积. 而

$n(!)^{k-1}=n(!)^{k-2}.[n(!)^{k-2}-1]!\ =n(!)^{k-3}[n(!)^{k-3}-1]!\ \cdot[n(!)^{k-2}-1]!\ =\cdots$

$=n\cdot(n-1)!\ (n!\ -1)!\ \cdots[n(!)^{k-2}-1]!$.

所以这 $n(!)^{k-1}$ 个连续自然数相乘可分划成 $n(n-1)!,(n!\ -1)!,\cdots,[n(!)^{k-2}-1]!$ 组乘积，其中每组乘积皆含连续 n 个自然数的乘积，由于任意 n 个连续自然数的乘积皆可被 $n!$ 整除，所以 $n(!)^k$ 可被 $(n!)(n-1)!\ \cdot(n!\ -1)!\ \cdots[n(!)^{k-2}-1]!$ 整除.

3. 注意给出的要求或规则的细节

例 10 （2001 年全国高中联赛题）已知 6 枝玫瑰与 3 枝康乃馨的价格之和大于 24 元，而 4 枝玫瑰与 5 枝康乃馨的价格之和小于 22 元. 则 2 枝玫瑰的价格和 3 枝康乃馨的价格比较结果是（　　）.

A. 2 枝枝玫瑰价格高　　B. 3 枝康乃馨价格高

C. 价格相同　　D. 不确定

解 选 A. 理由：设玫瑰与康乃馨的单价分别为 x、y 元/枝，则 $6x+3y>24$，$4x+5y<22$.

令 $6x+3y=a>24$，$4x+5y=b<22$.

解得 $x=\frac{1}{18}(5a-3b)$，$y=\frac{1}{9}(3b-2a)$.

所以，$2x-3y=\frac{1}{9}(11a-12b)>\frac{1}{9}(11\times 24-12\times 22)=0$，

即　$2x>3y$.

注 也可用二元一次不等式所表示的区域来研究.

例 11 （2003 年天津市竞赛题）设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（其中 a、b、c 为整数），有 4 个学生计算函数值，甲得到：$f(7)=-1$；乙得到：$f(1)=3$；丙得到：$f(4)=-4$；丁得到：$f(2)=4$. 其中有且仅有 1 个学生计算错误，则计算错误的学生是（　　）.

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

解 选 B. 理由：因为 $f(m)-f(n)=(m-n)(am+an+b)$，则 $(m-n)\mid(f(m)-f(n))$.

验证：$(7-1)\nmid(-1-3)$，$(7-4)\mid(-1+4)$，$(7-2)\mid(-1-4)$，$(1-4)\nmid(3+4)$，$(1-2)\mid(3-4)$，$(4-2)\mid(-4-4)$.

于是，乙计算错误.

例 12 (1986年全国高中联赛题)平面直角坐标系中,纵横坐标都是整数的点称为整点.请设计一种方法将所有的整点染色,每一整点染成白色、红色或黑色中的一种,使得:(1)每一种颜色的点出现在无穷多条平行于横轴的直线上;(2)对于任意白点A、红点B及黑点C,总可以找到一个红点D,使$ABCD$为一平行四边形,证明你设计的方法符合上述要求.

解 将y轴上的整点染成黑白相间的点再将其余的整点都染上红色即可.

证明如下:由染法可知,有白色、黑色或红色的点在无穷多条平行于x轴的直线上,设A为白点、B为红点、C为黑点、B显然不在直线AC上,而且平行四边形$ABCD$的顶点D的横(纵)坐标等于A、C的横(纵)坐标之和减去B的横(纵)坐标,所以D一定是整点.由于A、C横坐标为O,B的横坐标不为O,所以D的横坐标不为O,即D为红点,证毕.

例 13 (2004年全国高中联赛题)一项"过关游戏"规则规定:在第n关要抛掷一颗骰子n次,如果这n次抛掷所出现的点数之和大于2^n,则算过关.问:

(1)某人在这次游戏中最多能过几关?

(2)他连过前三关的概率是多少?

(注:骰子是一个在各面上分别有1,2,3,4,5,6点数的均匀正方体,抛掷骰子落地静止后,向上一面的点数为出现点数.)

解 由于骰子是均匀的正方体,所以抛掷后各点数出现的可能性是相同的.

(1)因骰子出现的点数最大为6,而$6\times4>2^4$,$6\times5<2^5$,因此,当$n\geqslant5$时,n次出现的点数之和大于2^n已不可能.故这是一个不可能事件,最终过关的概率为0.所以,最多只能连过4关.

(2)设事件A_n为"第n关过关失败",则对立事件$\overline{A_n}$为"第n关过关成功".

第n关游戏中,基本事件总数为6^n个.

第1关:事件A_1所含基本事件数为2(即出现点数为1和2这两种情况).所以,过此关的概率为

$$P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}.$$

第2关:事件A_2所含基本事件数为方程$x+y=a$,当a分别取2,3,4时的正整数解组数之和时,则有$C_1^1+C_2^1+C_3^1=6$(个).所以,过此关的概率为

$$P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=1-\frac{6}{6^2}=\frac{5}{6}.$$

第3关:事件A_3所含基本事件为方程$x+y+z=a$,当a分别取3,4,5,6,7,8时的正整数解组数之和时,则有$C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_5^2+C_6^2+C_7^2=56$(个).所以,过此关的概率为$P(\overline{A_3})=1-P(A_3)=1-\frac{56}{6^3}=\frac{20}{27}$.

故连过前三关的概率为

$$P(\overline{A_1})\times P(\overline{A_2})\times P(\overline{A_3})=\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{20}{27}=\frac{100}{243}.$$

注 第2,3关的基本事件数也可列举出来.

例 14 (2002年上海市竞赛题)设F是所有有序n元组$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$构成的集合,其中A_i $(1\leqslant i\leqslant n)$都是集合$\{1,2,3,\cdots,2002\}$的子集,设$|A|$表示集合$A$的元素的数目.对$F$中的所有元素$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$,求$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$的总和,即

$$\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|.$$

解 因$\{1,2,\cdots,2002\}$有2^{2002}个子集,则$|F|=(2^{2002})^n=2^{2002n}$.

设a是$\{1,2,\cdots,2002\}$中某个固定的元素.为了在$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$中不含有$a$,则每个$A_i(1\leqslant i\leqslant n)$都不含有$a$.因为$\{1,2,\cdots,2002\}$的不含$a$的子集有$2^{2001}$个,故使$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$不含有$a$的有序$n$元组$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$有$(2^{2001})^n=2^{2001n}$个,从而有$2^{2002n}-2^{2001n}$个有序$n$元组$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$,使得$a\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

于是,当计算数$\sum\limits_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$时,元素$a$被计算了$(2^{2002n}-2^{2001n})$次.

既然$\{1,2,\cdots,2002\}$有2002个元素,故

$$\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=2002(2^{2002n}-2^{2001n}).$$

例15 (第34届莫斯科数学奥林匹克题)有一堆火柴共10000000(一千万)根.两人进行如下游戏:他们轮流执步,在第一步中,游戏者可从堆中取走P^n根火柴,其中P为质数,$n=0,1,2,3,\cdots$(例如第一人取25根火柴,第二人取8根,第一人再取1根,第二人再取5根,第一人再取49根,如此等等),谁取到了最后一根火柴,谁即为胜者.试问,在正确的游戏中,谁将取胜?

解 在正确的玩法下,第一人将取胜.由于他在每次执步中,可以取走1,2,3,4或5根火柴,所以他可以执行这样的策略:即不论第二人如何动作,他都应在自己执步之后,给对方留下能被6整除的火柴数目,这样,在经过有限次执步之后,他将给第二人留下6根火柴,因而在第二人动作之后,他即可取走所有剩余的火柴结束游戏而取胜.

例16 (第31届莫斯科数学奥林匹克题)有两小堆糖果,两人进行游戏,他们轮流执步,执步者吃掉其中一小堆,而把另一堆分为(可相等也可不相等的)两部分.如果另一堆中总共只有一块糖果而无法再分了,那么他就吃掉这一块而取胜.如果开始时两小堆糖果分别有33块和35块.试问,谁将取胜?是先执步者还是其对手?为了能取胜,应当如何执步?

分析 为了取胜的执步者须让对手最终把2块或3块糖果分成两堆.因此,临胜态可记为(1,1)或(2,1).

解 先执步者将取胜.他在第一步中应吃掉有33块糖果的那一堆,然后把另一堆分成17块、18块两份,在以后的过程中他始终应留给对手两堆数目皆为$5k+2$或$5k+3$的糖果(他能做到这一点).这样一来,他的对手最终不得不把2块或3块糖果分成两堆,因而输掉.

例17 (第42届莫斯科数学奥林匹克题)柯尼亚和维佳在无穷大的方格纸上做游戏.自柯尼亚开始,他们依次在方格纸上标出结点,即纸上的铅垂直线和水平直线的交点,他们每标出一个结点,都应当使所有已标出的结点全都落在某一个凸多边形的顶点上(自柯尼亚的第二步算起).如果谁不能再按法则进行下去,就判谁输.试问:按正常情况,谁能赢得这一游戏?

解 维佳总能获胜.他可以这样来做:选定一个方格的中心作为对称中心,每次都将与柯尼亚所标的点相对称的点标出.容易看出,维佳总是有点可标(在维佳标3点之后,凸多边形仍然是凸的),在柯尼亚标了6点之后,就只能再在由六边形的各边及其两邻边的延长线所形成的6个三角形区域中标点,即是说,对柯尼亚来说,仅剩下有限个可标的点了.于是游戏必然在维佳对称地标出了柯尼亚的最后一步之后结束.

例18 (第8届全苏奥林匹克题)两人在8×8象棋盘上做猫捉老鼠的游戏.第一个人有一个筹码表示老鼠,第二个人有若干筹码表示猫.所有筹码的走法是一样的:一次可以向右、向左、向上或向下走一格.如果老鼠出现在棋盘边缘上,那么轮到它走时将从棋象上跳下,如果猫和老鼠落在同一个方格内,那么猫就吃掉老鼠.

游戏按顺序进行,并且第二个人所有的猫可以同时移动(不同的猫可以同时在不同的方向上移动),老鼠先走,它力求从棋盘上跳下,而猫力求在此之前吃掉它.

(a)假设共两只猫,老鼠已位于某个不在边缘的方格上,能否将猫摆在棋盘边缘上,使它能吃掉老鼠?

(b)假设有三只猫,然而老鼠可有另外的走法:第一次它连续走两步,证明:不论开始时如何布置筹码,老鼠总能摆脱猫.

解 (a)可以.不管老鼠处于何位置,猫都应该这样移动,使得老鼠要处在它们之间的平行于对角线的线段上,并且当老鼠走任何一步后,猫都应使老鼠仍旧处在位于它们之间的平行于对角线的直线上.

(b)经过老鼠引两条平行于对角线的线段,并除去这两条线段两端的方格.这样棋盘就被分成四部分.当某一部分没有猫时,老鼠就应沿指向边界的方向进入这个方格.显然,猫不能吃掉它,因而,不论猫走完任何一步以后,在老鼠移动的方向的前方与猫之间总有一个空格.证毕.

例 19 (第 12 届全苏奥林匹克题)一个棋子放在国际象棋盘的一个角上,象棋盘的大小为 $n\times n$ 个方格.两个游戏者按次序向邻近的方格(和放棋子的方格具有公共边)移动棋子,第二回移动方向可以任意选择,但棋子已经走过的地方不能再走,最后谁没法走算败.

(a)证明:如果 n 是偶数,那么开始走的人能获胜;而 n 是奇数时,则第二人能获胜.

(b)如果最初棋子没有放到棋盘的角上,而是放在和它邻近的方格内.问谁能最后获胜?

解 (a)如果 n 是偶数,那么可以把整个棋盘分成 $\frac{n}{2}$ 个大小为 1×2 个方格的矩形.第一个人开始走总是可行的,如果第一人随之采取如下战略就一定能获胜:不管第二人如何走法,第一人移动棋子时,总是保持和棋子原在方格处于同一 1×2 的矩形内.如果 n 是奇数,那么除开始的角外,仍能把棋盘分成一些 1×2 的矩形,类似于上面的策略,第二人就能保证获胜.

(b)总是第一个走棋的人能获胜.如果 n 是偶数,就类似于(a)的情况操作;当 n 为奇数时,除一个角以外,将棋盘的方格分出用颜色涂过的方格.容易验证,在角上的方格第二个人无论如何都是不能取胜,因而第一个游戏者只用跟走的策略就能获胜.

例 20 (第 5 届全俄奥林匹克题)棋盘有 3×3 个方格,有 9 张大小为一个方格的卡片,在每张卡片上都写有某一数字,两个人轮流把这些卡片放到方格里去,当把全部卡片分完以后,第一个人计算上边和下边的 6 个数的和,第二个人计算左边和右边 6 个数的和,哪一个人得到的和最大,哪一个人就是胜利者.证明:不论卡片上写的什么数,第二个人都不可能获胜.

证明 9 个任意的数,可按大小设为 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_9$,四个角上的数是两人共有的.因而计算和数的结果只与放在 A、B、C、D 这四格中的数字有关,如图,谁要取胜必须尽可能将大的数字填入 A 或 C,尽可能将小的数填入 B、D.

	A	
B		D
	C	

图 14-2

当 $a_1+a_9>a_2+a_8$ 时,甲(第一个人)必胜.甲的策略是:先选 a_9 放入 A 格中,第二次尽可能选小的数放入 B 格或 D 格,则 A 与 C 格中的数字之和不小于 a_1+a_9,而 B 与 D 格的数字之和不大于 a_2+a_8,故甲胜.

当 $a_1+a_9<a_2+a_8$ 时,甲也必胜.甲先取 a_1 放入 B 格,第二次甲选 a_8 或 a_9 放到 A 格或 C 格中,这样,A 格与 C 格的数字之和不小于 a_2+a_8,而 B 与 D 格的数字之和不大于 a_1+a_9,故甲胜.

当 $a_1+a_9=a_2+a_8$ 时,甲取胜或和局.甲可采用上述策略中的任一种.

综上所述，第二个人都不可能获胜.

例 21 （2000年第26届俄罗斯奥林匹克题）丹娘想出一个自然数 $X\leqslant 100$，萨沙试图猜出这个数.他选出一对小于100的自然数 M 和 N，然后问丹娘："$X+M$ 和 N 的最大公约数是多少？"证明：萨沙在问过丹娘7个这种问题之后，就可以猜出丹娘所想出的数.

证明 在获知 $X+1$ 与2的最大公约数之后，萨沙可确定 X 的奇偶性.如果 X 为偶数，则接着第二个问题就问 $X+2$ 与4的最大公约数；而如果 X 为奇数，就问 $X+1$ 与4的最大公约数.这样便可获知 X 被4除的余数.一般地，在问过第 k 个问题（$k\leqslant 5$）之后，萨沙可获知 X 被 2^k 除的余数 r_k.接下来的第 $k+1$ 个问题就问 $X+2^k-r_k$ 与 2^{k+1} 的最大公约数（注意 $0<2^k-r_k<2^{k+1}\leqslant 64<100$）.如果 $(X+2^k-r_k,2^{k+1})=2^{k+1}$，则 X 被 2^{k+1} 除的余数等于 2^k+r_k，而如果 $(X+2^k-r_k,2^{k+1})=2^k$，则该余数等于 r_k.

从而，在如此问过6个问题之后，萨沙获知了 X 被64除的余数.显然在前100个自然数中，被64除的余数相同的数至多有两个.如果恰有两个，记为 a 和 $a+64$，则萨沙可以再问："$X+3-r$ 和3的最大公约数是多少？"其中 r 是 a 被3除的余数.显然，如果 $X=a$，则该问题的答案是3；而如果 $X=a+64$，则答案是1.从而萨沙可以惟一地确定出 X.

注：萨沙的前6个问题是用来确定 X 的二进制表达式的后6位数的.

例 22 21个女孩和21个男孩参加一次数学竞赛.

(1)每一个参赛者至多解出了6道题；

(2)对于第一个女孩和每一个男孩，至少有一道题被这一对孩子都解出.

证明：有一道题，至少有3个女孩和至少有3个男孩都解出.

证明 假设每道题被至多2个男孩或至多2个女孩解出.

设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 为所有至多2个女孩解出的题目的集合，

$B=\{A_{k+1},A_{k+2},\cdots,A_{k+m}\}$ 为不在 A 中出现且至多2个男孩解出的题目的集合.

21个男孩分别记为 $p_1,p_2,\cdots,p_{21}$，21个女孩分别记为 $q_1,q_2,\cdots,q_{21}$，另设共有 x_j 个选手解出 A_j，$1\leqslant j\leqslant k+m$.由已知，有

$x_1+x_2+\cdots+x_{k+m}\leqslant 6\times 42=252.$

不妨设每个题目至少被一个男孩和一个女孩解出，从而

$x_j\geqslant 2,1\leqslant j\leqslant k+m.$

将解出同一个题目的 p_i、q_j 为一个组合，由已知，共有 21^2 个组合.对 A_j 而言，至多有

$\max\{(x_j-1)\times 1,(x_j-2)\times 2\}\leqslant 2x_j-3$ 个组合同时解出 A_j.所以，$21^2\leqslant(2x_1-3)+(2x_2-3)+\cdots+(2x_{k+m}-3)=2(x_1+x_2+\cdots+x_{k+m})-3k\leqslant 2\times 6\times 42-3(k+m)$.

从而，$k+m\leqslant 21$. (1)

另一方面，对任意 p_j，在 A 中至多做出6道题，故至多有 $2\times 6=12$ 个女孩与 p_j 各共同解出了 A 中某个题.所以，至少有 $21-12=9$ 个女孩与 p_j 各同时做出了 B 中某题，即 p_j 必解出了 B 中某个题.而 B 中某个题至多被2个男孩解出，从而 $21\leqslant 2m$，即 $m\geqslant 11$.

同理，$k\geqslant 11$.

于是，$m+k\geqslant 22$.

此与(1)矛盾，故命题成立.

例 23 （2003年中国奥林匹克题）某公司需要录用一名秘书，共有10人报名，公司经理决定按照求职报名的顺序逐个面试，前3个人面试后一定不录用.自第4个人开始将他与前面面试过的人

相比较，如果他的能力超过了前面所有已面试过的人，就录用他，否则就不录用，继续面试下一个. 如果前 9 个人都不录用，那么就录用最后一个面试的人.

假定这 10 个人的能力各不相同，可以按能力由强到弱排为第 1，第 2，……，第 10. 显然该公司到底录用哪一个人，与这 10 个人报名的顺序有关. 大家知道，这样的排列共有 10！种. 我们以 A_k 表示能力第 k 的人能够被录用的不同报名顺序的数目，以 $\frac{A_k}{10!}$ 表示他被录用的可能性.

证明：在该公司经理的方针之下，有

(1)$A_1>A_2>\cdots>A_8=A_9=A_{10}$；

(2)该公司有超过 70% 的可能性录取到能力最强的 3 个人之一，而只有不超过 10% 的可能性录用到能力最弱的 3 个人之一.

证明 将前 3 个面试者中能力最强的排名名次记为 a. 显然 $a\leqslant 8$. 将此时能力排名第 k 的人被选上的排列集合记作 $A_k(a)$，相应的排列数目记作 $|A_k(a)|$.

(1)易知，当 $a=1$ 时，必然放过前面 9 个人，录用最后一个面试的人，此时除能力第 1 的人之外，其余各人机会均等，不难算得

$|A_k(1)|=3\times 8!:=r_1, k=2,3,\cdots,10$，其中，“:=”表示“记为”.

当 $2\leqslant a\leqslant 8$ 时，对于 $a\leqslant k\leqslant 10$，能力排名第 k 的人无录用机会，对于 $1\leqslant k<a$，此时机会均等.

事实上，此时能力排名第 a 的人排在前三个，有 3 种选择位置的办法. 而能力排名第 1 至第 $a-1$ 的人都排在后 7 个位置上，并且谁位于他们之首就是谁被录用，有排法 $C_7^{a-1}(a-2)!$ 种；其余 $10-a$ 个人可以在剩下的位置上任意排列，有$(10-a)!$ 种排法. 故有

$$|A_k(a)|=\begin{cases}3C_7^{a-1}(a-2)!\,(10-a)!:=r_a, & k=1,\cdots,a-1;\\ 0, & k=a,\cdots,10.\end{cases}$$

上述结果表明：

$$|A_8|=|A_9|=|A_{10}|=r_1=3\times 8!>0; \quad ①$$

$$|A_k|=r_1+\sum_{a=k+1}^{8}r_a, k=2,\cdots,7; \quad ②$$

$$|A_1|=\sum_{a=2}^{8}r_a. \quad ③$$

由式①和②知

$|A_2|>|A_3|>\cdots>|A_8|=|A_9|=|A_{10}|>0$；

而由式②和③知

$|A_1|-|A_2|=r_2-r_1=3\times 7\times 8!-3\times 8!>0$.

综合上述，问题(1)获证.

(2)由式①知

$$\frac{|A_8|+|A_9|+|A_{10}|}{10!}=\frac{3\times r_1}{10!}=\frac{3\times 3\times 8!}{10!}=10\%,$$

所以，录用到能力最弱的三人之一的可能性等于 10%.

由式②和③可知

$$|A_1|=\sum_{a=2}^{8}r_a=\sum_{a=2}^{8}3C_7^{a-1}(a-2)!\,(10-a)!$$

$$=3\times 7!\sum_{a=2}^{8}\frac{(9-a)(10-a)}{a-1}$$

$$=3\times 7!\ \sum_{s=1}^{7}\frac{(8-s)(9-s)}{s}$$

$$=3\times 7!\ \times\left(56+21+10+5+\frac{12}{5}+1+\frac{2}{7}\right)$$

$$=3\times 7!\ \times 95\frac{24}{35}>3\times 7!\ \times 95\frac{2}{3}$$

$$=287\times 7!.$$

$$|A_2|=r_1+\sum_{a=3}^{8}r_a$$

$$=3\times 8!\ +3\times 7!\ \times\left(21+10+5+\frac{12}{5}+1+\frac{2}{7}\right)$$

$$=3\times 7!\ \times 47\frac{24}{35}>3\times 7!\ \times 47\frac{2}{3}=143\times 7!.$$

$$|A_3|=r_1+\sum_{a=4}^{8}r_a$$

$$=3\times 8!\ +3\times 7!\ \times\left(10+5+\frac{12}{5}+1+\frac{2}{7}\right)$$

$$=3\times 7!\ \times 26\frac{24}{35}>3\times 7!\ \times 26\frac{2}{3}=80\times 7!.$$

所以，$\dfrac{|A_1|+|A_2|+|A_3|}{10!}>\dfrac{287+143+80}{720}=\dfrac{510}{720}=\dfrac{17}{24}>70\%$，

即录用到能力最强三人之一的可能性大于 70%.

例 24 (2001 年中国奥林匹克题)在正 n 边形的每个顶点上各停有 1 只喜鹊，偶受惊吓，众喜鹊都飞去. 一段时间后，它们又都回到这些顶点上，仍是每个顶点上 1 只，但未必都回到原来的顶点. 求所有正整数 n，使得一定存在 3 只喜鹊，以它们前后所在的顶点分别形成的三角形或同为锐角三角形，或同为直角三角形，或同为钝角三角形.

解法 1 当 $n=3,4$ 时，结论显然成立.

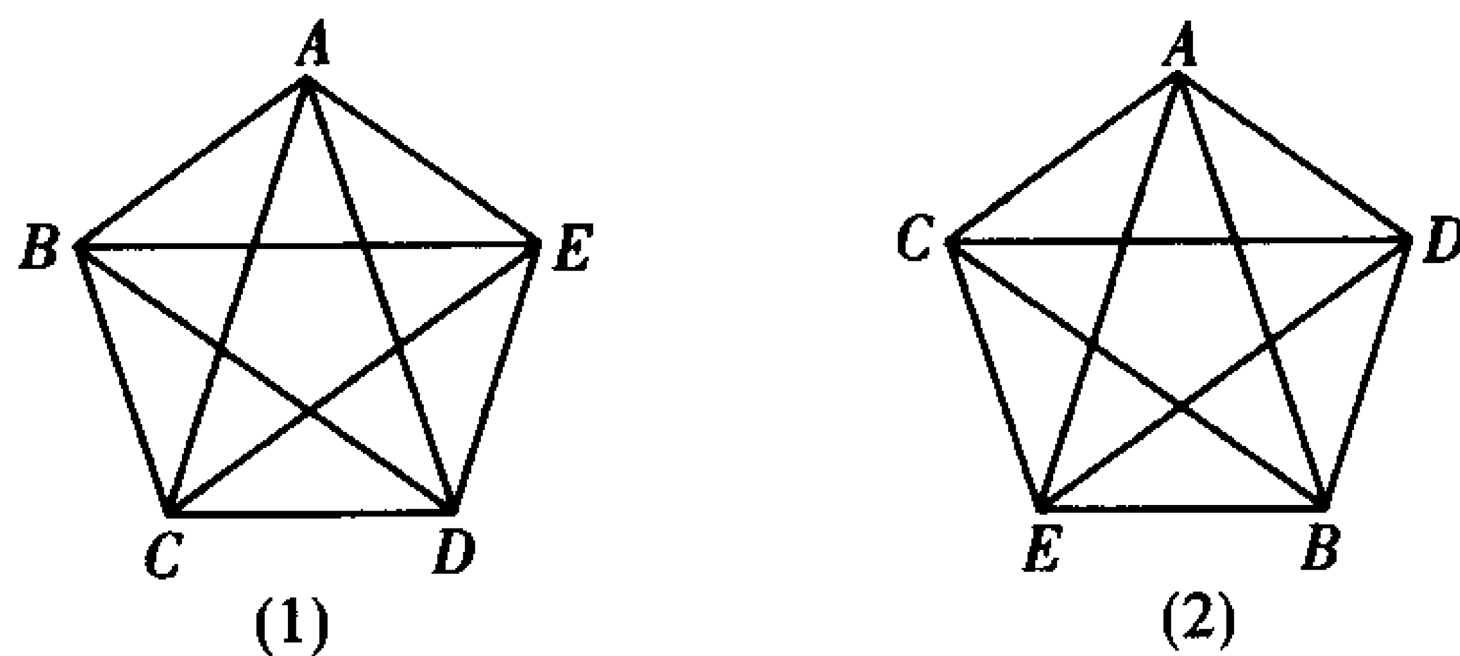


图 14 - 3

当 $n=5$ 时，连出 5 条对角线的正五边形中，恰有钝角三角形与锐角三角形各 5 个. 当 5 只喜鹊 $A、B、C、D、E$ 飞落前后的状态如图 14 - 3 所示时，锐角三角形与钝角三角形互变，不满足题中要求. 故知 $n=5$ 不行.

当 $n=2m,m\geqslant 3,m\in\mathbf{N}$ 时，取正 n 边形的一对相对顶点 A 和 B 并考察从这两点飞起的两只喜鹊(仍称之为 A 和 B)的落点. 若喜鹊 A 和 B 的落点仍是一对相对顶点，则可任取另一只喜鹊 C，于是，$A、B、C$ 三只喜鹊飞落前后所占据的顶点都构成直角三角形. 若喜鹊 A 和 B 的落点 $A'、B'$ 不是相对顶点，则可记 A' 的相对顶点为 C'，并记返回后落在 C' 的喜鹊是从点 C 飞起的. 于是，$A、B、C$ 三只喜

鹊飞落前后所占据的顶点都构成直角三角形. 这就证明了所有不小于 4 的偶数 n 都满足要求.

设 $n=2m+1, m\geqslant 3, m\in\mathbf{N}$. 这时图(1)中没有直角三角形. 让我们来证明如下引理.

引理　当 $n=2m+1, m\geqslant 3$ 时,连出所有对角线的正 n 边形中,钝角三角形的个数多于所有三角形个数的一半.

事实上,设正 n 边形为 $A_1A_2\cdots A_n$. 这时,以对角线 A_1A_{j+1} 为最长边的钝角三角形的个数为 $j-1$. 所以,钝角三角形的总数为

$$S=(2m+1)(1+2+\cdots+(m-1))=\frac{1}{2}(2m+1)m(m-1).$$

正 n 边形中三角形总数为

$$t=C_n^3=\frac{1}{3}(2m+1)m(2m-1).$$

因为

$$m-1>\frac{1}{3}(2m-1)\Leftrightarrow 3m-3>2m-1\Leftrightarrow m>3-1=2.$$

后者显然成立,故知引理成立.

由引理可知,当 $n=2m+1, m\geqslant 3$ 时,总存在 3 只喜鹊,它们飞落前后所在的 3 个顶点都构成钝角三角形. 这表明不小于 7 的所有奇数都满足题中的要求.

综上可知,满足题中要求的所有自然数是

$n\geqslant 3, n\neq 5$.

解法 2

前面证明均同解法 1,只是将 $n=2m+1, m\geqslant 3$ 的情形改证如下:

由于将正 n 边形连同顶点上落的喜鹊一起旋转时,三角形的形状不变,故可假设一只喜鹊 A 飞走后返回时仍然落在的原处. 过 A 所在的顶点作正 n 边形的外接圆的一条直径 AA',于是,这条直径两侧各有 m 只喜鹊. 易见,位于直径同侧的任何两只喜鹊与 A 一起所在的 3 个顶点都构成钝角三角形. 由于 $m\geqslant 3$,所以,位于直径同侧的 m 只喜鹊中,飞走返回时总有两只 B 和 C 仍在直径的同一侧,于是,A、B、C 这三只喜鹊飞落前后所在的 3 个顶点都构成钝角三角形. 这就证明了不小于 7 的所有奇数都满足题中的要求.

所以,满足题中要求的所有自然数就是

$n\geqslant 3, n\neq 5$.

【解题尝试】

A 组

1. (2003 年安徽省竞赛题)三位数中,如果十位上的数字比百位上的数字和个位上的数字都小,则称这个数为凹数,如 504、746 等都是凹数. 那么,各个数位上无重复数字的三位数中凹数共有________个.
2. (2001 年世界城际间联赛题)三堆石头,一堆 51 块,另一堆 49 块,最后一堆 5 块. 任何两堆可合为一堆,也可将有偶数块石头一堆,分为块数相等的两堆. 问能不能用这两种步骤,将这三堆石头变为各有一块的一百零五堆?

3. (2000年第26届俄罗斯奥林匹克题)证明:可以把全体自然数之集分为100个非空的子集,使得对任何3个满足关系式$a+99b=c$的自然数a、b、c,都可以从中找出两个数属于同一子集.
4. (2000年世界城际间联赛题)两人在3×1000的棋盘上,依次放棋子,先行的人的棋子是1×2的长方形,后行的人的棋子是2×1的长方形,不能行走的人作负.问谁有必胜之术?取胜的方法是怎样的?
5. (2000年世界城际间联赛题)一辆公车,在下午12:20开始一次长达一百公里的旅途,车上有一部电脑,在下午1:00,2:00,3:00,4:00,5:00和6:00,都说:"假如以后的平均速度和以前的平均速度一样,则还要一小时才抵达目的地."它可能对吗?如可能的话,在下午6:00时,公车走了多远?
6. (2003年第44届IMO试题)设$S=\{1,2,\cdots,1000000\}$,A为S的一个恰包含101个元素的子集合.证明:在S中存在数$t_1,t_2,\cdots,t_{100}$,使得下列集合

   $A_j=\{x+t_j\mid x\in A\},j=1,2,\cdots,100$

   中的任意两个都不相交.
7. (2004年第30届俄罗斯奥林匹克题)办公室里装有2004部电话机,其中任意2部都用4种颜色之一的导线相连.现知4种颜色的导线都有,问是否一定可以找到某几部电话机,在相互联结它们的导线中恰好有3种不同的颜色?
8. (2001年上海市竞赛题)某出版公司为一本畅销书定价如下:

   $$C(n)=\begin{cases}12n,若\ 1\leqslant n\leqslant24;\\11n,若\ 25\leqslant n\leqslant48;\\10n,若\ n\geqslant49.\end{cases}$$

   这里n表示订购书的数量,$C(n)$是订购n本书所付的钱款数(单位:元).

   (1)有多少个n,会出现买多于n本书比恰好买n本书所花的钱少?

   (2)若一本书的成本是5元,现有两人来买书,每人至少买1本,两人共买60本,则出版公司至少能赚多少钱?至多能赚多少钱?
9. (2000年第26届俄罗斯奥林匹克题)在$2n\times2n$方格表的某些方格中放有黑色围棋子或白色围棋子,每格至多放一枚棋子.首先,从方格表中取下所有这样的黑色围棋子,只要它们与某一枚白色围棋子同列;然后,再从方格表中取下所有这样的白色围棋子,只要它们同某一枚剩下的黑色围棋子同行.证明:在方格表中剩下的棋子中,或者黑色围棋子不多于n^2个,或者白色围棋子不多于n^2个.
10. (2000年第26届俄罗斯奥林匹克题)沿着圆周放着100个整体互质的自然数,允许将其中任何一个数加上它的两侧邻数的最大公约数.证明:可以借助于这样的操作,使得所有的数全都变为两两互质.

B组

1. (2004年第30届俄罗斯奥林匹克题)坐标平面上的每个整点都被染为3种颜色之一,且3种颜色的点都有.证明:可找到1个直角三角形,它的3个顶点都是3种不同颜色的点.
2. (2002年罗马尼亚为IMO和巴尔干地区奥林匹克选拔考试供题(第四轮))设正整数序列$\{a_n\}$满足对于所有$n\geqslant2$,a_{n+1}是$a_{n-1}+a_n$的最小素因数,实数x的小数部分是按$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$的次序写出的.证明:$x$是有理数.

3. (1994年第20届俄罗斯奥林匹克决赛题)某班共有30名学生,每一名学生在班内都有同样多的朋友.试问:比自己的大多数朋友的成绩都要好的学生最多可能有多少名(假定对该班任意两个学生的成绩,都可以比出谁好谁差)?
4. (2002年第43届IMO试题)设n为任意给定的正整数,T为平面上所有满足$x+y<n$,x、y为非负整数的点(x,y)所组成的集合,T中每一点(x,y)均被染上红色或蓝色,满足:若(x,y)是红色,则T中所有满足$x'\leqslant x$、$y'\leqslant y$的点(x',y')均为红色,如果n个蓝点的横坐标各不相同,则称这n个蓝点所组成的集合为一个X-集;如果n个蓝点纵坐标各不相同,则称这n个蓝点所组成的集合为一个Y-集.证明:X-集的个数和Y-集的个数一样多.
5. (2003年美国奥林匹克题)设$n\neq 0$,对任何整数数列$A=\{a_i\}$,$0\leqslant a_i\leqslant i$,$i=0,1,2,\cdots,n$,定义另一个数列$t(A)=\{t(a_i)\}$.这里$t(a_i)$表示数列$A$中,在$a_i$之前且不同于$a_i$的项数.证明:从任何给定的数列$A$出发,经过少于$n$次$t$变换,就可得到一个数列$B$,使得$t(B)=B$.

第三篇 部署优势“兵力”

——融通巧握几种妙解技能

解题，就好像游泳一样，是一种实际技能.

——波利亚(Polya)

数学竞赛是才智的角逐.因此，一些有固定路线可以遵循的问题，不属于数学竞赛.竞赛需要的是“巧”，是出奇制胜的“野路子”.

——单墫

应用规则要得心应手，运用自如；并且注意到规则所适用的场合，有选择、有批判地加以应用；不为规则的词句而迷失本意，或本末倒置坐失良机，这就是精通

——波利亚(Polya)

竞赛题代表了活的数学，解竞赛题既离不开数学知识和一般的思维规律，也离不开一些方法和技能的运用.

一道较好的竞赛试题，如果它的解法不能体现数学的美，缺乏简洁、奇异与独创，那么在挑剔的命题组成员前是很难获得通过的.这些试题在趣味性和技巧上都是严格把关的，因而，在数学竞赛中充满着眼花缭乱的技能技巧：估算、算两次、叠加、蜕化、引参、赋值、配凑、分离、分拆、排序、逐步调整等等，令人目不暇接.显然，数学竞赛的技能技巧不是低层次的一招一式或妙手偶得的雕虫小技，它既是使用数学技能的技巧，又是创造数学技能的技巧.更确切地说，这是一种数学创造力，是一种高思维层次、高智力水平的艺术，是一种独立于史诗、音乐、绘画之外的数学美.①

① 罗增儒主编.数学竞赛教程[M].西安：陕西师范大学出版社，1993：83

第15章　运算性技能

【学习目标】

数学解题少不了运算，运算既要快捷，又要准确，这在数学竞赛中显得更为突出. 一般地，每一道竞赛题都有一定的运算量，通过深层次的思维减少运算量，也有一些如下的技能.

【解题钥匙】

1. 估算

估算，实质是一种快速的近似计算，它的基本特点是对数或式作适当扩大或缩小，从而对运算结果确定出一个范围，或作出一个估计. 更本质地看，估算应该是一种数学意识，是在蜂拥而来的众多信息面前，迅速捕捉一批有用或关键信息的那种数学素质，它往往可以跳过繁冗的逻辑推理过程，直接给出结果，或将解题的关键"一眼看穿".

估算是一种随着科学和数学发展而呈现出来需要掌握的重要技能.

例1　(第11届"希望杯"邀请赛题)设 $a>b>c,n\in\mathbf{N}$，且 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}$ 恒成立，则 n 的最大值为(　　).

A. 2　　　B. 3　　　C. 4　　　D. 5

解　选C. 理由：$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}\Leftrightarrow\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\geqslant n$，从而　$n\leqslant\left[\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\right]_{\min}$.

而　$\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}=2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant4$，且当 $2b=a+c$ 时，不等式左边的值等于4.

于是，$\left[\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\right]_{\min}=4$.

故　$n\leqslant4$，即 n 的最大值是4.

例2　(2004年高考湖南卷题)农民收入由工资性收入和其他收入两部分构成. 2003年某地区农民人均收入为3150元(其中工资性收入为1800元，其他收入为1350元)，预计该地区自2004年起的5年内，农民的工资性收入将以每年6%的年增长率增长，其他收入每年增加160元. 根据以上数据，2008年该地区农民人均收入介于(　　).

A. 4200元～4400元　　　B. 4400元～4600元

C. 4600元～4800元　　　D. 4800元～5000元

解　选B. 理由：依题意，2008年该地区农民人均收入为 $1800\times(1+6\%)^5+1350+5\times160$，对 $(1+6\%)^5$ 的展开式进行估算处理.

$1800\times(1+6\%)^5+1350+5\times160>1800\times(1+5\times0.06+10\times0.06^2)+1350+800=4554.8$,

$1800\times(1+6\%)^5+1350+5\times160<1800\times(1+5\times0.06+10\times0.06^2+0.03)+2150=4560.2$.

所以,2008 年该地区农民人均收入介于 4400 元～4600 元.

例 3 (1994 年全国高考题)已知球面上 A、B、C 三点的截面和球心的距离等于球半径的一半,且 $AB=BC=CA=2$,则球面面积是(　　).

A. $\frac{16\pi}{9}$　　B. $\frac{8\pi}{3}$　　C. 4π　　D. $\frac{64\pi}{9}$

解 选 B. 理由:先算出球半径 R,然后求球面积是解选择题的"小题大做",其实对 R 作估算即可排除三个假支. 注意到 R 不小于$\triangle ABC$ 的外接圆半径$\frac{2\sqrt{3}}{3}$,故得 $S=4\pi R^2\geqslant 4\pi\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{16\pi}{3}$,则 A、B、C 的值都小于$\frac{16\pi}{3}$.

例 4 如图 15-1,正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$,$S_{\triangle A_1B_1C_1}=4\sqrt{3}$,$D$、$E$ 分别是 AB 和 AC 边上的动点,且 $DE/\!/BC$,那么截面 A_1DE 与截面 B_1C_1ED 在底面 $A_1B_1C_1$ 上的射影面积之和为(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

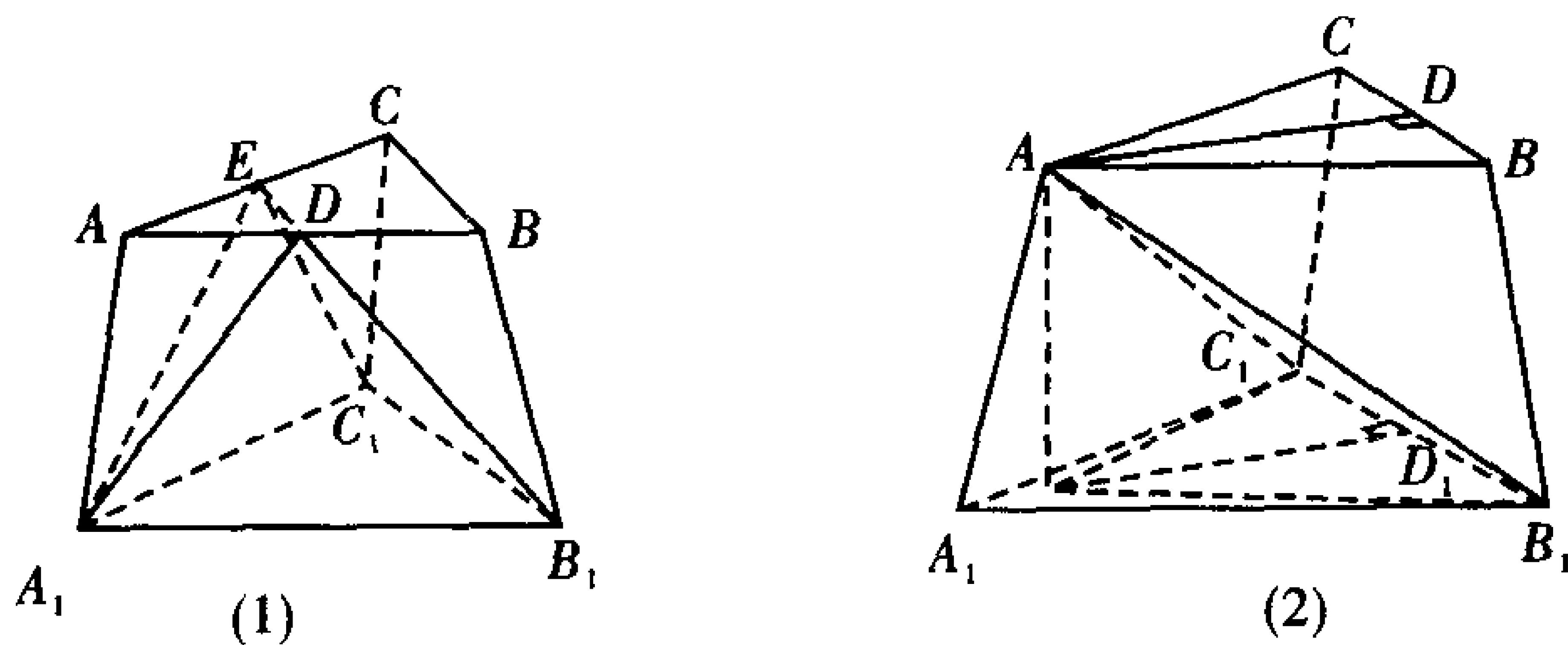


图 15-1

解 选 D. 理由:当 $DE\to A$ 时,过 A 作 $AE\perp$平面 $A_1B_1C_1$,则所求的射影面积之和为 $S_{\triangle EB_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot B_1C_1\cdot ED_1>\frac{1}{2}\cdot B_1C_1\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

又 A、B、C 的值均小于 $2\sqrt{3}$,故选 D. 若令 $DE\to BC$ 进行估算,则较繁.

例 5 (1999 年全国高考题)如图 15-2,在多面体 $ABCDEF$ 中,已知面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形,$EF/\!/AB$,$EF=\frac{3}{2}$,EF 与面 AC 的距离为 2,则该多面体的体积为(　　).

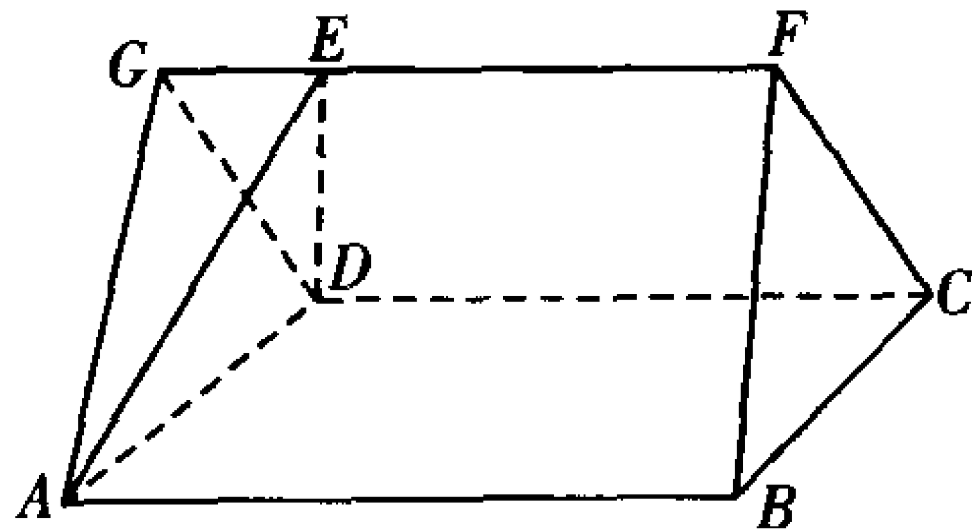


图 15-2

A. $\frac{9}{2}$　　B. 5　　C. 6　　D. $\frac{15}{2}$

解 选D. 理由：如图，取直三棱柱 $BCF-AGD$ 作估算，则 $V=V_{BCF\text{-}AGD}-V_{E\text{-}AGD}=S_{\triangle BCF}\cdot|AB|-\frac{1}{3}S_{\triangle AGD}\cdot|EG|=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot3-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{3}{2}=9-\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$.

或用近似值进行估算，易求 $V_{E\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\cdot3^2\cdot2=6$，则可判断所求多面体的体积必大于6，只有D符合.

例6 （2000年全国高考题）解不等式 $\sqrt{x^2+1}\leqslant ax+1(a>0)$.

解 若一般对 $ax+1$ 是大于零、小于零、等于零进行分类，解答过程复杂，失误多. 若先对 $\sqrt{x^2+1}$ 进行估算，解答过程会显得简洁.

依题意：$ax+1\geqslant\sqrt{x^2+1}\geqslant1$

有 $ax\geqslant0$. 又 $a>0$，则 $x\geqslant0$.

原不等式可化为：$\begin{cases}x\geqslant0,\\x^2+1\leqslant(1+ax)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant0,\\(a^2-1)x+2a\geqslant0.\end{cases}$

当 $0<a<1$ 时，不等式解集为

$\{x|0\leqslant x\leqslant\frac{2a}{1-a^2}\}$；

当 $a\geqslant1$ 时，不等式解集为 $\{x|x\geqslant0\}$.

例7 等差数列 $\{a_n\}$，$a_1>0$，前 n 项和为 S_n，且 $S_9>0$，$S_{10}<0$，当 n 为何值时，S_n 最大？

解 由于 $S_n=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5>0$，

$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=5(a_5+a_6)<0$，

得 $a_1>a_2>\cdots>a_5>0>a_6>a_7>\cdots$，

故 当 $n=5$ 时，S_n 最大.

结果的对错除了直接检查运算过程之外，还可用估算法进行检验.

检验 因为 $S_n=f(n)$ 的图象是过原点的抛物线，且横坐标为自然数，又该数列公差小于零，故抛物线开口向下，与横轴的一个交点的横坐标为零，另一交点的横坐标在区间(9,10)内，可见其顶点横坐标在区间(4.5,5)内，可知 $n=5$ 时，S_n 最大.

例8 （1992年全国高中联赛题）求证：

$16<\sum\limits_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<17$.

证明 由 $\sqrt{k-1}<\sqrt{k}<\sqrt{k+1}$ 得

$\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<2\sqrt{k}<\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$，$k\in\mathbf{N}_+$.

从而 $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$.

即得 $2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$

于是 $2\sqrt{n+1}-\sqrt{m}<\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{m-1})$，其中 $1\leqslant m\leqslant n$，m 为正整数.

取 $n=80, m=1$，得 $16<\sum\limits_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

取 $n=80, m=2$，得 $1+\sum\limits_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{80}-1)+1<2\sqrt{81}-1=17$. 故 $16<\sum\limits_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<17$.

例 9 （2001 年全国高中联赛题）函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域为________.

解 填 $[1,\frac{3}{2})\cup[2,+\infty)$. 理由：

$y=x+\sqrt{x^2-3x+2}\Rightarrow\sqrt{x^2-3x+2}=y-x\geqslant 0$.

两边平方得 $(2y-3)x=y^2-2$.

从而，$y\neq\frac{3}{2}$ 且 $x=\frac{y^2-2}{2y-3}$.

由 $y-x=y-\frac{y^2-2}{2y-3}\geqslant 0\Rightarrow\frac{y^2-3y+2}{2y-3}\geqslant 0\Rightarrow 1\leqslant y<\frac{3}{2}$ 或 $y\geqslant 2$.

任取 $y\geqslant 2$，令 $x=\frac{y^2-2}{2y-3}$，易知 $x\geqslant 2$. 于是，$x^2-3x+2\geqslant 0$ 且 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$.

任取 $1\leqslant y<\frac{3}{2}$，同样令 $x=\frac{y^2-2}{2y-3}$，易知 $x\leqslant 1$. 于是，$x^2-3x+2\geqslant 0$ 且 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$. 因此，所求函数的值域为 $[1,\frac{3}{2})\cup[2,+\infty)$.

例 10 （2004 年全国高中联赛题）在平面直角坐标系 xOy 中，y 轴正半轴上的点列 $\{A_n\}$ 与曲线 $y=\sqrt{2x}(x\geqslant 0)$ 上的点列 $\{B_n\}$ 满足 $|OA_n|=|OB_n|=\frac{1}{n}$，直线 A_nB_n 在 x 轴上的截距为 a_n，点 B_n 的横坐标为 b_n，$n\in\mathbf{N}_+$. 证明：

(1) $a_n>a_{n+1}>4$，$n\in\mathbf{N}_+$.

(2) 存在 $n_0\in\mathbf{N}_+$，使得对任意的 $n>n_0$ 都有

$$\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_2}+\cdots+\frac{b_n}{b_{n-1}}+\frac{b_{n+1}}{b_n}<n-2004.$$

证明 (1) 易知 $A_n(0,\frac{1}{n})$，$B_n(b_n,\sqrt{2b_n})(b_n>0)$. 由 $|OB_n|=\frac{1}{n}$，得 $b_n^2+2b_n=(\frac{1}{n})^2$，故

$b_n=\sqrt{(\frac{1}{n})^2+1}-1$，$n\in\mathbf{N}_+$.

其次，直线 A_nB_n 在 x 轴上的截距 a_n 满足

$(a_n-0)(\sqrt{2b_n}-\frac{1}{n})=(0-\frac{1}{n})(b_n-0)$，所以，$a_n=\frac{b_n}{1-n\sqrt{2b_n}}$，$n\in\mathbf{N}_+$.

因为 $2n^2b_n=1-n^2b_n^2>0$，$b_n+2=\frac{1}{n^2b_n}$，所以，

$$a_n=\frac{b_n(1+n\sqrt{2b_n})}{1-2n^2b_n}=\frac{b_n(1+n\sqrt{2b_n})}{1-(1-n^2b_n^2)}$$
$$=\frac{1}{n^2b_n}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2b_n}}=b_n+2+\sqrt{2(b_n+2)},$$

$$a_n=\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}+1+\sqrt{2+2\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}}.$$

因为$\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>0$,所以,对任意的$n\in\mathbf{N}_+$,都有$a_n>a_{n+1}>4$.

(2)设$c_n=1-\frac{b_{n+1}}{b_n}$,$n\in\mathbf{N}_+$,则

$$c_n=\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}-\sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+1}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}-1}$$

$$=n^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}+1}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}+\sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+1}}$$

$$>\frac{2n+1}{(n+1)^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}}\right]$$

$$>\frac{2n+1}{2(n+1)^2}.$$

因为$(2n+1)(n+2)-2(n+1)^2=n>0$,所以

$c_n>\frac{1}{n+2}$,$n\in\mathbf{N}_+$.

设$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$,$n\in\mathbf{N}_+$.

当$n=2^k-2>1(k\in\mathbf{N}_+)$时,

$$S_n>\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$>2\times\frac{1}{2^2}+2^2\times\frac{1}{2^3}+\cdots+2^{k-1}\times\frac{1}{2^k}=\frac{k-1}{2}.$$

所以,取$n_0=2^{4009}-2$,对任意的$n>n_0$都有

$$\left(1-\frac{b_2}{b_1}\right)+\left(1-\frac{b_3}{b_2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)$$

$$=S_n>S_{n_0}>\frac{4009-1}{2}=2004.$$

故$\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_2}+\cdots+\frac{b_n}{b_{n-1}}+\frac{b_{n+1}}{b_n}<n-2004$,$n>n_0$.

2. 算两次[①]

算两次指的是对同一数学对象,当用两种不同的方法将其整体分为部分时,则按两种方式所求得的总和应是相等的.因此,算两次不仅是将同一个量从两个不同的角度计算两次,利用"殊途同归"的等量关系达到"出奇制胜"的目的;而是体现了从两个方面计算的解题方法,这其中蕴涵着换一个角度看问题的转换思想.算两次的技能,不仅是数学工作者进行创造发明的法宝,而且也是竞赛者进

① 单墫.算两次[M].合肥:中国科学技术大学出版社,1992年.

行解题的重要法宝．算两次原理又称为富比尼原理．

例 11 直线 l 过$\triangle ABC$ 的重心 G，与边 AB，AC 分别相交于 B_1，C_1，$\frac{AB_1}{AB}=\lambda$，$\frac{AC_1}{AC}=\mu$. 求证：$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3$.

证明 作 BC 边上的中线 AD，G 必在 AD 上．可考虑用三角形的面积处理．设$\triangle ABC$ 的面积为 1，$\triangle AB_1C_1$ 的面积为 S. 下面用两种方法来计算 S.

一方面，$S=\frac{S}{1}=\frac{AB_1\times AC_1}{AB\times AC}=\lambda\mu$； ①

另一方面，$S=S_{\triangle AB_1G}+S_{\triangle AGC_1}$， ②

而与①式类似地有

$S_{\triangle AB_1G}=\frac{2\lambda}{3}S_{\triangle ABD}=\frac{\lambda}{3}$，$S_{\triangle AGC_1}=\frac{\mu}{3}$，代入②式得 $S=\frac{\lambda+\mu}{3}$.

综合以上两个方面，可得 $\lambda\mu=\frac{\lambda+\mu}{3}$，两边同乘$\frac{3}{\lambda\mu}$即可证得原式．

例 12 设 f 为$[0,1]$上的函数，满足：

(1) $f(0)=0$，$f(1)=1$.

(2) 对所有 x、$y\in[0,1]$，$x\leqslant y$，$f(\frac{x+y}{2})=(1-a)f(x)+af(y)$，其中 a 是一个实数，且 $0\leqslant a\leqslant 1$.

求 $f(\frac{1}{7})$.

解 由条件(2)得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=(1-a)f(0)+af(1)=a, \qquad (*)$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=af\left(\frac{1}{2}\right)=a^2,$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right)=(1-a)f\left(\frac{1}{2}\right)+af(1)=2a-a^2.$$

由于有了 $f\left(\frac{1}{4}\right)$和 $f\left(\frac{3}{4}\right)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$可以用另一种方法来计算：

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{2}\right)=(1-a)a^2+a(2a-a^2). \qquad (**)$$

综合(*)、(**)式得

$a=(1-a)a^2+a(2a-a^2)$，

从而 $a(a-1)(a-\frac{1}{2})=0$，

求得 $a=\frac{1}{2}$，

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}[(f(x)+f(y)].$$

特别地，取 $x=0$，得 $f\left(\frac{y}{2}\right)=\frac{1}{2}f(y)$，

于是 $f\left(\frac{2}{7}\right)=2f\left(\frac{1}{7}\right)$，

$$f\left(\frac{4}{7}\right)=2f\left(\frac{2}{7}\right)=4f\left(\frac{1}{7}\right).$$

另一方面，

$$f\left(\frac{4}{7}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{7}+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{7}\right)+1\right],$$

所以 $4f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{7}\right)+1\right]$，

故 $f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7}$.

例 13 （1989 年第 6 届巴尔干数学竞赛题）直线 l 分别交 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 于 B_1，C_1，并且 $\triangle ABC$ 的重心 G 与 A 在 l 的同侧. 证明：

$$S_{BB_1CC_1}+S_{CC_1GB_1}\geqslant\frac{4}{9}S_{ABC}. \quad ①$$

证法 1 过 G 作 l 的平行线 l'，l'，分别交 AB，AC 于 B'_1，C'_1 如图 15-3.

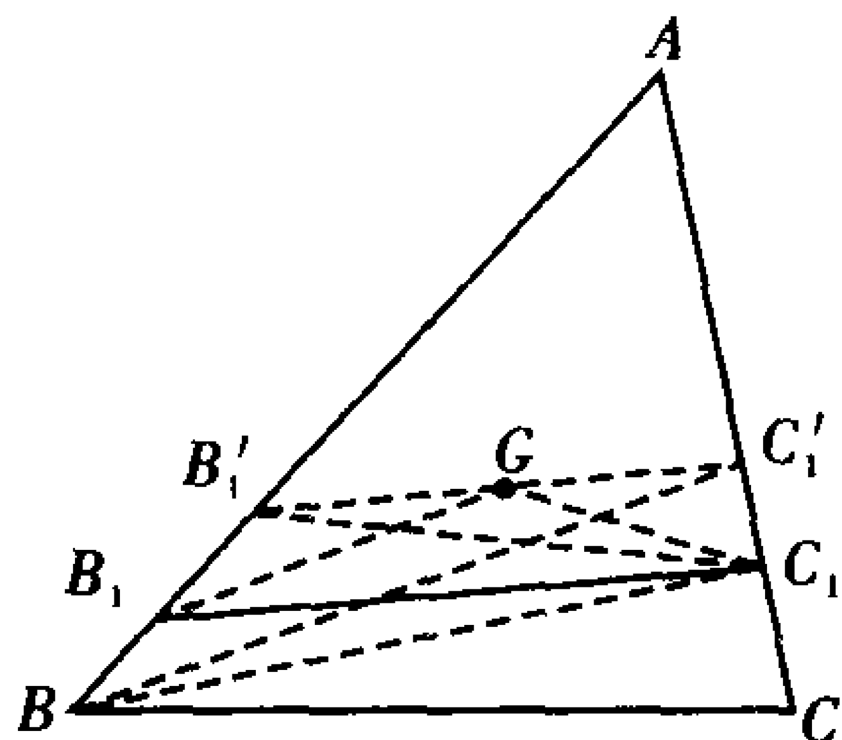


图 15-3

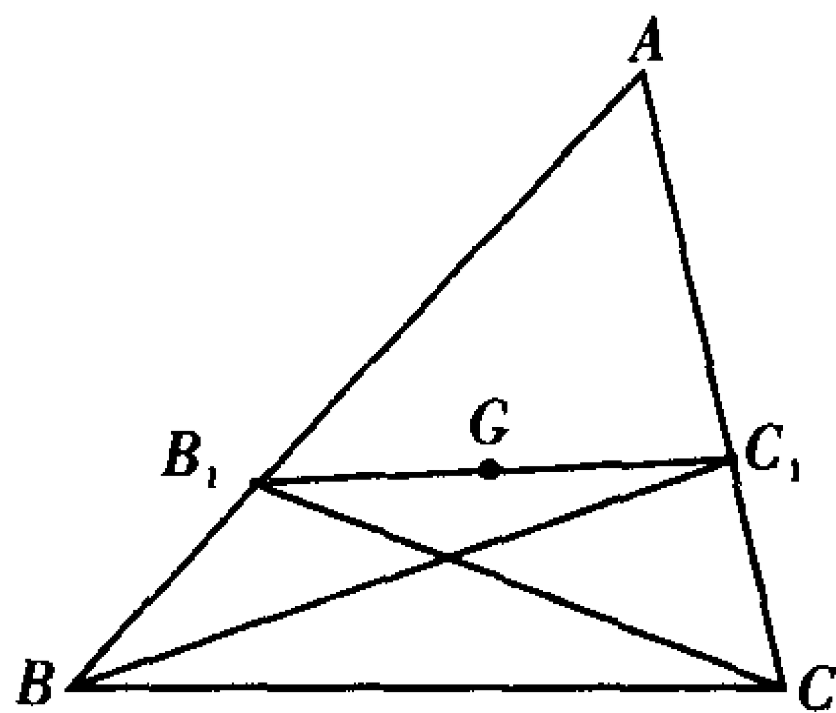


图 15-4

由于 C'_1 到 AB 的距离小于 C_1 到 AB 的距离，所以

$$S_{BB_1CC_1}=S_{BB_1C_1}+S_{B_1CC_1}=S_{BB_1C_1}+S_{B_1B'_1C_1}$$
$$=S_{BC_1B'_1}>S_{BC'_1B'_1}$$

同理，$S_{CC_1GB_1}>S_{CC'_1B'_1}$.

因此要证明①，只需证明

$$S_{BC'_1B'_1}+S_{CC'_1B'_1}\geqslant\frac{4}{9}S_{ABC}.$$

换句话说，我们可以认为 l 过重心 G（否则用 l' 代替 l），在这一条件下来证明①.

在图 15-4 中，设 $\frac{AB_1}{AB}=\lambda$，$\frac{AC_1}{AC}=\mu$，则

$$S_{BC_1B_1}=(1-\lambda)S_{BC_1A}=(1-\lambda)\mu S_{ABC}.$$

同理，$S_{CB_1C_1}=(1-\mu)\lambda S_{ABC}$.

问题化为证明不等式

$$(1-\lambda)\mu+(1-\mu)\lambda\geqslant\frac{4}{9}. \qquad ②$$

由例 11，$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3$，从而 $\lambda+\mu=3\lambda\mu$，

$$(1-\lambda)\mu+(1-\mu)\lambda=\lambda+\mu-2\lambda\mu=\frac{1}{3}(\lambda+\mu)=\frac{1}{9}(\lambda+\mu)\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right)$$

$$\geqslant\frac{4}{9}\sqrt{\lambda\mu}\cdot\sqrt{\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\mu}}=\frac{4}{9}.$$

于是②、①成立.

证法 2 不妨设 $S_{ABC}=1$. 取 BC 的中点 D，连 DB_1，DC_1，AD 如图 15-5，则 G 在 AD 上，

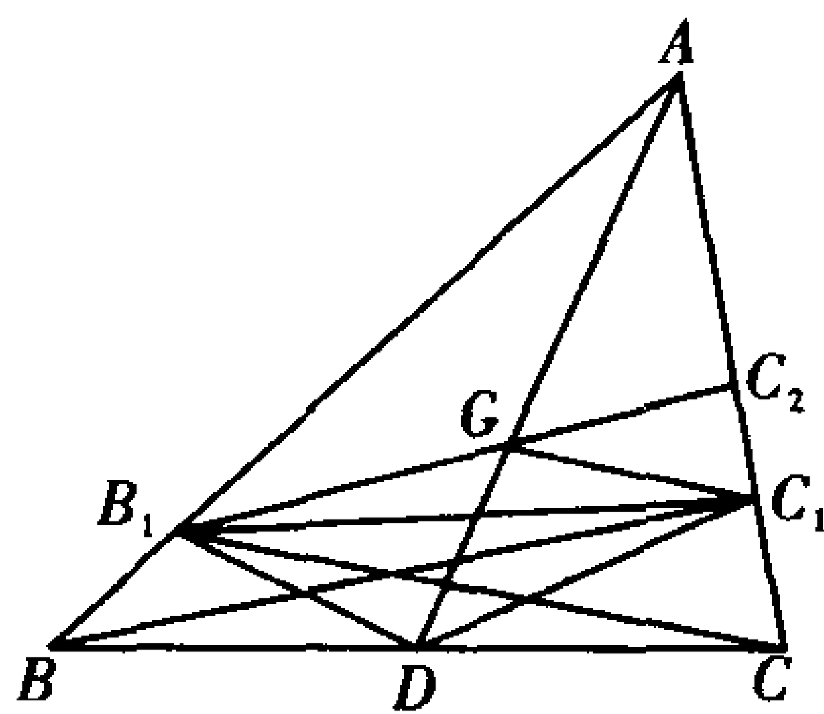


图 15-5

$$\begin{aligned}&S_{BB_1CC_1}+S_{CC_1GB_1}\\&=2S_{GB_1C_1}+S_{BB_1C_1}+S_{CBC_1}\\&=2S_{GB_1C_1}+2S_{BCB_1C_1}-S_{BCB_1}-S_{BCC_1}\\&=2(S_{GB_1C_1}+S_{BCB_1C_1}-S_{DBB_1}-S_{DCC_1})\\&=2(S_{GB_1C_1}+S_{DC_1B_1})=2S_{DC_1GB_1}\\&=2(S_{GB_1D}+S_{GC_1D})=S_{AB_1G}+S_{AGC_1}\\&=\frac{\lambda}{3}+\frac{\mu}{3},\end{aligned}$$

这里 $\lambda=\frac{AB_1}{AB}$，$\mu=\frac{AC_1}{AC}$.

设 B_1G 的延长线交 AC 于 C_2，$\frac{AC_2}{AC}=\mu'$，则由例 11，$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu'}=3$，

而 $\mu\geqslant\mu'$，所以 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\leqslant\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu'}=3$，

$$\frac{\lambda}{3}+\frac{\mu}{3}\geqslant\frac{1}{9}(\lambda+\mu)\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right)\geqslant\frac{4}{9}.$$

注 两种证法都多次将同一块面积用不同的形式表示.

例 14 （1992 年上海市竞赛题）设 n 是给定的自然数. 求所有的正数对 (a,b)，使得 x^2+ax+b 是 $ax^{2n}+(ax+b)^{2n}$ 的因式.

解 设 x_0 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的根，我们从两种不同的角度计算 x_0 的值.

由 $b>0$ 知 $x_0\neq0$，且 x_0 也是方程

$$ax^{2n}+(ax+b)^{2n}=0$$

的根. 从而，$ax_0^{2n}+(-x_0^2)^{2n}=0$，得 $x_0^{2n}=-a$. 解得

$x_0=\sqrt[2n]{a}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+\mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right](k=0,1,2,\cdots,2n-1)$，且 x_0 必为虚数，否则 $-a=x_0^{2n}\geqslant0$，矛盾.

另一方面，$x_0=\frac{-a\pm\sqrt{4b-a^2}\cdot\mathrm{i}}{2}$，故 $\sqrt[2n]{a}\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}=-\frac{a}{2}<0$.

从而得 $\frac{\pi}{2}<\frac{(2k+1)\pi}{2n}<\frac{3\pi}{2}$.

故 $n<2k+1<3n$.

由此可见，当 $n=1$ 时，无解；

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$a=\left[2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]^{\frac{2n}{2n-1}},$$

$$b=x_0\overline{x_0}=|x_0|^2=a^{\frac{1}{n}}=\left[2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]^{\frac{2}{2n-1}}.$$

其中 $n<2k+1<3n, k\in\mathbf{N}$.

例 15 （2001 年第 42 届 IMO 试题）设 n 是大于 1 的奇数，k_1、k_2、…、k_n 为已知整数，对 $1,2,\cdots,n$ 的 $n!$ 个排列中的每一个 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，令 $S(a)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_ia_i$，证明存在两个排列 b、c，$b\neq c$，使得 $n!$ 是 $S(b)-S(c)$ 的因数.

证明 假定每两个排列 b、c，$b\neq c$，$S(b)$ 与 $S(c)$ 关于模 $n!$ 不同余，则对 $n!$ 个排列中的任意排列 a，$S(a)$ 分别同余于 $1,2,3,\cdots,n!-1,n!$，$\sum\limits_{\forall a}S(a)=1+2+3+\cdots+(n!-1)+n!=\frac{(1+n!)\times n!}{2}\neq 0(\bmod n!)$. 另一方面，$\sum\limits_{\forall a}S(a)=\sum\limits_{a}\sum\limits_{i=1}^{n}k_ia_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{a}k_ia_i=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\sum\limits_{a}a_i$，由于 $a_i=1$ 的 a 有 $(n-1)!$ 个，$a_i=2$ 的 a 有 $(n-1)!$ 个，…，$a_i=n$ 的 a 有 $(n-1)!$ 个，所以 $\sum\limits_{a}a_i=(n-1)!\times(1+2+\cdots+n)=n!\cdot\frac{n+1}{2}$，$\sum\limits_{\forall a}S(a)=n!\cdot\frac{n+1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\equiv 0(\bmod n!)$，由两次计算得出互相矛盾的结果，可知原结论成立.

例 16 （《中等数学》2004 年 4 期奥林匹克问题）试求出同时满足下列条件的集合 S 的元素个数的最大值：

(1) S 中的每个元素都是不超过 100 的正整数；

(2) 对于 S 中的任意两个不同的元素 a、b，都存在 S 中的另外一个元素 c，使得 $a+b$ 与 c 的最大公约数等于 1；

(3) 对于 S 中的任意两个不同的元素 a、b，都存在 S 中的另外一个元素 c，使得 $a+b$ 与 c 的最大公约数大于 1.

解 构造 50 个数组：

$(1,100),(2,99),\cdots,(50,51)$，每个数组中的两个数之和是 101.

由于 101 是质数，在 S 中不存在元素 c，使得 101 与 c 的最大公约数大于 1. 因此，在 S 中不可能同时含有上述数组中的同一数组中的两个数. 由抽屉原理可知，集合 S 中元素的个数不大于 50.

另一方面，我们构造集合 $A=\{2,1,3,5,7,\cdots,95,97\}$. 此集合含有 2 和小于 98 的 49 个奇数.

下面说明集合 A 满足题设条件.

对于集合 A 中的任意两个元素 a 和 b：

(i) 若 $a=2$，则 b 是奇数.

若 $b=1$，易见 A 中存在元素 c 满足题设条件；

若 $3\leqslant b\leqslant 95$，则 A 中元素 1 与 $a+b$ 的最大公约数等于 1，A 中元素 $b+2$ 与 $a+b$ 的最大公约数是 $b+2$ 大于 1；

若 $b=97$，易见 A 中存在元素 c 满足题设条件.

(ii) 若 a、b 都不等于 2，则 a、b 都是奇数，$a+b$ 是偶数. 于是 $a+b$ 与 2 的最大公约数是 2 大于 1，

且 $a+b$ 与 1、89、91 中的某个数必互质.

所以,集合 A 满足题设条件.

因此,集合 S 的元素个数的最大值是 50.

3. 叠加

在解题时,先将各部分叠加组合或者先寻找它的若干特别的解,或者先寻找被分割部分的解,然后利用它们的适当叠加组合,以求得该问题的解.这就是我们常采用的叠加法解题①,这也是一种重要的解题技能.

例 17 (2004 年全国高考卷理科第 22 题)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足:

$S_n=2a_n+(-1)^n(n\geqslant 1)$.

(1)写出数列 $\{a_n\}$ 的前三项 a_1,a_2,a_3;

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3)证明:对任意的整数 $n>4$,有 $\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}<\frac{7}{8}$.

(1)和(3)的解答从略,现仅给出(2)的解.

在高考标准答案里是用"递推"方法求得 $a_n=\frac{2}{3}[2^{n-2}+(-1)^{n-1}](n\in\mathbf{N}_+)$. 下面我们用"叠加"法来求 a_n.

解 首先,由 $a_k=\begin{cases}S_1, k=1\text{ 时},\\ S_k-S_{k-1}, k\geqslant 2\text{ 时},\end{cases}$

可得 $a_k=2a_{k-1}+2(-1)^{k-1}$,即 $a_k-2a_{k-1}=2(-1)^{k-1}(k\geqslant 2)$. (*)

在(*)式中,依次令 $k=2,3,\cdots,n$,则得

$2^{n-2}a_2-2^{n-1}a_1=2^{n-1}(-1)$, ①

$2^{n-3}a_3-2^{n-2}a_2=2^{n-2}(-1)^2$, ②

……

$2a_{n-1}-2^2a_{n-2}=2^2(-1)^{n-2}$, $(n-2)$

$a_n-2a_{n-1}=2(-1)^{n-1}$. $(n-1)$

将以上 $n-1$ 个同向不等式两边分别相加,得

$a_n-2^{n-1}a_1=2^{n-1}(-1)+2^{n-2}(-1)^2+\cdots+2(-1)^{n-1}$,

$\therefore a_n=2^{n-1}-(-1)^n\frac{2}{3}[1-(-2)^{n-1}]=\frac{2}{3}[2^{n-2}+(-1)^{n-1}]$.

经检验,$n=1$ 时,$a_1=1$ 满足上式,故

$a_n=\frac{2}{3}[2^{n-2}+(-1)^{n-1}], n\in\mathbf{N}^*$.

例 18 (《数学通报》数学问题 1499 题)已知 a、b、c 是满足 $a^2+b^2+c^2=1$ 的实数,求证:$|a|+|b|+|c|\geqslant 3\sqrt{3}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$.

证明 因为 $|a|+|a|+3\sqrt{3}a^4\geqslant 3\sqrt[3]{|a|\cdot|a|\cdot 3\sqrt{3}a^4}=3\sqrt{3}a^2$,

① 宋海咏.用"叠加法"解数学题[J].中学数学月刊,2005(1):38~40.

所以 $|a|\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2-a^4)$.

同理 $|b|\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}(b^2-b^4)$,

$|c|\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}(c^2-c^4)$.

以上三式相加,可得

$$|a|+|b|+|c|\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^4+b^4+c^4)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)^2+3\sqrt{3}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2).$$

$$=3\sqrt{3}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2).$$

所以 $|a|+|b|+|c|\geqslant3\sqrt{3}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$.

例 19 (第 24 届全苏奥林匹克题)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$.

求证:$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}$.

证明 因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数,由平均值不等式可得

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_1+a_2}{4}\geqslant2\sqrt{\frac{a_1^2}{a_1+a_2}\cdot\frac{a_1+a_2}{4}}=a_1, \quad ①$$

$$\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\frac{a_2+a_3}{4}\geqslant2\sqrt{\frac{a_2^2}{a_2+a_3}\cdot\frac{a_2+a_3}{4}}=a_2, \quad ②$$

……

$$\frac{a_n^2}{a_n+a_1}+\frac{a_n+a_1}{4}\geqslant2\sqrt{\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\cdot\frac{a_n+a_1}{4}}=a_n. \quad n$$

将上面 n 个同向不等式两边分别相加,并注意到 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$,立得所要证明的结论.

例 20 如图 15-6,已知圆 O 的三条弦 A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 两两相交,交点依次为 A,B,C,且 $AA_1=BC_1=CB_2,AB_1=BA_2=CC_2$.求证:$\triangle ABC$ 为等边三角形.

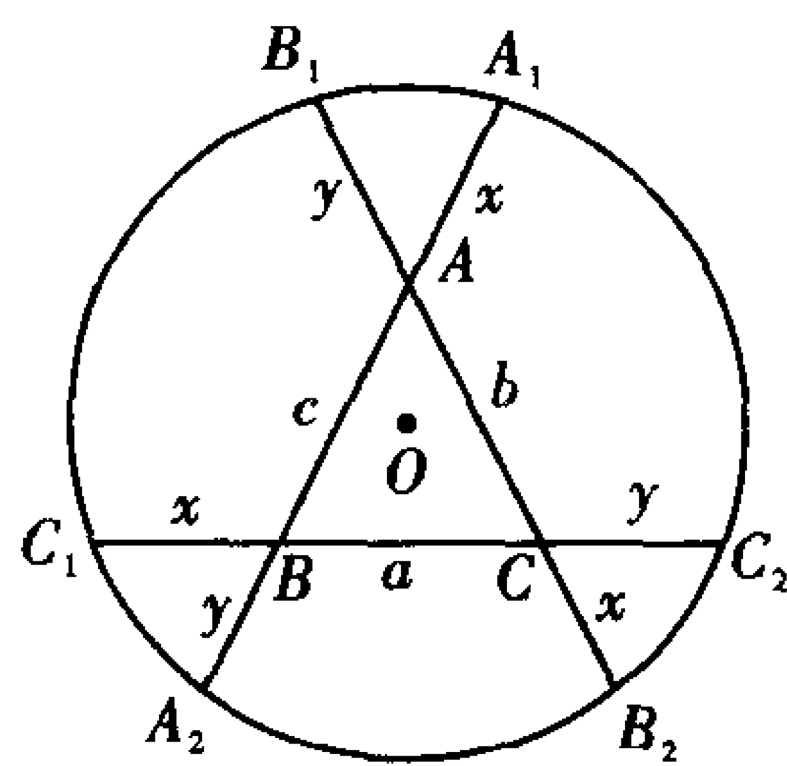


图 15-6

证明 设 $AA_1=BC_1=CB_2=x,AB_1=BA_2=CC_2=y,BC=a,CA=b,AB=c$.由相交弦定理,得

$A_1A\cdot AA_2=B_1A\cdot AB_2,C_1B\cdot BC_2=A_2B\cdot BA_1,B_2C\cdot CB_1=C_2C\cdot CC_1$,

即 $x(c+y)=y(b+x)$, ①

$x(a+y)=y(c+x)$, ②

$x(b+y)=y(a+x)$. ③

由①、②、③相加,得

$x(3y+a+b+c)=y(3x+a+b+c)$,

即 $x(a+b+c)=y(a+b+c)$.

因 $a+b+c\neq0$,则 $x=y,a=b=c$,

故$\triangle ABC$为等边三角形.

例 21 已知平面上不经过坐标原点的三条直线l_1,l_2,l_3,其方程分别为:

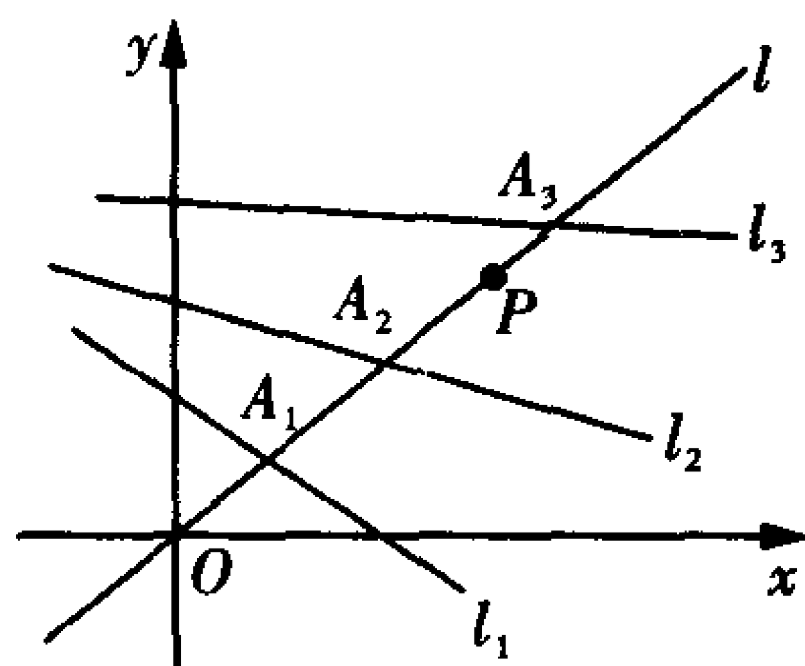


图 15-7

$l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$,

$l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$,

$l_3:a_3x+b_3y+c_3=0$.

经过原点的动直线l分别与直线l_1,l_2,l_3相交于点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$.记$|\overrightarrow{OA_i}|=\rho_i(i=1,2,3,)$,$P$为直线$l$上的一点,$|\overrightarrow{OP}|=\rho$,并满足:$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}=\frac{1}{\rho}$.试求动点$P(x,y)$的轨迹方程.

解 设直线l与x轴的倾斜角为θ,则有

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}\quad\begin{cases}x_i=\rho_i\cos\theta,\\y_i=\rho_i\sin\theta.\end{cases}\quad(i=1,2,3)$$

因A_i在直线l_i上,则$a_ix_i+b_iy_i+c_i=0$.

即 $a_i\rho_i\cos\theta+b_i\rho_i\sin\theta+c_i=0$.

又$c_i\neq0$,则 $\frac{1}{\rho_i}=-\frac{a_i\cos\theta+b_i\sin\theta}{c_i}(i=1,2,3,)$.

将三个等式相加,并注意到

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3},\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$$

则得 $$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}=-\left(\frac{a_1\cos\theta+b_1\sin\theta}{c_1}+\frac{a_2\cos\theta+b_2\sin\theta}{c_2}+\frac{a_3\cos\theta+b_3\sin\theta}{c_3}\right)$$

$$=-\left(\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+\frac{a_3}{c_3}\right)\cos\theta-\left(\frac{b_1}{c_1}+\frac{b_2}{c_2}+\frac{b_3}{c_3}\right)\sin\theta.$$

由此可知,要求的P点的轨迹方程为

$$\left(\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+\frac{a_3}{c_3}\right)x+\left(\frac{b_1}{c_1}+\frac{b_2}{c_2}+\frac{b_3}{c_3}\right)y+1=0\text{(它是一条直线)}.$$

4. 蜕化

蜕化,实际上就是特殊的一般化.希尔伯特曾说过:在解决一个数学问题时,如果我们没有获得成功,原因常常在于我们没有认识到更一般的观点,即眼下要解决的只不过是一连串有关问题的一个环节.特殊情形往往涉及一些无关的细节而掩盖了问题的关键,一般情形则更明确地表达了问题的本质.这在处理平面解析几何问题显得更为突出.

一般地,二元二次方程$Ax^2+By^2+Cx+Dy+F=0$ (*)

表示二次曲线.

若方程(*)能化成$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=0$或$(x-m)^2+(y-n)^2=0$的形式,则(*)表示一个点$P(m,n)$,可以视为蜕化椭圆或蜕化圆.

若方程(*)能化成$f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)=0$的形式,则(*)表示两条直线$l_1:f_1(x,y)=0$,$l_2:f_2(x,y)=0$,当l_1与l_2相交时,可以视为蜕化双曲线;当l_1与l_2平行时,可以视为蜕化抛物线.

这样,点坐标与直线方程都用二元二次方程来表示,即把点与直线都统一在圆锥曲线的范畴之内.因

此,在解决点与直线的有关问题时,可以化归到圆锥曲线中去研究.

例22 有一圆与直线 $2x-y+5=0$ 相切于点 $M(-2,1)$,且过点 $N(3,2)$. 求此圆的方程.

分析 若设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,然后将条件代入,则解关于 a、b、r 的三元方程组,方法虽可行,但运算量较大. 若视点 M 为蜕化的圆,则可减少运算量.

解 将点 M 表示成点圆表式:$(x+2)^2+(y-1)^2=0$. 设所求圆的方程为

$$(x+2)^2+(y-1)^2+\lambda(2x-y+5)=0.$$

将点 N 的坐标代入上述方程,求得 $\lambda=-\frac{26}{9}$.

从而,所求圆的方程为 $9x^2+9y^2-16x+8y-85=0$.

例23 已知一椭圆的离心率为 $e=\frac{2}{5}\sqrt{5}$,过点 $(1,0)$ 且与直线 $l:2x-y+3=0$ 相切于点 $P(-\frac{2}{3},\frac{5}{3})$,长轴平行于 y 轴. 求此椭圆方程.

分析 若设椭圆中心为 (x_0,y_0),并设出椭圆方程,再列出过已知点的切线方程,再联立上述方程消去参数可求得椭圆方程. 这样解运算量显然不小,但若考虑"点椭圆",则运算量大为减少.

解 把点 $P(-\frac{2}{3},\frac{5}{3})$ 看作离心率为 $e=\frac{2}{5}\sqrt{5}$ 的椭圆系 $(x+\frac{2}{3})^2+\frac{1}{5}(y-\frac{5}{3})^2=k$ 的特殊情形(即 $k=0$ 时为"点椭圆"),则直线 $l:2x-y+3=0$ 相切于该点的圆系,即为过直线 l 与"点椭圆"的公共点的椭圆系方程为

$$(x+\frac{2}{3})^2+\frac{1}{5}(y-\frac{5}{3})^2+\lambda(2x-y+3)=0,$$

把点 $(1,0)$ 代入上式,求得 $\lambda=-\frac{2}{3}$.

故所求椭圆方程为 $x^2+\frac{1}{5}y^2=1$.

例24 过双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的右焦点 F 的直线 l 交双曲线及其渐近线分别于点 A、B、C、D 如图 15-8. 求证:$|AC|=|BD|$.

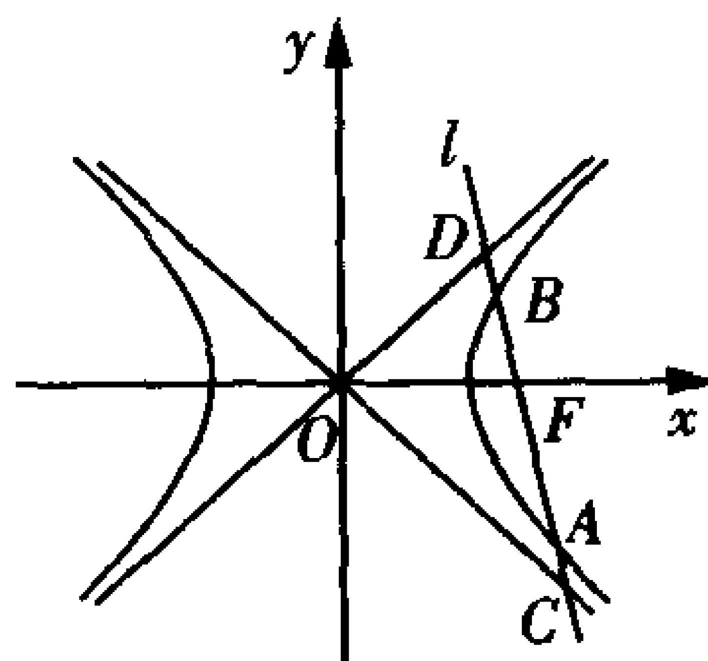


图 15-8

分析 把渐近线视作蜕化双曲线,则 CD 可视作直线 l 截蜕化双曲线所得的弦,AB 是直线 l 截双曲线 C 所得的弦,所以只要证明 AB 与 CD 的中点重合.

证明 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,$D(x_4,y_4)$.

当直线 l 的斜率不存在时,结论显然成立.

当直线 l 的斜率存在时,设直线 $l:y=k(x-c)$. 下面求弦 CD 的中点的横坐标.

由方程组:

$$\begin{cases}y=k(x-c),\\ b^2x^2-a^2y^2=0\end{cases}$$

得

$$(b^2-a^2k^2)x^2+2a^2ck^2x-a^2k^2c^2=0.$$

故 CD 的中点的横坐标为

$$\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{a^2ck^2}{a^2k^2-b^2}.$$

由方程组$\begin{cases}y=k(x-c),\\ b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,\end{cases}$得

$$(b^2-a^2k^2)x^2+2a^2ck^2x-a^2k^2c^2-a^2b^2=0.$$

故 AB 的中点的横坐标为

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{a^2ck^2}{a^2k^2-b^2}.$$

从而，AB 与 CD 的中点横坐标相等．又因为 AB 与 CD 均在直线 l 上，故它们的纵坐标也相等．于是，AB 与 CD 的中点重合，故 $|AC|=|BD|$．

例 25　过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任意一点 P 的切线与过椭圆长轴两端点 A_1、A_2 所引切线交于点 Q_1、Q_2．求证：$A_1Q_1\cdot A_2Q_2$ 为一定值．

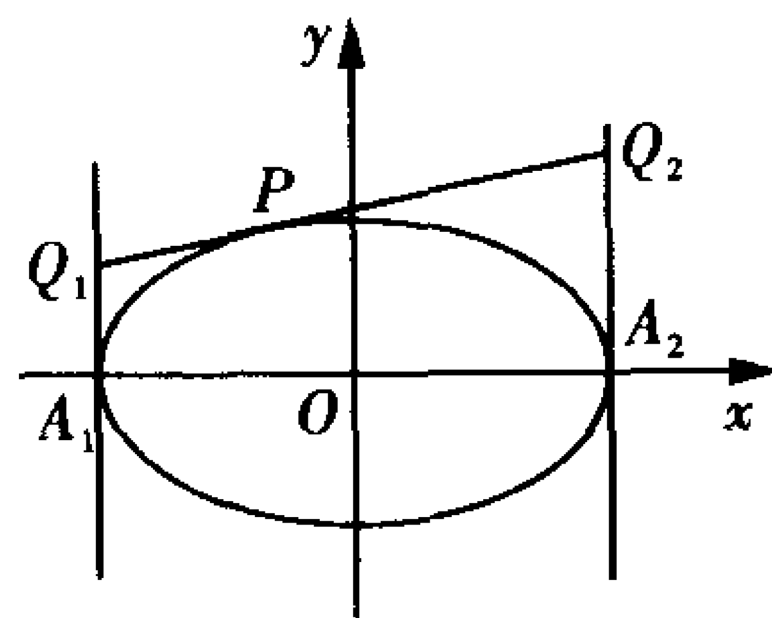


图 15-9

分析　设 $P(x_0,y_0)$，则过点 P 的切线为 l_1：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，过点 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$的切线分别是 l_2：$x+a=0$，l_3：$x-a=0$．把 l_2、l_3 看成蜕化抛物线 C：$(x+a)(x-a)=0$，那么题设条件转化为“直线 l_1 与蜕化抛物线 C 交于两点 Q_1、Q_2”．

由于 A_1Q_1 与 A_2Q_2 正好是 Q_1、Q_2 两点的纵坐标 y_1、y_2，本题结论转化为：“求证：$y_1\cdot y_2=k$(定值)”．

因 Q_1，Q_2 的坐标是方程组

$$\begin{cases}\frac{x_0x}{a_2}+\frac{y_0y}{b_2}=1,\\ x^2-a^2=0\end{cases}$$

的解，消去 x，得

$$a^2y_0^2y^2-2a^2b^2y_0y+(a^2-x_0^2)b^4=0.$$

由韦达定理，

$$y_1\cdot y_2=\frac{(a^2-x_0^2)b^4}{a^2y_0^2}.\qquad ①$$

又点 $P(x_0,y_0)$在椭圆上，故

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1.\qquad ②$$

由①，②得 $y_1\cdot y_2=b^2$，

故 $A_1Q_1\cdot A_2Q_2=b^2$(定值)．

5. 引参

有些问题，通过增设参数，将问题转化为关于参数的较简单的或较一般性的问题，往往能发现问题的本质，找到简捷的求解方法或统一的求解方法．

例 26　已知 $-1\leqslant a+b\leqslant 1$，$1\leqslant a-2b\leqslant 3$．求 $a+3b$ 的取值范围．

解　引入参数 m,n，设 $a+3b=m(a+b)+n(a-2b)$，则　$a+3b=(m+n)a+(m-2n)b$，

从而，$\begin{cases}m-2n=3,\\m+n=1.\end{cases}$解得 $\begin{cases}m=\frac{5}{3},\\n=-\frac{2}{3}.\end{cases}$

于是，$a+3b=\frac{5}{3}(a+b)-\frac{2}{3}(a-2b)$.

由已知条件得 $-\frac{5}{3}\leqslant\frac{5}{3}(a+b)\leqslant\frac{5}{3}$,

$$-2\leqslant-\frac{2}{3}(a-2b)\leqslant-\frac{2}{3}.$$

相加即得 $-\frac{11}{3}\leqslant a+3b\leqslant 1$.

例 27 （第 2 届"友谊杯"国际邀请赛题）设 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，求证：

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{1}{2}(a+b=c).$$

证明 设 k 为任一大于零的参数，则

$$\frac{a^2}{b+c}+k^2(b+c)\geqslant 2ak,\frac{b^2}{c+a}+k^2(a+c)\geqslant 2bk,$$

$$\frac{c^2}{a+b}+k^2(a+b)\geqslant 2ck.$$

以上三式相加，并整理，得

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+2(a+b+c)k^2\geqslant 2(a+b+c)k.$$

即 $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant 2k(1-k)(a+b+c)\geqslant[2k(1-k)(a+b+c)]_{\max}=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

注 类似于例 27，可证明以下问题：

(1)(《数学通报》1993 年 7 月号问题 845)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，求证：

$$\frac{x_1^2}{1-x_1}+\frac{x_2^2}{1-x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{1-x_n}\geqslant\frac{1}{n-1}.$$

(2)(《数学通报》1994 年 11 月号问题 921)若 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，且 $x+y+z=1$，求证：

$$\frac{x^4}{y(1-y^2)}+\frac{y^4}{z(1-z^2)}+\frac{z^4}{x(1-x^2)}\geqslant\frac{1}{8}.$$

(3)(《数学通报》1994 年 11 月号问题 925)设 $n\in\mathbf{N},n\geqslant 2$，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，求证：

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2^2}{a_1+a_3+a_4+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n-1}.$$

(4)(第 24 届全苏中学生数学竞赛题)设正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的和为 1，求证：

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}.$$

(5)(1991 年亚太地区数学竞赛题)设 $a_i,b_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$ 且满足

$\sum\limits_{i=1}^n a_i=\sum\limits_{i=1}^n b_i$，则 $\sum\limits_{i=1}^n\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\geqslant\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n a_i$.

例 28 （2003 年湖南省竞赛题）设 x,y,z 均取正实数且 $x+y+z=1$，求三元函数 $f(x,y,z)=$



$\frac{3x^2-x}{1+x^2}+\frac{3y^2-y}{1+y^2}+\frac{3z^2-z}{1+z^2}$的最小值,并给出证明.

解 设k为实数且$\frac{3x^2-x}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}(3x-1)\geqslant k(3x-1)$. 因为$x<1$,故当$k=\frac{3}{10}$时,$3x^2-x-k(3x-1)(x^2+1)=-\frac{(3x-1)^2(x-3)}{10}\geqslant 0$,故

$$\frac{3x^2-x}{1+x^2}\geqslant\frac{3}{10}(3x-1).$$

同理,

$$\frac{3y^2-y}{1+y^2}\geqslant\frac{3}{10}(3y-1),$$

$$\frac{3z^2-z}{1+z^2}\geqslant\frac{3}{10}(3z-1).$$

上述三式相加得

$$\frac{3x^2-x}{1+x^2}+\frac{3y^2-y}{1+y^2}+\frac{3z^2-z}{1+z^2}\geqslant\frac{3}{10}[3(x+y+z)-3]=0,$$

当且仅当$x=y=z=\frac{1}{3}$,$f(x,y,z)=0$. 故所求最小值是0.

注 $k=\frac{3}{10}$是令$3x^2-x-k(3x-1)(x^2+1)$有因式$(3x-1)^2$而求得.

例29 已知$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$,求证:$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$.

证明 当$a_i(i=1,2,\cdots,n)$全为零时,不等式显然成立. 以下假设a_i不全为零. 对任意的非零实数λ,有

$$\begin{aligned}&a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\\&=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)\\&=\lambda(x_1+\frac{a_1}{2\lambda})^2+\lambda(x_2+\frac{a_2}{2\lambda})^2+\cdots+\lambda(x_n+\frac{a_n}{2\lambda})^2-\lambda-\frac{1}{4\lambda}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\\&\leqslant-\lambda-\frac{1}{4\lambda}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2).\end{aligned}$$

当且仅当$x_1=-\frac{a_1}{2\lambda},x_2=-\frac{a_2}{2\lambda},\cdots,x_n=-\frac{a_n}{2\lambda}$时上式取等号,此时,由$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$,解得$\lambda=-\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$,从而$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{2\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$.

注 上述证明方法可看作是拉格朗日乘数法的一种初等化.

例30 (1)1990年匈牙利数学奥林匹克题)若$\triangle ABC$的边长之和$a+b+c=2$. 求证:$a^2+b^2+c^2+2abc<2$.

(2)(1989年第23届全苏数学奥林匹克题)设a、b、c是三角形三边之长,且$a+b+c=1$. 求证:$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$.

(3)(《数学通讯》1992年11期竞赛之窗问题31题)$\triangle ABC$的三边a、b、c满足$a+b+c=1$. 求证:



$5(a^2+b^2+c^2)+18abc>\frac{7}{3}$.

(4)(第32届IMO试题)已知$\triangle ABC$中,设I是它的内心,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的角平分线分别交其对边于A'、B'、C'.求证:$\frac{1}{4}<\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leqslant\frac{8}{27}$.

为证明上述4个问题,我们引入参数,证明更一般的问题:

在$\triangle ABC$中,a,b,c是三边之长,若$a+b+c=\lambda$,则

(Ⅰ)$\frac{13}{27}\lambda^2\leqslant a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\lambda}abc<\frac{\lambda^2}{2}$;

(Ⅱ)$\frac{1}{4}\lambda^2<ab+bc+ca-\frac{2}{\lambda}abc\leqslant\frac{7}{27}\lambda^2$.

证明 考虑三次多项式函数$f\left(\frac{\lambda}{2}\right)=\left(\frac{\lambda}{2}-a\right)\left(\frac{\lambda}{2}-b\right)\left(\frac{\lambda}{2}-c\right)$.

注意到$a+b+c=\lambda$,则得

$$f\left(\frac{\lambda}{2}\right)=\frac{1}{8}\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda^2(a+b+c)+\frac{1}{2}\lambda(ab+bc+ca)-abc$$

$$=-\frac{1}{8}\lambda^3+\frac{\lambda}{2}\left[(ab+bc+ca)-\frac{2}{\lambda}abc\right]. \quad ①$$

由于三角形任意两边之和大于第三边,所以$0<a,b,c<\frac{\lambda}{2}$.于是$f\left(\frac{\lambda}{2}\right)>0$.

由①式,即得 $ab+bc+ca-\frac{2}{\lambda}abc>\frac{1}{4}\lambda^2$. ②

将$a+b+c=\lambda$代入上式中的λ^2,整理得

$$a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\lambda}abc<\frac{1}{2}\lambda^2. \quad ③$$

又由于 $f\left(\frac{\lambda}{2}\right)=\left(\frac{\lambda}{2}-a\right)\left(\frac{\lambda}{2}-b\right)\left(\frac{\lambda}{2}-c\right)\leqslant\left[\frac{\left(\frac{\lambda}{2}-a\right)+\left(\frac{\lambda}{2}-b\right)+\left(\frac{\lambda}{2}-c\right)}{3}\right]^3=\frac{1}{216}\lambda^3$.

注意到①式化简,得 $ab+bc+ca-\frac{2}{\lambda}abc\leqslant\frac{7}{27}\lambda^2$. ④

又将$a+b+c=\lambda$代入上式中的$ab+bc+ca=\frac{1}{2}[\lambda^2-(a^2+b^2+c^2)]$,整理得 $\frac{13}{27}\lambda^2\leqslant a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\lambda}abc$. ⑤

显然,由③、⑤即得(Ⅰ),由②、④即得(Ⅱ).

在(Ⅰ)式中,令$\lambda=2,\lambda=1$,则证得(1)、(2).

在(Ⅰ)式中,令$\lambda=1$,则有$a^2+b^2+c^2+4abc\geqslant\frac{13}{27}$,

于是,$a^2+b^2+c^2+\frac{18}{5}abc>\frac{13}{27}-\frac{2}{5}abc\geqslant\frac{13}{27}-\frac{2}{5}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{7}{15}$,

从而 $5(a^2+b^2+c^2)+18abc\geqslant\frac{7}{3}$.即证得(3).

(4)记$BC=a,CA=b,AB=c$.由于I是$\triangle ABC$的内心,则有 $\frac{AI}{IA'}=\frac{AC}{A'C}$,$\frac{AI}{IA'}=\frac{AB}{BA'}$.从而$\frac{AI}{IA'}=$

$\frac{b+c}{a}$.

于是，$\frac{AI}{AA'}=\frac{AI}{AI+IA'}=\frac{b+c}{a+b+c}$.

同理，$\frac{BI}{BB'}=\frac{c+a}{a+b+c}$，$\frac{CI}{CC'}=\frac{a+b}{a+b+c}$.

令 $\frac{a}{a+b+c}=x$，$\frac{b}{a+b+c}=y$，$\frac{c}{a+b+c}=z$，

则 $\frac{AI}{AA'}=1-x$，$\frac{BI}{BB'}=1-y$，$\frac{CI}{CC'}=1-z$.

从而 $\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}=(1-x)(1-y)(1-z)=xy+yz+zx-xyz$.

由 a、b、c 是$\triangle ABC$的三边知，x、y、z 也必为某个三角形的三边长，且 $x+y+z=1$.

于是，在(Ⅱ)式中，令 $\lambda=1$，得

$\frac{1}{4}<xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$.

又 $xy+yz+zx-xyz\leqslant\frac{7}{27}+xyz\leqslant\frac{7}{27}+\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，

故 $\frac{1}{4}<xy+yx+zx-xyz\leqslant\frac{8}{27}$.

注 由(Ⅰ)、(Ⅱ)还可以推证许多三角形不等式.

6. 赋值

在解某些数学竞赛题时，若能根据问题的具体情况，合理地、巧妙地对某些元素赋值，特别是赋予确定的特殊值，往往能使问题数值化、直观化、简单化.

例 31 (2004 年高考湖南卷题)设 $a>0$，$b>0$，则以下不等式中不恒成立的是(　　).

A. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$　　　B. $a^3+b^3\geqslant 2ab^2$

C. $a^2+b^2+2\geqslant 2a+2b$　　　D. $\sqrt{|a-b|}\geqslant\sqrt{a}-\sqrt{b}$

解 选 B. 理由：将 a、b 赋值，令 $a=2$，$b=3$，知 A、C、D 均成立，有 $a^3+b^3=35$，$2ab^2=36$，此时，$a^3+b^3<2ab^2$，因此 B 不恒成立.

例 32 设 $f(x)$定义于实数集上，当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，且对于任意实数 x、y，有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，求证：$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

证明 由 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$中取 $x=y=0$，得 $f(0)=f^2(0)$，

若 $f(0)=0$，令 $x>0$，$y=0$，则 $f(x)=0$，与 $f(x)>1$ 矛盾.

于是，$f(0)\neq 0$，即有 $f(0)=1$.

当 $x>0$ 时，$f(x)>1>0$，当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)>1>0$，

而 $f(x)\cdot f(-x)=f(0)=1$，

从而，$f(x)=\frac{1}{f(-x)}>0$.

又当 $x=0$ 时，$f(0)=1>0$，

则 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)>0$.

设 $-\infty < x_1 < x_2 < +\infty$,

则 $x_2 - x_1 > 0, f(x_2 - x_1) > 1$.

从而 $f(x_2) = f[x_1 + (x_2 - x_1)] = f(x_1)f(x_2 - x_1) > f(x_1)$.

故 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

对问题中的元素赋予特殊值,从而把问题转化为数字问题,就为通过算术运算或代数运算解决问题创造了条件.

例 33 在一个圆上有 n(定值)个点,把其中一些点染成红色,余下的点染成白色,它们把圆周划分为互不包含的弧段.我们规定:两端点都是红色的弧段标上数字 2;两端点都是白色的弧段标上数字 $\frac{1}{2}$,两端点异色的弧段标上数字 1,把所有这些数值乘在一起得它们的积.证明积的值与染成红、白两色的点的个数有关,而与染色顺序无关.

分析 由题设知弧段的值与其两端点的颜色有关,若能给端点赋值,使两端点的值的积等于弧段的值,问题便好解决.

证明 给红点赋上值 $\sqrt{2}$,白点赋上值 $\frac{1}{\sqrt{2}}$,则每条弧段的值即为两端点数值的乘积,假设 n 点中有 m 个点被染成了红色,根据乘法交换律知:所有弧段值的乘积等于各点所标数字积的平方,

$$\left[(\sqrt{2})^m \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-m}\right]^2 = 2^{2m-n}.$$

由上式可知:在 n 为定值的情况下,弧段值的积只与染成红、白两色点的个数有关,而与染色顺序无关.

注 本题通过赋值转化为数字运算.

例 34 今有男女各 $2n$ 人,围成内外两圈跳舞,每圈各 $2n$ 人,有男有女,外圈的人面向内,内圈的人面向外.跳舞规则如下:每当音乐声起,如面对面者为一男一女,则男女配成舞伴跳舞,如果均为男的或均为女的,则鼓掌助兴,曲终时,外圈的人均向左横移一个位置,内圈人不动,如此继续下去,直到外圈的人移动一周.证明:在整个跳舞过程中至少有一次跳舞的人不少于 n 对.

证明 将男人记为 $+1$,女人记为 -1,则外圈的 $2n$ 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 与内圈的 $2n$ 个数 $b_1, b_2, \cdots, b_{2n}$ 中有 $2n$ 个 $+1$ 和 $2n$ 个 -1,因此,和

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n} = 0.$$

又

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n})^2 - (b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n})^2 = 0,$$

从而

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n})(b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n}) = -\frac{1}{2}[(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n})^2 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n})^2]$$

$$= -(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n})^2 \leqslant 0. \quad ①$$

另一方面,当 a_i 与 b_i 面对面时,$a_1 b_i, a_2 b_{i+1}, \cdots, a_{2n} b_{i-1}$ 中的 -1 的个数表示这时跳舞的对数.

假设在整个过程中,每次跳舞的人数均少于 n 对,那么恒有

$a_1 b_i + a_2 b_{i+1} + \cdots + a_{2n} b_{i-1} > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, 2n)$,从而总和

$$\sum_{i=1}^{2n}(a_1 b_i + a_2 b_{i+1} + \cdots + a_{2n} b_{i-1}) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n})(b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n}) > 0. \quad ②$$

①与②矛盾,故至少有一次跳舞的人数不少于 n 对.

例 35 在数轴上给定两点 1 和$\sqrt{2}$,在区间$(1,\sqrt{2})$内任取 n 个点,在此 $n+2$ 个点中,每相邻两点连一线段,可得 $n+1$ 条线段.证明:在此 $n+1$ 条线段中,以一个有理点和一个无理点为端点的线段恰有奇数条.

证明 按从小到大的顺序,依次将此 $n+2$ 个点记为 $A_1,A_2,\cdots,A_{n+2}$,并对每一点赋以整数值:

$$a_i=\begin{cases}1 & \text{当 } A_i \text{ 为有理点时},\\ -1, & \text{当 } A_i \text{ 为无理点时}.\end{cases}$$

同时,对每小线段 A_iA_{i+1} 赋予整数值 a_ia_{i+1}:

$$a_ia_{i+1}=\begin{cases}1, & \text{当 } A_iA_{i+1} \text{ 同为有理点或同为无理点},\\ -1, & \text{当 } A_iA_{i+1} \text{ 中一为有理点一为无理点}.\end{cases}$$

设一端为有理点,一端为无理点的线段有 k 条,现用两种方法求此 $n+1$ 条线段对应值的积,其一,积显然为$(-1)^k$;其二,积$=(a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{n+1}a_{n+2})=a_1a_2^2a_3^2\cdots a_{n+1}^2a_{n+2}=a_1a_{n+2}=-1$.
故$(-1)^k=-1$,因此 k 为奇数.

例 36 (1989 年全国高中数学联赛题)如果 1,2,3,…,14 中,按由小到大的顺序取出 a_1,a_2,a_3,使同时满足 $a_2-a_1\geqslant 3$ 与 $a_3-a_2\geqslant 3$.求所有不同的取法的总数.

解 赋值

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{若数 } i \text{ 被选取},\\ 0, & \text{若数 } i \text{ 没被选取}.\end{cases}$$

则从 14 个数中任选三个数的任一种取法,对应着一个排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$.反之,任一个排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$必对应着一个取法.故一种取法$\to(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$是一一映射.

根据题设的要求,取法数等于排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$中有 3 个 1,11 个 0,而且每两个 1 中至少隔着两个 0 的排列数.为了求这样的排列数,我们先排好模式 1001001,然后将剩下的 7 个 0 插入 3 个 1 形成的 4 个空位中,故有 $C_{7+4-1}^7=C_{10}^3$种方法.此即为所有不同的取法总数.

例 37 证明用 15 块大小是 1×4 的矩形瓷砖和 1 块大小是 2×2 的矩形瓷砖不能恰好铺盖 8×8 的矩形地面.

证明 先把 8×8 的方格图中每小方格赋值如图 15-10(1)所示的值.可见,每块 1×4 的瓷砖,无论怎样铺法,所盖住的四个小方格已填出的四个值必是 1,2,3,4.又一块 2×2 的瓷砖,无论怎样铺法,所盖住的四个小方格中已填上的四个数必是如图 15-10(2)所示之一,即 2×2 的正方形瓷砖所盖住的四个小方格中,必有两个小方格填有相同的数.若 15 块 1×4、1 块 2×2 瓷砖恰好铺满 8×8 地面,那么这 64 个小方格中,有某一种标号的小方块共有 17 块,但实际上,标号 1,2,3,4 的小方块各 16 块,矛盾.故命题成立.

1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3

(1)

1	2
2	3

2	3
3	4

3	4
4	1

4	1
1	2

(2)

图 15-10

例 38 在圆周上均匀地放上 4 枚围棋子，规定操作规则如下：原来相邻棋子若是同色，就在其间放一枚黑子；若异色，就在其间放一枚白子. 然后把原来的 4 枚棋子取走，完成这一程序就算是一次操作. 证明：无论开始时圆周上的黑白棋子的排列顺序如何，最多只需操作 4 次，圆周上就全是黑子.

证明 因不知开始的 4 枚棋子的颜色及其排列顺序，按题意操作，情形比较复杂. 下面构造一个反映题设要求的赋值模型，可使问题简化，从而获证.

设开始的 4 枚棋子为 $x_i(i=1,2,3,4)$，并给棋子赋值.

令

$$x_i=\begin{cases}1, & 若\ x_i\ 为黑子,\\ -1, & 若\ x_i\ 为白子.\end{cases}(i=1,2,3,4)$$

并规定 $x_ix_{i+1}=\begin{cases}1, & 若\ x_i\ 与\ x_{i+1}\ 为同色,\\ -1, & 若\ x_i\ 与\ x_{i+1}\ 异色,\end{cases}$

及 $x_i^2=1$.

第一次操作后得到的 4 枚棋子可表为

$(x_1x_2),(x_2x_3),(x_3x_4),(x_4x_1)$.

第二次操作后得到的 4 枚棋子可表为

$(x_1x_2)(x_2x_3),(x_2x_3)(x_3x_4),(x_3x_4)(x_4x_1),(x_4x_1)(x_1x_2)$，分别化简为 $(x_1x_3),(x_2x_4),(x_3x_1),(x_4x_2)$.

第三次操作后得到的 4 枚棋子可表为

$(x_1x_3)(x_2x_4),(x_2x_4)(x_3x_1),(x_3x_1)(x_4x_2),(x_4x_2)(x_1x_3)$，化简后都是 $(x_1x_2x_3x_4)$.

第四次操作后得到的 4 枚棋子都是 $(x_1x_2x_3x_4)^2$，故这 4 枚棋子的赋值都是 1.

这表明：只需操作 4 次，圆周上全是黑子.

【解题尝试】

A 组

1. (1998 年高考题)向高为 H 的水瓶中注水，注满为止. 如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如图 15-11(1)所示，那么水瓶的形状是(　　).

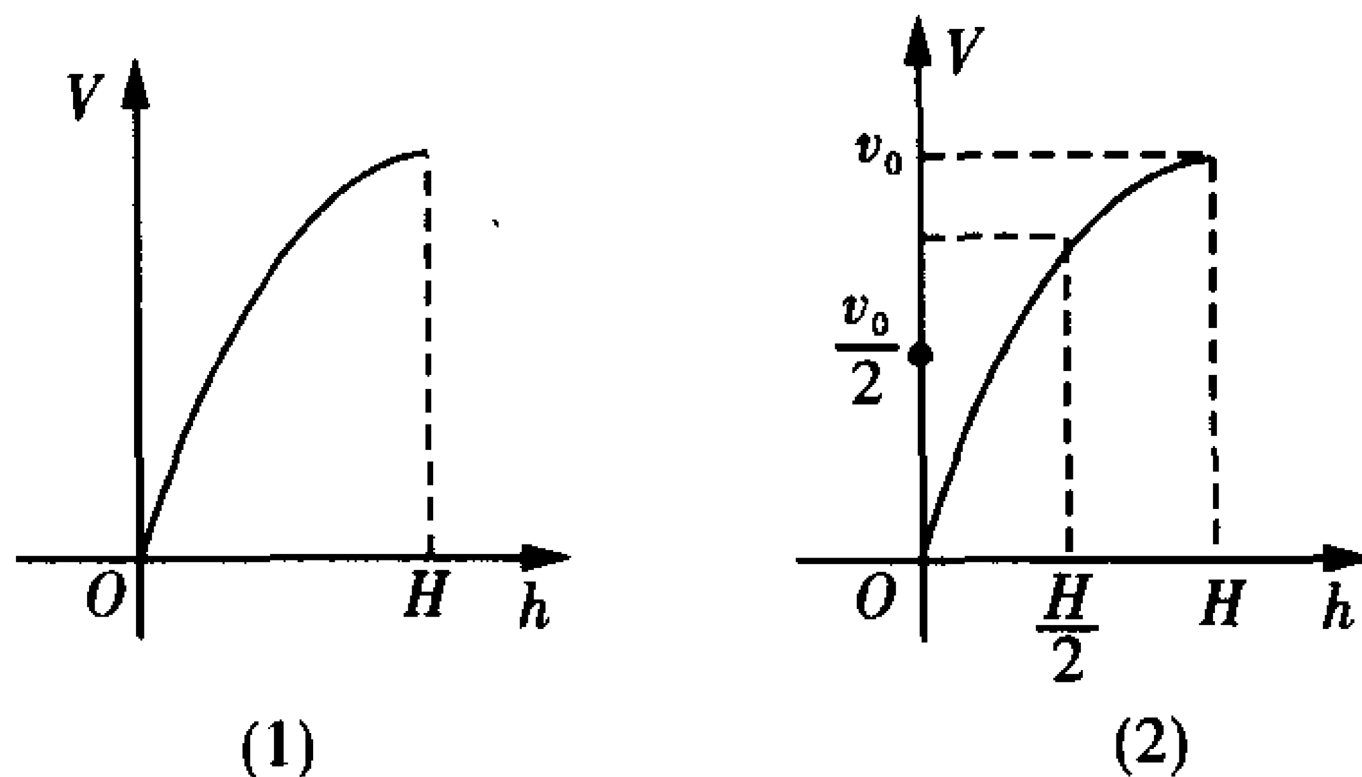
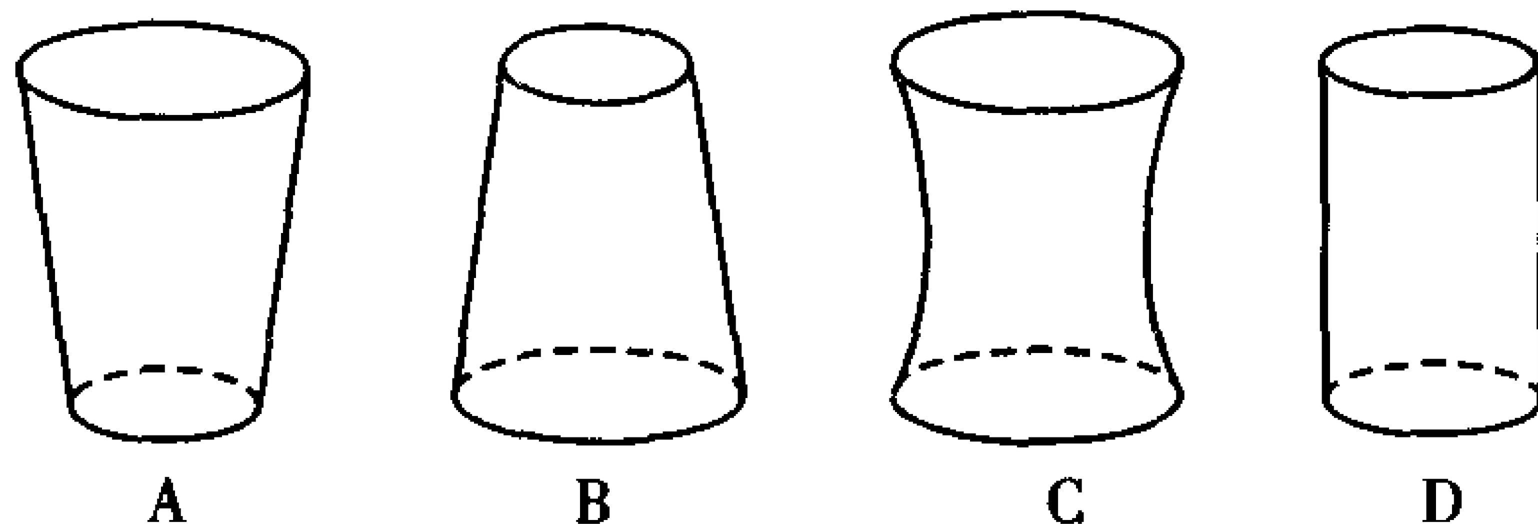


图 15-11



2. 正四棱锥底面积为 Q,侧面积为 S,则它的体积为(　　).

A. $\frac{1}{6}\sqrt{Q(S^2-Q^2)}$　B. $\frac{1}{3}\sqrt{Q(S^2-Q^2)}$　C. $\frac{1}{2}\sqrt{Q(S^2-Q^2)}$　D. $\frac{1}{3}Q\sqrt{Q}$

3. 已知过球面上 A、B、C 三点的截面和球心的距离等于球半径的一半,并且 $AB=BC=CA=2$,则这个球的表面积是(　　).

A. $\frac{16\pi}{9}$　B. $\frac{8\pi}{3}$　C. 4π　D. $\frac{64\pi}{9}$

4. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5}(0<\alpha<\pi)$,则 $\tan\alpha=$__________.

5. (《中等数学》2005 年 1 期奥林匹克训练题)已知 x,y,z 为正实数,且 $x+y+z=1$. 若 $\frac{a}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-2$,则实数 a 的取值范围是__________.

6. (《中等数学》2005 年 1 期奥林匹克训练题)如果不等式 $x|x-a|+b<0$(b 为常数)对 $[0,1]$ 中的任何 x 的值恒成立,求实数 a 的取值范围.

7. 证明组合恒等式 $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$,其中 k,n 都是自然数,并且 $k\leqslant n$.

8. 求证:$C_n^1C_n^n-C_n^2C_{2n}^n+\cdots+(-1)^{n+1}C_n^nC_{nn}^n=(-1)^{n+1}\cdot n^n$.

9. 设 a,A 都是自然数,$A\geqslant a$. 证明:

$$\frac{a}{A}+\frac{A-a}{A}\cdot\frac{a}{A-1}+\frac{A-a}{A}\cdot\frac{A-a-1}{A-1}\cdot\frac{a}{A-2}+\cdots+\frac{A-a}{A}\cdot\frac{A-a-1}{A-1}\cdots\frac{1}{a+1}\cdot\frac{a}{a}=1.$$

10. 证明:对任一大于 1 的正整数 n,$[\sqrt{n}]+[\sqrt[3]{n}]+\cdots+[\sqrt[n]{n}]=[\log_2 n]+[\log_3 n]+\cdots+[\log_n n]$.

11. 求圆心在直线 $x-2y=0$ 上,且与圆 $C_1:x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 切于点 $(1,1)$ 的圆的方程.

12. (1)设双曲线 $C:(y+a)^2-(x-a)^2=2a$,其渐近线过点 $(3,1)$,求 C 的渐近线方程.

(2)某双曲线以直线 $y=\pm(x+1)$ 为渐近线,焦距为 4,求其方程.

13. (第 16 届全俄数学奥林匹克竞赛题)设三角形三边长为 a,b,c 半周长为 p,求证:$\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\leqslant\sqrt{3p}$.

14. (《数学通报》数学问题 1023 题)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$,$y_1,y_2,\cdots,y_n\in\mathbf{R}^+$,则有 $\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{y_n}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{y_1+y_2+\cdots+y_n}$.

15. 已知 $a>0,b>0$,且 $a+b=1$,求证:$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}>\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

B 组

1. (2000 年河北省竞赛题)在圆 $x^2+y^2-5x=0$ 内,过点 $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ 有三条弦的长度成等比数列. 则其

公比的取值范围是(　　).

A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$　　B. $\left[\sqrt[3]{\frac{4}{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$　　C. $\left[\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{2}{\sqrt[3]{5}},\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

2. 在一个有限的实数列中,任意7个连续项之和都是负数,而任意连续11项之和都是正数,试问这样的数列最多有多少项?

3. 求证:$1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot k+2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(k+1)+3\cdot4\cdot5\cdot\cdots\cdot(k+2)+\cdots+n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot[n+(k-1)]=\frac{1}{k+1}(n+k)(n+k-1)\cdot\cdots\cdot(n+1)n$.

4. 在实数集 $\mathbf{R}$ 中定义运算 $*$ 满足

(i) $x*0=1$ (任意 $x\in\mathbf{R}$).

(ii) $(x*y)*z=(z*xy)+z$ (任意 $x,y,z\in\mathbf{R}$).

求 $31*32$.

5. (第8届IMO试题)求证:以每一正整数 n 和每一实数 $x\neq\frac{k\pi}{2^k}(k=0,1,\cdots,n)$,有

$$\frac{1}{\sin2x}+\frac{1}{\sin4x}+\cdots+\frac{1}{\sin2^nx}=\cot x-\cot2^nx.$$

6. (1990年全俄数学奥林匹克试题)证明:对于任意$\triangle ABC$,不等式 $a\cos A+b\cos B+c\cos C\leqslant p$ 成立.其中 a,b,c 为三角形的三边,A,B,C 分别为它们的对角,p 为半周长.

7. 设 P 是$\triangle ABC$形内的任意一点,求证:$aa_1^2+bb_1^2+cc_1^2\geqslant abc$.

其中 $a=BC,b=CA,c=AB;a_1=PA,b_1=PB,c_1=PC$.

8. 已知 a,b,x,y 均为正数,n 为正整数,且 $x+y=1$,求$\frac{a}{x^n}+\frac{b}{y^n}$的最小值.

9. 已知 $a>0,b>0,c>0$,且 $a^2+b^2+c^2=1$,求证:

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

10. (第31届IMO备选题)已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$ 且 $ab+bc+cd+da=1$,求证 $\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}\geqslant\frac{2}{3}$.

11. (第20届IMO试题)已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的正整数,求证:$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

12. 设 $\mu,\lambda\in\mathbf{R}^+$,$0<x,y,z<\frac{\lambda}{\mu}$,且 $x+y+z=1$,求证:

$$\frac{x}{\lambda-\mu x}+\frac{y}{\lambda-\mu y}+\frac{z}{\lambda-\mu z}\geqslant\frac{3}{3\lambda-\mu}.$$

13. A,B,C,D,E 五人参加一次考试,试题有7道,都是判断题,评分规则是:对于每道题,答对了得1分,答错了扣1分,不回答的不得分也不扣分.图15-12中记录的是 A,B,C,D,E 五个人的答案.现知 A,B,C,D 各得了2分,问 E 应得多少分?每道题目的答案是什么?



题号 \ 人	A	B	C	D	E
1	√	√		×	√
2		×	√	×	√
3	×	√	×	×	×
4	√	√	×	√	
5	×	×	√	√	√
6	√	×	×		×
7	√		√	×	√

图 15－12

14. 有男孩、女孩共 n 个围坐在一个圆周上($n\geqslant3$)，若顺序相邻的 3 个人恰有一个男孩的有 a 组，顺序相邻的 3 个人中恰有一个女孩的有 b 组. 求证 $3|a-b$.
15. 将线段 AB 分割成 n 个相等的小线段. 把两端点 A,B 染成红色，其他分点任意染成红、蓝色中的一种颜色，这些小线段中两端点颜色不同者称为标准线段，证明：标准线段数必为偶数.
16. 用 n 个数(允许重复)组成一个长为 N 的数列；且 $N\geqslant2^n$. 证明：可在这个数列中找出若干个连续的项，它们的乘积是一个完全平方数.
17. (2004 年首届中国东南地区数学奥林匹克题)给定大于 2004 正整数 n，将 $1,2,3,\cdots,n^2$ 分别填入 $n\times n$ 棋盘(由几行几列方格构成)的方格中，使每个方格恰有一个数. 如果一个方格中填的数大于它所在行至少 2004 个方格内所填的数，且大于它所在列至少 2004 个方格内所填的数，则称这个方格为“优格”. 求棋盘中“优格”个数的最大值.
18. (第 30 届俄罗斯数学奥林匹克题)试找出最大的正整数 N，使得无论怎样将正整数 1 至 400 填入 20×20 方格表的各个格中，都能在同一行或同一列中找到两个数，它们的差不小于 N.



第16章 操作性技能

【学习目标】

解题思维的灵活性有时体现在思维的操作层面上.熟悉并掌握一些操作性技能,往往能加速解题思路的探寻.

【解题钥匙】

1. 凑配[①]

凑——是按照预定的目标,对题设构式进行拼凑、凑合,凑成可套用某个公式、不等式,凑成能用上题设条件,凑成出现结论的形式等等,以达到某种预期的目的.

配——是根据题设条件,找到或发掘出题目中的构式的特点进行搭配、配对、配方,配置出为达到预期目的所需要的形式.

例 1 (2002年上海市高中数学竞赛试题)设实数 a,b,c,d 满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=5$,则$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$ 的最大值是__________.

解 填20.理由:首先注意到凑配式子:$4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$.

将题设 $a^2+b^2+c^2+d^2=5$ 代入上式,立知:$20=4\times5=4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$,注意到$(a+b+c+d)^2\geqslant0$,故$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$ 的最大值是20.

例 2 (1997年加拿大数学公共竞赛试题)已知16个正数的和为100,它们的平方和为1000.证明:这16个数中,没有一个大于25.

证明 不妨设这16个正数为 $a_1,a_2\cdots,a_{16}$,先考虑其中的一个,如 a_1,则得

$a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{16}^2=1000-a_1^2$,$a_2+a_3+\cdots+a_{16}=100-a_1$.由柯西不等式知,$15(a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{16}^2)\geqslant(a_2+a_3+\cdots+a_{16})^2$,

或 $15(1000-a_1^2)\geqslant(100-a_1)^2$,

即 $2a_1^2-25a_1-625=(2a_1+25)(a_1-25)\leqslant0$,

由于 $a_1>0$,于是 $a_1\leqslant25$;同理可知:$a_2,a_3,\cdots,a_{16}$ 均不大于25,故原命题获证.

例 3 (1993年全国高中数学联赛题)实数 x、y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$,记 $s=x^2+y^2$,求 $s_{\min}^{-1}+s_{\max}^{-1}$.

解 由条件知 $\dfrac{x^2+y^2}{s}=1$,从而,$4x^2-5xy+4y^2=5\cdot\dfrac{x^2+y^2}{s}$.

---

① 沈文选主编.初等数学解题研究[M].长沙:湖南科学技术出版社,1996:94~96.

即 $(4s-5)y^2-5sxy+(4s-5)x^2=0.$ (*)

当 $x=0$ 时，$y^2=\frac{5}{4}$，

此时，$s=x^2+y^2=\frac{5}{4}$.

当 $x\neq 0$ 时，(*)变为 $(4s-5)(\frac{y}{x})^2-5s\cdot\frac{y}{x}+(4s-5)=0$，视此式为 $\frac{y}{x}$ 的一元二次方程，那么，应有

$\Delta=(5s)^2-4\cdot(4s-5)^2\geqslant 0$，此时，$\frac{10}{13}\leqslant s\leqslant\frac{10}{3}$，等号成立的条件分别为

$x=-y=\pm\frac{\sqrt{65}}{13}$，$x=y=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$.

综合知 $s_{\min}^{-1}+s_{\max}^{-1}=\frac{8}{5}$.

例 4 (《数学教学》数学问题 384 题)已知 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，求证：

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geqslant a+b+c.$$

证明 设不等式的左端为 M.

$$\text{因 } 2=1+1=\frac{1}{M}\left(\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\right)+\frac{a+b+c}{a+b+c}$$

$$=\left[\frac{a^2}{(b+c-a)M}+\frac{b+c-a}{a+b+c}\right]+\left[\frac{b^2}{(c+a-b)M}+\frac{c+a-b}{a+b+c}\right]+\left[\frac{c^2}{(a+b-c)M}+\frac{a+b-c}{a+b+c}\right]$$

$$\geqslant\frac{2a}{\sqrt{(a+b+c)M}}+\frac{2b}{\sqrt{(a+b+c)M}}+\frac{2c}{\sqrt{(a+b+c)M}}=\frac{2(a+b+c)}{\sqrt{(a+b+c)M}}$$

$$=\frac{2\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{M}},$$

故 $\sqrt{M}\geqslant\sqrt{a+b+c}$，故 $M\geqslant a+b+c$.

例 5 (《数学通报》数学问题 1284 题)已知实数 $a>1,b>1,c>1$，求证：$\frac{a^3}{b^2-1}+\frac{b^3}{c^2-1}+\frac{c^3}{a^2-1}\geqslant\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

证明
$$\frac{a^3}{b^2-1}=\frac{1}{b^2-1}\left[\left(\frac{a^2-1}{2}+\frac{a^2-1}{2}+1\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\geqslant\frac{1}{b^2-1}\left[\left(3\sqrt[3]{\frac{a^2-1}{2}\cdot\frac{a^2-1}{2}\cdot 1}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{3}(a^2-1)}{2(b^2-1)}.$$

仿上可得：$\frac{b^3}{c^2-1}\geqslant\frac{3\sqrt{3}(b^2-1)}{2(c^2-1)}$，$\frac{c^3}{a^2-1}\geqslant\frac{3\sqrt{3}(c^2-1)}{2(a^2-1)}$.

把上面三个不等式相加，并整理得

$$\text{左端}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a^2-1}{b^2-1}+\frac{b^2-1}{c^2-1}+\frac{c^2-1}{a^2-1}\right)$$

$$\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 3=\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

例 6 (2001 年全国高中数学联赛题)设$\{a_n\}$为等差数列,$\{b_n\}$为等比数列,且$b_1=a_1^2,b_2=a_2^2,b_3=a_3^2(a_1<a_2)$,有$\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=1+\sqrt{2}$.试求数列$\{a_n\}$的首项和公差.

解 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,等比数列(b_n)的公比为q,则据

$a_1<a_2$,知 $d=a_2-a_1>0$. ①

因 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=1+\sqrt{2}$,且 $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2^2}{a_1^2}>0$,知$q\in(0,1)$,据$\{b_n\}$为等比数列及题目条件有 $b_2^2=b_1b_3$,推知

$a_2^4=a_1^2a_3^2$,则 $a_2^2=\pm a_1a_3$. ②

如果 $a_2^2=a_1a_3 \Leftrightarrow (a_1+d)^2=a_1(a_1+2d)$,推知$d=0$,这与①式矛盾.

从而,应有 $a_2^2=-a_1a_3$,

于是 $a_2^2=-a_1(2a_2-a_1)$,

即 $a_2^2+2a_1a_2-a_1^2=0$,

则 $\frac{a_2}{a_1}=-1\pm\sqrt{2}$.

而 $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2^2}{a_1^2}<1$,并注意①式,则 $a_1+a_2<0$,进而得 $a_1<0$. ④

据$0<q<1$知

$$q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2^2}{a_1^2}=(-1+\sqrt{2})^2,$$

即 $\frac{a_2}{a_1}=-1+\sqrt{2}$. ⑤

于是,$q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2^2}{a_1^2}=3-2\sqrt{2}$.

从而,$1+\sqrt{2}=\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\frac{b_1}{1-q}$. ⑥

⑤、⑥式联立并注意④式,得

$a_1=-\sqrt{2}$,

再注意⑤式有 $a_2=-2+\sqrt{2}$,

故 $d=a_2-a_1=2\sqrt{2}-2$.

例 7 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$均为正数,且$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$,求证:
$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

证明 设$M=\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}$,给$M$配对:$N=\frac{b_1^2}{a_1+b_1}+\frac{b_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{b_n^2}{a_n+b_n}$.

则$M-N=\frac{a_1^2-b_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2-b_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n}=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+\cdots+b_n)=0$.

所以$M=N$.

当注意到$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2$和$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$得

$$M+N=\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2+b_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(a_1+b_1)+\frac{1}{2}(a_2+b_2)+\cdots+\frac{1}{2}(a_n+b_n)$$

$$=\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\frac{1}{2}(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

$$=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

由 $M=N$,所以$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

例 8 (第 41 届 IMO 试题)设 a、b、c 是正数,且满足 $abc=1$,证明:

$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})\leqslant 1.$$

证明 把 $c=\frac{1}{ab}$代入不等式并化简得

$$(a+\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{b}+1-a)(1+a-\frac{1}{b})\leqslant\frac{a}{b}. \qquad (*)$$

不等式(*)关于 $a,\frac{1}{b},1$ 轮换对称,不防设 $a\geqslant 1,\frac{1}{b}\geqslant 1$.

若 $a\geqslant\frac{1}{b}+1$,显然不等式(*)成立.

若 $a<\frac{1}{b}+1$,则 $a,\frac{1}{b},1$ 可视为三角形的三边长. 令 $a+\frac{1}{b}-1=S_1$,$\frac{1}{b}+1-a=S_2$,$1+a-\frac{1}{b}=S_3$,则 $S_1+S_2=\frac{2}{b}$,$S_2+S_3=2$,$S_3+S_1=2a$.

因 $3=1+1+1=\frac{b}{2}(S_1+S_2)+\frac{1}{2}(S_2+S_3)+\frac{1}{2a}\cdot(S_3+S_1)$

$$=\left(\frac{bS_1}{2}+\frac{S_2}{2}+\frac{S_3}{2a}\right)+\left(\frac{S_1}{2a}+\frac{bS_2}{2}+\frac{S_3}{2}\right)$$

$$\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}(S_1S_2S_3)}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}(S_1S_2S_3)}$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{b}{a}(S_1S_2S_3)},$$

故 $\sqrt[3]{S_1S_2S_3}\leqslant\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$,即 $S_1S_2S_3\leqslant\frac{a}{b}$. 变即不等式(*)成立,故原不等式成立.

2. 分离

进行多项式运算时,常采用分离系数而获得快捷解法;解线性方程组时,分离系数而得到增广矩阵,进行矩阵的初等交换来快捷求得结果. 诸如上述操作,在处理问题时,始终瞄准最后目标,抓住问题的最本质的特性,将问题的“性质与构作形式分离”,可以使我们更快捷地获得结果. “分离”可以应用于许多方面,在含有参量的问题中,常常分离参量;在证明两曲线的四个交点共圆未必要求出这些交点的坐标;讨论数列的性质时未必要求出通项公式;讨论方程的解的性质不一定要解这个方程等等.

例 9 (1990 年全国高考题)设 $f(x)=\lg[\frac{1}{n}(1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa)]$,其中 $a\in\mathbf{R}$,$n\in\mathbf{N}$ 且

$n\geqslant 2$.如果 $f(x)$ 当 $x\in(-\infty,1]$ 时有意义,求 a 的取值范围.

解 要使 $f(x)$ 有意义,须 $1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a>0$.

分离参数 a,得 $a>-[(\frac{1}{n})^x+(\frac{2}{n})^x+\cdots+(\frac{n-1}{n})^x]$.

由 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$ 及 $x(-\infty,1]$,知 $g(x)=\left(\frac{k}{n}\right)^x(k<n,k\in\mathbf{N})$ 的递减性,得

$$\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\geqslant\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}=\frac{1}{2}(n-1).$$

由此易得 $a>-\frac{1}{2}(n-1)$.

例 10 k 为何值时,方程 $\frac{\lg(2-x^2)}{\lg(x-a)}=2$ 无解?有一解?有二解?

分析 方程等价于

$$\begin{cases}2-x^2=(x-a)^2, & ①\\ 2-x^2>0, & ②\\ x-a>0, & ③\\ x-a\neq 1. & ④\end{cases}$$

结合②、③,可将方程①中的 a 分离出来,得 $a=x^2-\sqrt{2-x^2}$,用三角代换法转化为三角函数问题.借助图象来分析求解.

解 由以上①、②、③得 $\sqrt{2-x^2}=x-a$,

即 $a=x-\sqrt{2-x^2}$.

由题中条件,可令 $x=\sqrt{2}\cos\alpha(\alpha\in(0,\pi))$,

则 $a=\sqrt{2}\cos\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha=2\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})$.

注意④中 $a\neq-2$、0,由此可作图 2,得 $a=2\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})$ 是图形中 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ 的一部分.

从而,当 $a\in(-\infty,-2]\cup\{0\}\quad\cup[\sqrt{2},+\infty)$ 时无解;

当 $a\in(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$ 时有一解;

当 $a\in(-2,-\sqrt{2})$ 时有二解.

注 对于含有参数的方程探讨类似例 2 的问题,可将参数从问题中分离出来,把问题转化为函数问题,结合图象来求解.对于参数是一次的问题,这一思路更显其优越性.

例 11 求实数 a 的取值范围,使得任意实数 x 和任意 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 恒有

$$(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{8}.$$

解 令 $t=\sin\theta+\cos\theta$,则

$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$.

则 原式左边 $=(x+t^2+2)^2+(x+at)^2$

$$\geqslant\frac{1}{2}[(x+t^2+2)-(x+at)]^2$$

$$=\frac{1}{2}(t^2-at+2)^2\geqslant\frac{1}{8}\text{恒成立}.$$

于是　$t^2-at+2\geqslant\frac{1}{2}$或$t^2-at+2\leqslant-\frac{1}{2}$.

因$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in[1,\sqrt{2}](\theta\in[0,\frac{\pi}{2}])$,

则$a\leqslant t+\frac{3}{2t}$或$a\geqslant t+\frac{5}{2t}$恒成立.

而当$t\in[1,\sqrt{2}]$时,

$t+\frac{3}{2t}\geqslant\sqrt{6}, t+\frac{5}{2t}\leqslant\frac{7}{2}$.

故　当$a\leqslant\sqrt{6}$或$a\geqslant\frac{7}{2}$时,原不等式恒成立.

例 12　(2003年全国高中联赛题)设A、B、C分别是复数$z_0=a\mathrm{i}, z_1=\frac{1}{2}+b\mathrm{i}, z_2=1+c\mathrm{i}$对应的不共线的三点($a$、$b$、$c$都是实数).证明:曲线$z=z_0\cos^4t+2z_1\cos^2t\cdot\sin^2t+z_2\sin^4t(t\in\mathbf{R})$与$\triangle ABC$中平行于$AC$的中位线只有一个公共点,并求出此点.

解　设$z=x+y\mathrm{i}(x、y\in\mathbf{R})$,则

$$x+y\mathrm{i}=a\cos^4t\cdot\mathrm{i}+2\left(\frac{1}{2}+b\mathrm{i}\right)\cos^2t\cdot\sin^2t+(1+c\mathrm{i})\sin^4t.$$

实虚部分离,可得

$x=\cos^2t\cdot\sin^2t+\sin^4t=\sin^2t$,

$y=a(1-x)^2+2b(1-x)x+cx^2(0\leqslant x\leqslant1)$,

即　$y=(a+c-2b)x^2+2(b-a)x+a.$　①

因为A、B、C三点不共线,故$a+c-2b\neq0$.可见所给曲线是抛物线段如图16-1,AB和BC的中点分别是$D\left(\frac{1}{4},\frac{a+b}{2}\right)$和$E\left(\frac{3}{4},\frac{b+c}{2}\right)$.

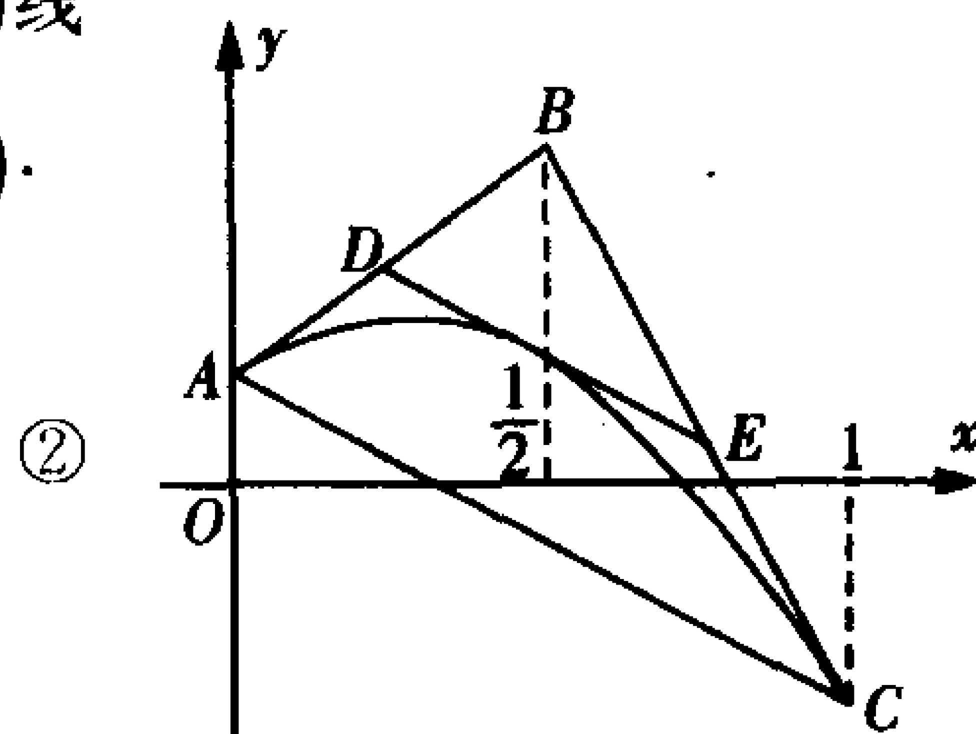


图16-1

所以,直线DE的方程为

$$y=(c-a)x+\frac{1}{4}(3a+2b-c).\quad②$$

由①、②联立得

$$(a+c-2b)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

由于$a+c-2b\neq0$,故$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$.于是$x=\frac{1}{2}$.注意到$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$,所以,抛物线与$\triangle ABC$中平行于$AC$的中位线$DE$有且只有一个公共点,此点的坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{a+c+2b}{4}\right)$,其对应的复数为

$$z=\frac{1}{2}+\frac{a+c+2b}{4}\mathrm{i}.$$

3. 分拆

在解题时，将待求解的问题适当分拆、分域或分类、分步，或将图形分析成易于处理的几个互相契合的图形，以便分别讨论、各个击破，或一一证之、解之.

例 13 （2001年湖南省竞赛题）已知 $a+b+c=0$，且 a、b、c 均不为0，则化简 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 为________.

解 填-3. 理由：原式进行分拆，得

$$原式=\left(\frac{a}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{c}\right)-\frac{a}{a}-\frac{b}{b}-\frac{c}{c}$$

$$=\frac{0}{a}+\frac{0}{b}+\frac{0}{c}-3=-3$$

例 14 （2001年湖南省竞赛题）计算 $\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{2001}{1999!+2000!+2001!}$ 的值为________.

解 填 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2001!}$. 理由：

由 $k!+(k+1)!+(k+2)!=k!(k+2)^2$，且 $\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{1}{k!(k+2)}=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}$.

$$故原式=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2000!}-\frac{1}{2001!}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2001!}.$$

例 15 求和 $S_n=\frac{\sin\theta}{\cos2\theta+\cos\theta}+\frac{\sin2\theta}{\cos4\theta+\cos\theta}+\cdots+\frac{\sin n\theta}{\cos2n\theta+\cos\theta}$.

解 $S_n=\frac{\sin\theta}{2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin2\theta}{2\cos\frac{5\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}}+\cdots+\frac{\sin n\theta}{2\cos\frac{2n+1}{2}\theta\cos\frac{2n-1}{2}\theta}$.

当 $\sin\frac{\theta}{2}\neq0$ 时，

$$\sin\frac{\theta}{2}\cdot S_n=\frac{\sin\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin2\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{5\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}}+\frac{\sin n\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{2n+1}{2}\theta\cdot\cos\frac{2n-1}{2}\theta}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}}{4\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{\cos\frac{3\theta}{2}-\cos\frac{5\theta}{2}}{4\cos\frac{5\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}}+\cdots+\frac{\cos\frac{2n-1}{2}\theta-\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{4\cos\frac{2n+1}{2}\theta\cos\frac{2n-1}{2}\theta}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{\cos\frac{3\theta}{2}}-\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)+\left(\frac{1}{\cos\frac{5\theta}{2}}-\frac{1}{\cos\frac{3\theta}{2}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}-\frac{1}{\cos\frac{2n-1}{2}\theta}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}-\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\right).$$

故 $S_n=\frac{1}{4\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{1}{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}-\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$.

当 $\sin\frac{\theta}{2}=0$ 时，$S_n=0$.

例 16 求积 $T_n=(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2})\cdot(\cos\frac{A}{2^2}+\cos\frac{B}{2^2})\cdot\cdots\cdot(\cos\frac{A}{2^n}+\cos\frac{B}{2^n})$.

解 因 $T_n=(2\cos\frac{A+B}{2^2}\cos\frac{A-B}{2^2})\cdot(2\cos\frac{A+B}{2^3}\cos\frac{A-B}{2^3})\cdots\cdots(2\cos\frac{A+B}{2^{n+1}}\cos\frac{A-B}{2^{n+1}})$

$$=2^n(\cos\frac{A+B}{2^2}\cdot\cos\frac{A+B}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{A+B}{2^{n+1}})\cdot(\cos\frac{A-B}{2^2}\cdot\cos\frac{A-B}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{A-B}{2^{n+1}}).$$

令 $\frac{A+B}{2}=\alpha,\frac{A-B}{2}=\beta$，则

$T_n=2^n(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n})\cdot(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2^2}\cdots\cos\frac{\beta}{2^n})$.

而 $\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2^2}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2^n}}=\frac{\sin\alpha}{2^n\cdot\sin\frac{\alpha}{2^n}}$.

同理 $\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2^2}\cdots\cos\frac{\beta}{2^n}=\frac{\sin\beta}{2^n\cdot\sin\frac{\beta}{2^n}}$.

故 $T_n=2^n\cdot\frac{\sin\alpha}{2^n\cdot\sin\frac{\alpha}{2^n}}\cdot\frac{\sin\beta}{2^n\cdot\sin\frac{\beta}{2^n}}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2^n\cdot\sin\frac{\alpha}{2^n}\cdot\sin\frac{\beta}{2^n}}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2^n\sin\frac{A+B}{2^{n+1}}\sin\frac{A-B}{2^{n+1}}}$.

例 17 (1998 年"希望杯"全国邀请赛高二培训题)已知 $x、y、z\in\mathbf{R}^+$，求$\frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$的最大值.

解 认真观察，分析分子、分母结构，只须分拆 y^2 使 $y^2=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^2$，于是

$$\frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{xy+yz}{(x^2+\frac{1}{2}y^2)+(\frac{1}{2}y^2+z^2)}\leqslant\frac{xy+yz}{2\sqrt{\frac{1}{2}}xy+2\sqrt{\frac{1}{2}}yz}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}y=z$ 时，函数$\frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$有最大值$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 18 (1985 年波兰—奥地利联合竞赛试题)设 $x、y、z、w$ 是四个不全为零的实数，求 $S=\frac{xy+2yz+zw}{x^2+y^2+z^2+w^2}$的最大值.

解 引入参数 $t>0$，分拆项：$y^2=ty^2+(1-t)y^2$，$z^2=(1-t)z^2+tz^2$，于是 $S=\frac{xy+2yz+zw}{(x^2+ty^2)+(1-t)y^2+(1-t)z^2+(tz^2+w^2)}\leqslant\frac{xy+2yz+zw}{2\sqrt{t}xy+2(1-t)yz+2\sqrt{t}zw}$；令 $2\sqrt{t}:2(1-t)=1:2$，或 $t^2-6t+1=0$，解得 $t=3-2\sqrt{2}$，于是

$$S\leqslant\frac{xy+2yz+zw}{2\sqrt{t}(xy+2yz+zw)}=\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2\sqrt{3-2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

故当 $x^2=(3-2\sqrt{2})y^2=(3-2\sqrt{2})z^2=w^2$ 时，$S_{\max}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

4. 排序

如果一个竞赛问题中涉及一批可以比较大小或顺序的对象(实数、长度、角度等)，它们之间没有事先规定大小或顺序，那么，在解题之前可以假定它们能按某种顺序(实数的大小、线段的长度、角的度量等)排列起来，通过对这种顺序的研究，常有利于问题的思考.

例 19 平面上有奇数个点，如果其中任意三点能组成三角形，且其周长均不相等，则必存在一个椭圆，使得椭圆内与椭圆外点数相同.

证明 当平面上只有 3 点时，任作一个椭圆过其中一点，使其内、外各有一点.

当平面上有 $2n+1(n\geqslant 2$ 时)，可从中任取两点，以此两点作为椭圆的焦点，它们与其余的 $2n-1$ 个点中每一点都可以确定一个椭圆，由于这些椭圆中任意三点所组成的三角形周长都不相等，故这点能且确定 $2n-1$ 个不同的椭圆，设这些椭圆的长轴从小到大排列为

$a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots<a_{2n-1}$.

设对应于 a_{n-1} 的椭圆为 C，则 C 就把 $2n-1$ 个分成三部分，其中 $n-2$ 个点加上 2 个焦点共 n 个点在 C 内，一个点在 C 上，在 C 外面还有 n 个点，问题获证.

例 20 (1990 年全国初中联赛题)设有 $2n\times 2n$ 的正方形方格棋盘，在其中任意的 $3n$ 个方格中各放一枚棋子，求证可以选出 n 行和 n 列，使得 $3n$ 枚棋子都在这 n 行和 n 列中.

证明 设 $3n$ 枚棋子放进棋盘后，$2n$ 行上的棋子数从小到大分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$，有

$0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{2n}$, ①

$a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n}=3n$. ②

由此可证

$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}\geqslant 2n$. ③

(1)若 $a_{n+1}\geqslant 2$，③式显然成立.

(2)若 $a_{n+1}\leqslant 1$ 时，

$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant n\cdot a_{n+1}\leqslant n$,

从而 $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}=3n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\geqslant 2n$.

得③式也成立.

据③式，可取棋子数分别为 $a_{n+1},a_{n+2},\cdots,a_{2n}$ 所对应的行，共 n 行. 由于剩下的棋子数不超过 n，因而至多取 n 列必可取完全部 $3n$ 个棋子.

例 21 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是自然数，且满足

$x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1x_2\cdots x_n$. ①

求 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最大值($n\geqslant 2$).

解 由条件的对称性，不妨设

$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$. ②

这就改变了条件的对称性，相当于增加了一个条件

$x_{n-1}\geqslant 2(n\geqslant 2)$.

否则，$x_{n-1}=1$，由②知

$x_1=x_2=\cdots=x_{n-2}=x_{n-1}=1$,

从而，代入①得 $(n-1)+x_n=x_n$ 矛盾. 这时，由①有

$$x_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{x_1x_2\cdots x_{n-1}-1}$$
$$\leqslant\frac{x_1x_2\cdots x_{n-2}+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-2}+x_1x_2\cdots x_{n-2}x_{n-1}}{x_1x_2\cdots x_{n-1}-1}$$
$$=\frac{(n-2+x_{n-1})x_1x_2\cdots x_{n-2}}{x_1x_2\cdots x_{n-1}-1}$$
$$\leqslant\frac{(n-2+x_{n-1})x_1x_2\cdots x_{n-2}}{x_1x_2\cdots x_{n-1}-x_1x_2\cdots x_{n-2}}$$
$$=\frac{n-2+x_{n-1}}{x_{n-1}-1}$$
$$=1+\frac{n-1}{x_{n-1}-1}\leqslant n.$$

当 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-2}=1$ 且 $x_{n-1}=2$ 时，x_n 有最大值 n. 这也就是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的最大值.

例 22 （2003 年中国女子奥林匹克题）(1)证明：存在和为 1 的五个非负实数 a、b、c、d、e，使得将它们任意放置在一个圆周上，总有两个相邻数的乘积不小于 $\frac{1}{9}$；

(2)证明：对于和为 1 的任意五个非负实数 a、b、c、d、e，总可以将它们适当放置在一个圆周上，且任意相邻两数的乘积均不大于 $\frac{1}{9}$.

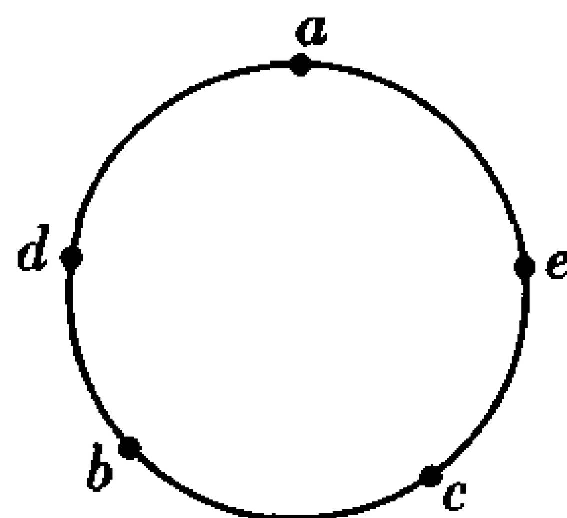


图 16－2

证明 (1)当 $a=b=c=\frac{1}{3}$，$d=e=0$ 时，把 a、b、c、d、e 任意放置在一个圆周上，总有两个 $\frac{1}{3}$ 是相邻的，它们的乘积不小于 $\frac{1}{9}$.

(2)不妨设 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d\geqslant e\geqslant 0$，把 a、b、c、d、e 按图 16－2 所示放置. 因为 $a+b+c+d+e=1$，所以，

$$a+3d\leqslant 1,$$
$$a\cdot 3d\leqslant\left(\frac{a+3d}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}.$$

从而，$ad\leqslant\frac{1}{12}$.

又因为 $a+b+c\leqslant 1$，所以，$b+c\leqslant\frac{2}{3}$. 于是，

$$bc\leqslant\frac{(b+c)^2}{4}\leqslant\frac{1}{9}.$$

因为 $ce\leqslant ae\leqslant ad$，$bd\leqslant bc$，所以，相邻两数的乘积均小于 $\frac{1}{9}$.

例 23 （2003 年第 29 届俄罗斯奥林匹克题）设 a、b、c 为正数，它们的和等于 1. 证明：
$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geqslant\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

证明 不失一般性，设 $a\geqslant b\geqslant c$，于是，$1-c^2\geqslant 1-b^2\geqslant 1-a^2$. 从而，$\frac{1}{1-a^2}\geqslant\frac{1}{1-b^2}\geqslant\frac{1}{1-c^2}$.

注意到 $\frac{1}{1-a}-\frac{2}{1+a}=\frac{3a-1}{1-a^2}$，故只须证明

$$\frac{3a-1}{1-a^2}+\frac{3b-1}{1-b^2}+\frac{3c-1}{1-c^2}\geqslant 0. \qquad ①$$

由于式①左端三个分式的分子之和等于0,所以,在不增大各个分数值的前提下,可将它们的分母变为相等,易知在 $a\geqslant b\geqslant c$ 的假定下,有 $a\geqslant\frac{1}{3}$,$c\leqslant\frac{1}{3}$. 如果 $a\geqslant b\geqslant\frac{1}{3}\geqslant c$,那么,只要将不等式①左端三个分式的分母都换为 $1-c^2$,即可保证其中的负分数的值不变,且正分数的值不增大,从而式①成立;如果 $a\geqslant\frac{1}{3}\geqslant b\geqslant c$,那么,只要将式①左端三个.

注 此例亦可运用叠加而获证:

由不等式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{4}{x+y}$,其中 $x>0,y>0$,可以得到

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\geqslant\frac{4}{a+2b+c},$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geqslant\frac{4}{b+2c+a},$$

$$\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geqslant\frac{4}{c+2a+b}.$$

将上述三个不等式相加,得到

$$\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\geqslant\frac{4}{a+2b+c}+\frac{4}{b+2c+a}+\frac{4}{c+2a+b}.$$

将条件 $a+b+c=1$ 代入并化简,即得所证.

5. 逐步调整

调整,就是为了解决某个问题而从与问题实质有联系的较宽要求开始,然后充分利用已获得的结果作为新的行动基地,逐步加强要求,逐步逼近原问题,直至最后彻底解决.

例 24 (1985年美国奥林匹克题)设 A,B,C,D 为空间中四点,连线 AB,AC,AD,BC,BD,CD 中至多有一条长度大于1,试求这六条线段长度之和的最大值.

解 设 AD 为六条线段中最长的一条.

(i)将其余五条线段的长度固定,易知,当 A 和 D 为平面四边形 $ABCD$ 的相对顶点时,AD 取得最大值.

(ii)固定 B,C 的位置,因 AB,AC,BD,CD 的长度都不超过1,所以,A 和 D 必落在分别以 B 和 C 为心,1为半径的两圆的公共部分上. 这时,具有最大可能距离的惟一的一对点就是两圆的两个交点. 而当 A,D 为这两点时,AB,BD,AC,CD 均为1,恰好达到它们各自的最大值.

(iii)留下的问题是 BC 变小时,AD 变大;BC 变大时,AD 为小. 因此,必须在其余四边固定为1的条件下,考虑 $BC+AD$ 的最大值.

记 $\angle ABO=\theta$(O 为 AD 与 BC 交点)由 $AB=1,0<BC\leqslant 1$,故知 $\frac{\pi}{3}\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$,于是有 $AD+BC=2(\sin\theta+\cos\theta)=2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$. 注意到 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ 在区间 $\frac{\pi}{3}\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ 上为减函数,所以当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时取得最大值. 这时六条线段之和为 $4+2(\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3})=5+\sqrt{3}$.

注 对于问题涉及的多个可变对象,先对其中少数对象进行调整,让其他对象暂时保持不变,取

得问题的局部解决.经过若干次这样局部的调整,逐渐逼近目标,最终得到整个问题的解决.这无疑是一种化整为零、化难为易之举.

例 25 (1991年独联体数学竞赛题)某电影院的座位共有 m 排,每排有 n 座,票房共售出 mn 张电影票.由于疏忽,这一场票中有些号是重的,不过每位观众都可以照票上所标的排次号或座次号之一入座.求证:至少可使一名观众既坐对排次,又坐对座次,而其他观众保持前述情况就座.

证明 由题设票有重号,破坏了票、座之间的一一对应,必有数票对一座,也至少必有一座无票与之对应.

我们先考虑这种情形:让所有观众依据题设规则全部就座,并把这时的位置称为各人的"原来位置",下面我们进行调整.

我们从 mn 位观众中任选一名观众(编号为第一号),如果他恰好同时既坐对了排号和座号(称这样的位置为持票人"自己的位置",下同),则命题已证.若不然,我们请第一号观众根据所持票号坐到"自己的位置"上去;同时请出了坐在该位置上的被编为"第二号"观众,……,如此下去,一直请到第 k 号观众为止.请注意,这时第一号观众的"原来位置"还空着,而第 k 号观众还未就座.

对于自然数 $k(2\leqslant k\leqslant mn)$,我们可以这样要求:或者第 k 号观众所持票号恰好与第一号观众空出来的位置的排号和座号相同,则第 k 号观众就坐空位;或者第 k 号观众所持原票号与第一号观众"原来位置"完全无关,则是前 $k-1$ 个观众中的第 $i(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 号观众现在坐着的位置,那么我们再作如下的调整:请第1号至第 i 号的观众依次分别退回各自的"原来位置",再请第 k 号观众就坐在第 i 号观众刚才空出来的位置上,这时,显然第 k 号观众坐到"自己的位置"上,而且第 $i+1$ 到第 $k-1$ 号观众都坐在"自己的位置"上.从而命题获证.

注 类似于此例,先给出问题的一个初始解(可行或近似的),然后以此解为基础,按一定的程序给出一个解序列,它的极限就是问题的精确解,而序列的每一项都是近似解,且一个比一个更接近于精确解;或是先以有关的某个简单问题奠基,然后适当调整,把问题归结到已有的结论上,重复进行上述工作,最终导致整个问题的圆满解决.这无疑是一种逼近、化归的方法.

例 26 (排序原理)设 $A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$,$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$是两个各有 n 个实数的数集.若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$,$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$和$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$是$(1,2,\cdots,n)$的任意两个排列,则

$$a_{i_1}b_{j_1}+a_{i_2}b_{j_2}+\cdots+a_{i_n}b_{j_n}\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \qquad (\text{I})$$

若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$,$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$,$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$和$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$是$(1,2,\cdots,n)$的任意两个排列,则

$$a_{i_1}b_{j_1}+a_{i_2}b_{j_2}+\cdots+a_{i_n}b_{j_n}\geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \qquad (\text{II})$$

(Ⅰ)、(Ⅱ)两式中等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$,$b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时成立.

证明 仅证(Ⅱ)式.(Ⅱ)式左端可看作系统的初始状态,右端可看作最终状态,如果我们对左端作出调整,将左端调整到右端而左端的和不会增大,问题即可获证.

调整分两步进行:首先调整 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}$ 的顺序为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,由加法交换律,经过有限次交换,总可得

$$a_{i_1}b_{j_1}+a_{i_2}b_{j_2}+\cdots+a_{i_n}b_{j_n}=a_1b_{k_1}+a_2b_{k_2}+\cdots+a_nb_{k_n},$$

这里 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

由此,我们只须证

$$a_1b_{k_1}+a_2b_{k_2}+\cdots+a_nb_{k_n}\geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \qquad (\text{III})$$

考虑 k_n,若 $k_n\neq n$,则一定存在 $k_i=n(i\neq n)$,则这样调整:调换 b_{k_i} 与 b_{k_n} 的位置而其余不动,由题

设条件以及

$$(a_ib_{k_i}+a_nb_{k_n})-(a_ib_{k_n}+a_nb_n)$$
$$=(a_ib_n+a_nb_{k_n})-(a_ib_{k_n}+a_nb_n)$$
$$=(b_n-b_{k_n})(a_i-a_n)\geqslant 0,$$

有

$$(a_1b_{k_1}+a_2b_{k_2})+\cdots+a_nb_{k_n}$$
$$\geqslant a_1b_{k_1}+a_2b_{k_2}+\cdots+a_ib_{k_n}+\cdots+a_nb_n. \quad (\text{IV})$$

若 $k_n=n$，则考虑 k_{n-1}，仿上调整 $a_{n-1}b_{k_{n-1}}$ 为 $a_{n-1}b_{n-1}$，所得的和不会增大. 如此至多经过 $n-1$ 次调整，即得不等式(Ⅲ)，从而不等式(Ⅱ)成立. 且由证题过程可以看出，(Ⅱ)式中等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时成立.

注 ①上述原理，我们也可以简称为"同序积和最大，反序积和最小，乱序积和居中".

②我们将所讨论的对象看作一个系统，从系统处的某一状态(称为初始状态)出发，对系统作逐步调整，以达到系统所需要的状态(最终状态)，从而使问题获得解决. 当然系统的最终状态在某些情况下是已知的(如不等式证明的结论)，而在某些情况下则是未知的，这需要在调整过程中通过试验而得到.

【解题尝试】

A 组

1. (2002 年湖南省竞赛题)已知动点 $P(x,y)$ 满足二次方程 $10x-2xy-2y+1=0$. 则此二次曲线的离心率为__________.
2. (《数学教学》数学问题 538 题)已知 $a>1,b>1,c>1$，且 $a^2+b^2+c^2=12$，求证：$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}\geqslant 3$.
3. (第 9 届"希望杯"邀请赛题)若 $0<a,b,c<1$，且 $a+b+c=2$，则 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值是________.
4. (1993 年北京市数学竞赛试题)若 x,y 都是实数，且 $x^2+y^2=2$，求 $f(x,y)=x+y$ 的最大值.
5. 设 $x、y、z\in\mathbf{R}^+$，求证：$\frac{3xy+yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}$.
6. 设 $x、y、z\in\mathbf{R}^+$，求 $\frac{2x^2+y^2+2z^2}{xy+\sqrt{3}yz}$ 的最小值.
7. 设 $a、b、c、d、e\in\mathbf{R}^+$，则 $\frac{ab+2bc+2cd+de}{a^2+3b^2+3c^2+5d^2+e^2}$ 的最大值是__________.
8. 求和 $S_n=\sin\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{4}+\cdots+2^{n-1}\cdot\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2^n}$.
9. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 为奇函数，且在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，对于任意 $x\in\mathbf{R}$，求实数 m，使 $f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>0$ 恒成立.
10. (1988 年四川省竞赛试题)已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a(a>0)$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=\frac{a^2}{n-1}(n\in\mathbf{N}$，且 $n\geqslant 2)$，求证：

$0 \leqslant x_i \leqslant \frac{2a}{n}(i=1,2,\cdots,n)$.

B组

1. (1987年IMO中国集训队测验题)已知 $a、b、c \in \mathbf{R}^+$,求证:
$a^5+b^5+c^5 \geqslant a^3bc+ab^3c+abc^3$.
2. (《数学教学》2002(1)数学问题552)已知 $a>1,b>1,t\in \mathbf{R}^+$,求证:$\frac{a^{2t}}{b^t-1}+\frac{b^{2t}}{a^t-1}\geqslant 8$.
3. (《数学教学》1999(4)数学问题488)已知 $a>1,b>1,c>1$,求证:
$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{c-1}+\frac{c^2}{a-1}\geqslant 12$.
4. (《数学教学》2001(5)数学问题543)设 $a、b、c$ 为三角形的三边长,求证:
$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\geqslant 3$.
5. 已知 $2xy+yz>0$,求 $\frac{x^2+y^2+z^2}{2xy+yz}$ 的最小值.
6. (28届IMO中国代表队选拔考试题)设实数 $a、b、c$,使得下面不等式 $a(x-y)(x-z)+b(y-x)(y-z)+c(z-x)(z-y)\geqslant 0$,对任意实数 $x、y、z$ 恒成立,那么,$a、b、c$ 需满足什么条件($a、b、c$ 的等式或不等式)?
7. (1989年全俄数学竞赛题)在 $1,2,3,\cdots,1989$ 每个数前添上"+"或"-"号,使其代数和为最小的非负数,并写出算式.
8. (1990年全苏数学竞赛题)已知二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的所有系数都是正的且 $a+b+c=1$,求证:对于任何满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$ 的正数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都有 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\geqslant 1$.
9. (1985年北京市竞赛题)在线段 AB 上关于它的中点 M 对称地放置 $2n$ 个点.任意将这 $2n$ 个点中的 n 个染成红点,另 n 个染成蓝点.证明:所有红点到 A 的距离之和等于所有蓝点到 B 的距离之和.
10. (1991年第32届IMO预选题)设 $\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant 1,a_i\geqslant 0,0\leqslant b_i\leqslant p,i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2$.如果 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=1,A_i=\prod\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}a_j$,求证:$\sum\limits_{i=1}^{n}b_iA_i\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}}$.

解题尝试参考解答

第1章 探索法

A组

1. 选B. 理由：从熟悉的关系 $\sin x\leqslant x$ 考虑. 因为 $0<x\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$，故有 $0<\sin x<x$，即 $0<\frac{\sin x}{x}<1$. 所以，$\frac{\sin x}{x}>\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$. 又因为 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数，而 $0<x^2\leqslant x\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\sin x^2}{x^2}\geqslant\frac{\sin x}{x}$.

2. 选D. 理由：从底数 a 的分界值1考虑.

当 $a>1$ 时，由于真数 $\frac{3}{5}<1$，故 $\log_a\frac{3}{5}$ 恒小于1. 于是，$a>1$，满足题意.

当 $\frac{3}{5}\leqslant a<1$ 时，$\log_a\frac{3}{5}>\log_a a=1$，不符合题意.

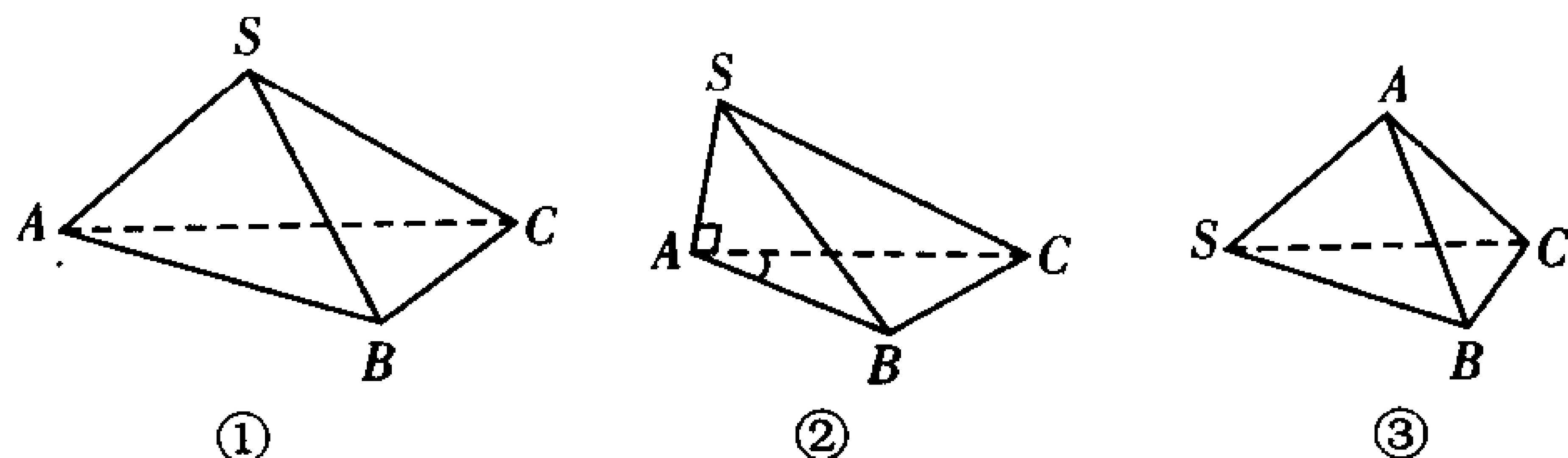
当 $0<a<\frac{3}{5}$ 时，对数值小于1，满足题意.

3. 选D. 理由：首先感觉到正方体中截面的正射影的顶点应在射影面的边上. 这四个图中恰有 D 不满足. 再通过实际分析，截面投影到面 D_1DBB_1 时应成一条线段. 故选D

4. 选C. 理由：对三棱锥的棱和底边取具体简单数字具体计算进行探索.

(1)如图示①，若 $SA=SB=SC=BC=1$，$SA\perp SB$，$SA\perp SC$，则 $V_{S\text{-}ABC}=V_{A\text{-}SBC}=\frac{\sqrt{3}}{12}$；

(2)如图示②，若 $SB=SC=BC=1$，$SA=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$SA\perp AB$，$SA\perp AC$，则 $V_{S\text{-}ABC}=\frac{\sqrt{2}}{24}$；



(3)如图示③，若 $SA=SB=AB=AC=BC=1$，$SC=\sqrt{2}$，$SA\perp AC$，$SB\perp BC$，则 $V_{S\text{-}ABC}=V_{A\text{-}SBC}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

5. 选 B. 理由：注意从三角函数式及角的形式的变形方面探索，并充分利用题设信息.

由已知条件得 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\sqrt{1-x^2}$，故

$$y=\cos\alpha=\cos[(\alpha+\beta)-\beta]$$
$$=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta$$
$$=-\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{5}x.$$

x 的取值范围应满足不等式组

$$\begin{cases}0<x<1,\\0<-\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{5}x<1.\end{cases}$$

解得 $\frac{4}{5}<x<1$.

6. 选 A. 理由：充分利用题设信息，则设数列共有 n 项：$a_1,a_2,\cdots,a_n$，根据题意得

$a_1+a_2+a_3+a_4=26$，

$a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=110$.

因为等差数列满足

$a_1+a_n=a_1+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3}$，

所以，$4(a_1+a_n)=26+110=136$，$a_1+a_n=34$.

又$\frac{n(a_1+a_n)}{2}=187$，即$\frac{n\times34}{2}=187$，故 $n=11$.

7. (1) $$|f(x)|=|ax^2+x-a|$$
$$=|a(x^2-1)+x|$$
$$\leqslant|a(x^2-1)|+|x|\leqslant|x^2-1|+|x|$$
$$=1-|x^2|+|x|=-\left(|x|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}.$$

(2)当 $a=0$ 时，$f(x)=x(|x|\leqslant1)$的最大值是 $f(1)=1$，与题设矛盾.

当 $a\neq0$ 时，$f(x)$为二次函数.

(i)当 $a>0$ 时，其开口向上，故最大值只能在 $x=-1$ 或 $x=1$ 时取得. 而 $f(-1)=a-1-a=-1$，矛盾. $f(1)=a+1-a=1$ 也矛盾.

(ii)当 $a<0$ 时，最大值同样不会在 $x=1$ 和 $x=-1$ 上取得，故使得 $f(x)=ax^2+x-a(|x|\leqslant1)$ 有最大值$\frac{17}{8}$，只能等价于

$$\begin{cases}-1<-\frac{1}{2a}<1,\\f\left(-\frac{1}{2a}\right)=\frac{17}{8},\\a<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<-\frac{1}{2},\\(a+2)\left(a+\frac{1}{8}\right)=0\end{cases}\Rightarrow a=-2.$$

8. (1) $$g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant-2\text{ 或 }x\geqslant1,\\-x^2-x+2, & -2<x<1.\end{cases}$$

(2)由题设条件，$a>0$ 时，直线 $y=ax+b$ 与曲线 $y=g(x)$交于三个不同的点，只须直线与曲线

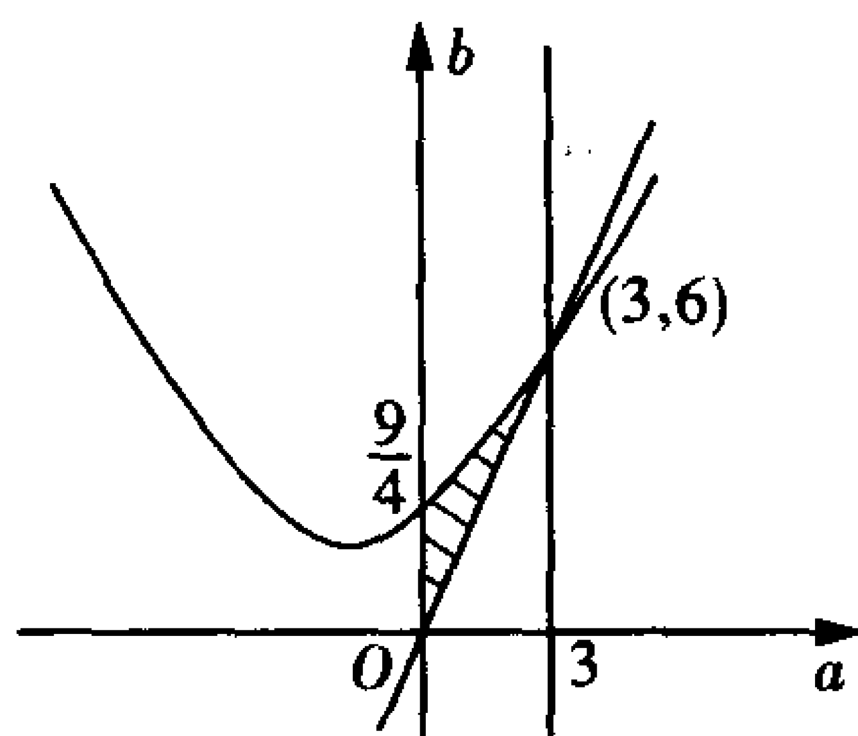
在 $-2<x<1$ 的范围内有两个交点，由方程组

$$\begin{cases} y=ax+b, \\ y=-x^2-x+2(-2<x<1) \end{cases},$$

消去 y，得

$x^2+(a+1)x+b-2=0.$

于是，只须二次函数 $\varphi(x)=x^2+(a+1)x+b-2$ 的图象在 $-2<x<1$ 的范围内与 x 轴有两个交点. 此时，a、b 应同时满足以下条件：



$$\begin{cases} \Delta=(a+1)^2-4(b-2)>0, \\ -2<-\dfrac{a+1}{2}<1, \\ \varphi(-2)>0, \\ \varphi(1)>0. \end{cases}$$

即 $\begin{cases} b<\dfrac{1}{4}(a+1)^2+2, \\ -3<a<3, \\ b>2a, \\ b>-a. \end{cases}$

又已知 $a>0$，所以，$2a<b<\dfrac{1}{4}(a+1)^2+2$，且 $0<a<3$ 即为所求.

以 a、b 为坐标的点 (a,b) 所在的区域为右图中阴影部分（不含边界）.

B组

1. 观察等式 $(a+b+c)^2=9$，有 $ab+bc+ca=\dfrac{9-a^2-b^2-c^2}{2}$，于是只需证明

$2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}+a^2+b^2+c^2\geqslant 9.$

为此先证 $2\sqrt{a}+a^2\geqslant 3a$.

事实上，有 $2\sqrt{a}+a^2=\sqrt{a}+\sqrt{a}+a^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^3}=3a$.

类似可得其余两个不等式，从而，

$2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}+a^2+b^2+c^2\geqslant 3(a+b+c)=9.$

2. 任取 a、b、$c\in M$，$a\neq b\neq c$，则 $a^2+b\sqrt{2}$，$b^2+a\sqrt{2}$，$c^2+a\sqrt{2}$，$c^2+b\sqrt{2}$ 都是有理数. 因此，

$a^2+b\sqrt{2}-(b^2+a\sqrt{2})=(a-b)(a+b-\sqrt{2})=\dfrac{1}{2}(a\sqrt{2}-b\sqrt{2})(a\sqrt{2}+b\sqrt{2}-2)\in\mathbf{Q}$，$c^2+a\sqrt{2}-(c^2+b\sqrt{2})=(a\sqrt{2}-b\sqrt{2})\in\mathbf{Q}$.

从而，$(a\sqrt{2}+b\sqrt{2})\in\mathbf{Q}$. 这样便知 $a\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}(a\sqrt{2}+b\sqrt{2}+a\sqrt{2}-b\sqrt{2})\in\mathbf{Q}$.

3. 我们有 $\angle LAK=\angle BAK+\angle BAL=\dfrac{1}{2}(\angle BO_2O_1+\angle BO_1O_2)=180^\circ-\angle LBK$.

故知 $ALBK$ 是圆内接四边形. 从而 $\angle BO_2O_1=\angle BAK=\angle BLK$. 所以，$KL/\!/O_1O_2$.

4. 假设对正整数 n 有所述的表达式 $n=a_1+a_2+\cdots+a_{2002}=b_1+b_2+\cdots+b_{2003}$.

注意到 $a_1,a_2,\cdots,a_{2002}$ 的各位数字之和相同，所以它们被 9 除的余数相同，记该余数为 $r(0\leqslant r\leqslant 8)$. 同理，$b_1,b_2,\cdots,b_{2003}$ 被 9 除的余数相同，记为 $s(0\leqslant s\leqslant 8)$.

于是，$n-2002r$ 和 $n-2003s$ 都是 9 的倍数. 故

$(n-2002r)-(n-2003s)=2003s-2002r=2003(r+s)-4005r$ 是 9 的倍数.

由于 4005 是 9 的倍数，而 2003 与 9 互质，所以 $r+s$ 是 9 的倍数.

如果 $r=s=0$，则 $n\geqslant 9\times 2003$(因为此时 $b_1,b_2,\cdots,b_{2003}$ 都可被 9 整除). 如果 $r\neq 0$，则 $r+s=9$，于是，r 与 s 中至少有一个不小于 5. 此时分别得到

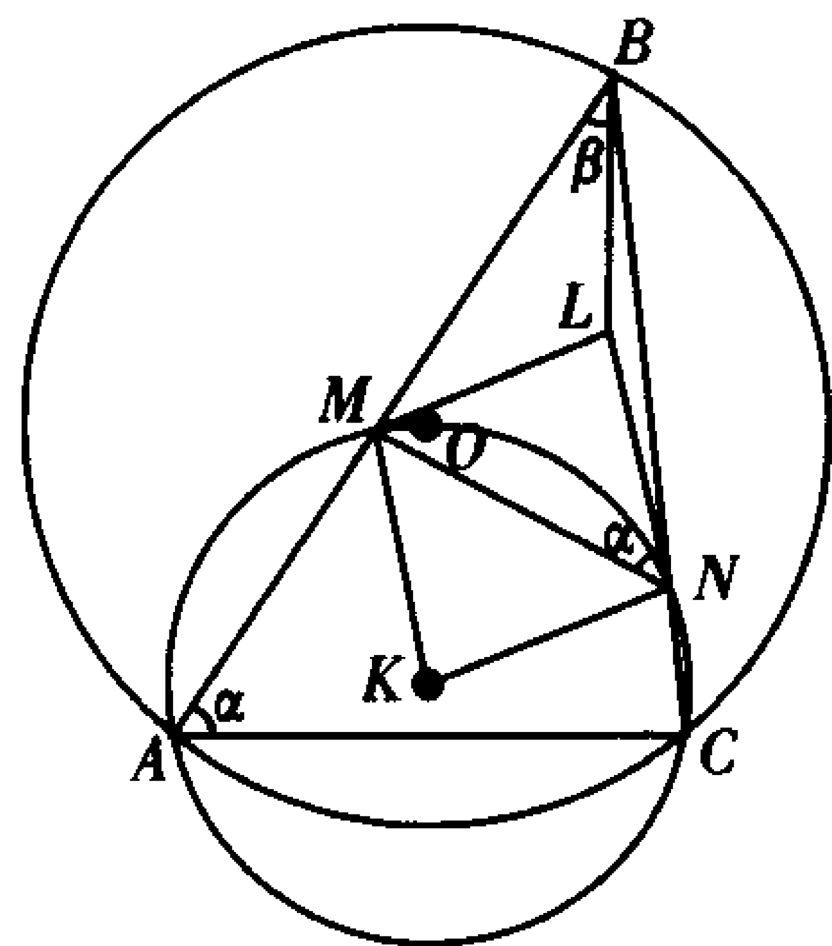
$n\geqslant 5\times 2002$ 或 $n\geqslant 5\times 2003$.

由于 $10010=5\times 2002=4\times 2002+2002\times 1$，而 4 与 2002 的各位数字之和相同，所以 10010 即为所求.

5. 如果 $x_1^2+ax_1+1=0$ 且 $x_1^2+bx_1+c=0$，则 $(a-b)x_1+(1-c)=0$. 所以，$x_1=\frac{c-1}{a-b}$. 同理，由等式 $x_2^2+x_2+a=0$ 和 $x_2^2+cx_2+b=0$ 推出 $x_2=\frac{a-b}{c-1}$(显然 $c\neq 1$). 故 $x_2=\frac{1}{x_1}$.

另一方面，由韦达定理得知 $\frac{1}{x_1}$ 是第一个方程的根. 这就表明 x_2 是方程 $x^2+ax+1=0$ 和 $x^2+x+a=0$ 的公共根. 因此，$(a-1)(x_2-1)=0$. 但当 $a=1$ 时，这两个方根无实根，所以必有 $x_2=1$，从而 $x_1=1$. 于是，$a=-2$，$b+c=-1$，故 $a+b+c=-3$.

6. 如图，设 $\angle ABC=\beta$，$\angle BAC=\alpha$. 则 $\angle AOC=2\beta$，从而在圆 ω_1 上不包含点 O 的弧 $\overset{\frown}{AC}$ 等于 4β. 由于 $\angle ABC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{MN})$，故知 $\beta=\frac{1}{2}(4\beta-\overset{\frown}{MN})$，从而，$\overset{\frown}{MN}=2\beta$，$\angle MKN=2\beta$(圆心角). 由 L 与 K 关于 MN 的对称性得 $\angle MLN=2\beta$，$MN=LN$. 由上述各等式推知 L 是 $\triangle MBN$ 的外心.



由于四边形 $AMNC$ 内接于圆 ω_1，故知 $\angle BNM=\angle BAC=\alpha$. 在 $\triangle MBN$ 的外接圆中，$\angle BLM$ 为圆心角，所以 $\angle BLM=2\alpha$. 在 $\triangle MBL$ 中，$\angle MBL=\angle LMB=\frac{1}{2}(\pi-2\alpha)=\frac{\pi}{2}-\alpha$. 由于 $\angle ABL+\angle BAC=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\alpha=\frac{\pi}{2}$，所以 $BL\perp AC$.

注：以上为 $\beta\leqslant 45^\circ$ 的情形，对 $\beta>45^\circ$ 的几种情形，可类似证明.

7. 如图，设 AF 与 BC 交于点 J，K 是 I 在 AF 上的投影.

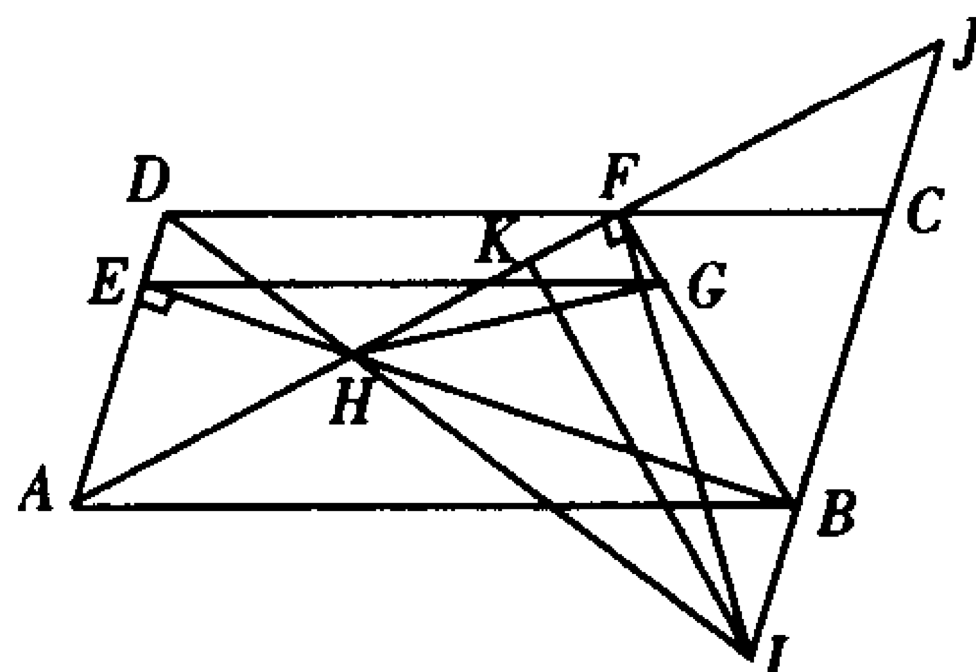
则 $\frac{KF}{JF}=\frac{IB}{JB}=\frac{DE}{AE}=\frac{FG}{BG}$，$\frac{KF}{KJ}=\frac{FG}{FB}$.

又 $\angle JKI=\angle BFH=90^\circ$，

$\angle IJK=90^\circ-\angle FBJ=\angle HBF$，

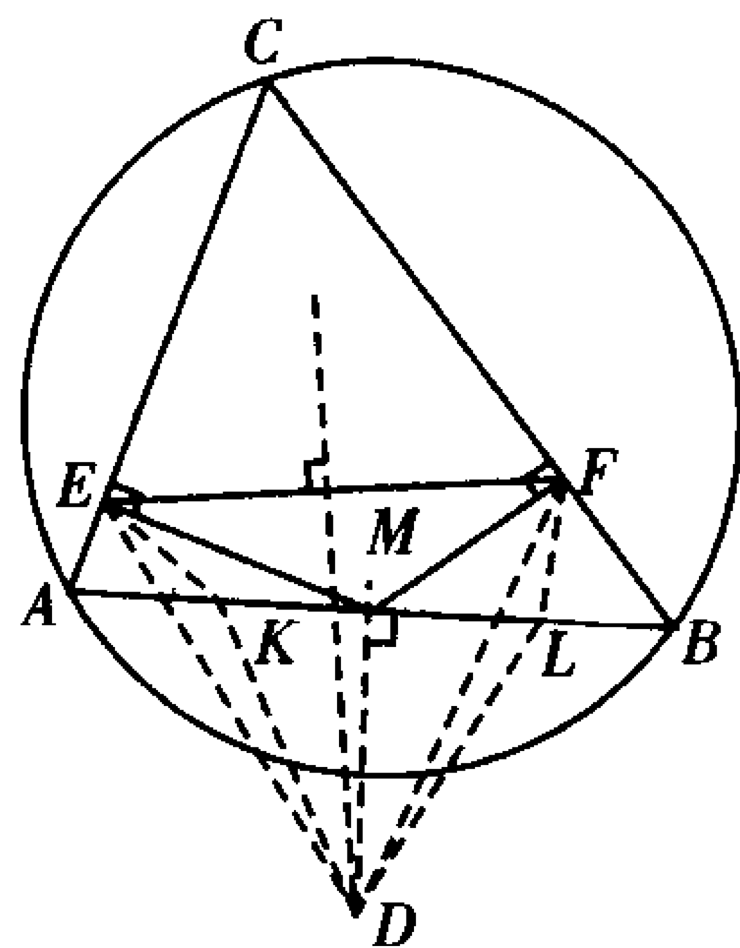
所以，$\triangle IJK\backsim\triangle HBF$，$\frac{KI}{KJ}=\frac{FH}{FB}$.

从而，$\frac{KF}{FG}=\frac{KJ}{FB}=\frac{KI}{FH}$.



又$\angle FKI=\angle GFH=90^\circ$，则$\triangle FKI\backsim\triangle GFH$，$\angle GHF=\angle FIK=90^\circ-\angle KFI$. 故$FI\perp GH$.

8. 如图，设K、L分别是AM、BM的中点，D是AB中垂线上一点，且C、D在直线AB的异侧，$\angle DKL=\angle ACB$. 若$\angle BAC=\angle ABC$，结论显然成立.



不妨假设$\angle BAC>\angle ABC$，于是，

$\angle DLF=\angle DLK+\angle KLF=\angle ACB+2\angle ABC$.

$\angle DKE=360^\circ-\angle DKL-\angle LKE$

$\quad=360^\circ-\angle ACB-2\angle BAC=\angle ACB+2\angle ABC=\angle DLF$.

又$DL=DK$，$LF=KE=\frac{1}{4}AB$，所以，

$\triangle DLF\cong\triangle DKE$.

故$DF=DE$，即点D在EF的中垂线上.

注　利用对称性知所求定点在AB的中垂线上.

9. 由于$\frac{1-\gamma^2}{\beta\gamma}\geqslant 0\Leftrightarrow\beta\gamma(1-\gamma^2)\geqslant 0$，所以，

$10(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma)\geqslant 10(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma)$. 因此，只须证明

$10(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma)\geqslant 2\alpha\beta+5\alpha\gamma$.

上式等价于

$30(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geqslant 3(2\alpha\beta+5\alpha\gamma+10\beta\gamma)$.

由柯西不等式，有

$(1^2+2^2+5^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geqslant(\alpha+2\beta+5\gamma)^2$.

故只须证明$(\alpha+2\beta+5\gamma)^2\geqslant 6\alpha\beta+15\alpha\gamma+30\beta\gamma$，

即　$\alpha^2+(2\beta)^2+(5\gamma)^2-2\alpha\beta-5\alpha\gamma-10\beta\gamma\geqslant 0$.

上式等价于

$\frac{1}{2}[(\alpha-2\beta)^2+(2\beta-5\gamma)^2+(5\gamma-\alpha)^2]\geqslant 0$.

故原式成立.

10. 若$x=-y$，则$a=0$.

设x、y是二次方程$z^2-az+p=0$的两个根，则

$x+y=a$,

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2p$,

$x^3+y^3=a^3-3ap$,

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=a^4-4a^2p+2p^2$,

$x^5+y^5=a^5-5a^3p+5ap^2$.

当$a\neq 0$时，由$x^3+y^3=a$，得

$a^3-3ap=a$，$p=\frac{a^2-1}{3}$.

由$x^5+y^5=a$，得$a^5-5a^3p+5ap^2=a$. 从而，

$a^4-5a^2\cdot\frac{a^2-1}{3}+5\left(\frac{a^2-1}{3}\right)^2=1$,

即 $a^4-5a^2+4=0$.

所以,$a=\pm1,a=\pm2$.

综上所述,a 所有可能的值为 $-2,-1,0,1,2$

11. 设 $\vec{u}=(a,b).\vec{v}=(c,d)$,则不等式

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\leqslant\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \quad ①$$

是一个由向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 构造的三角形不等式.

由①,要证明不等式

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\leqslant\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}+\frac{2|ad-bc|}{\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}} \quad ②$$

只须证明

$$(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2})^2\leqslant(a+c)^2+(b+d)^2+2|ad-bc|. \quad ③$$

式③等价于

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$
$$\leqslant a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2+2|ad-bc|$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\leqslant ac+bd+|ad-bc|$$
$$\Leftrightarrow(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$
$$\leqslant a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2+2(ac+bd)|ad-bc|$$
$$\Leftrightarrow 0\leqslant 2(ac+bd)|ad-bc|.$$

故原不等式成立.

12. 令 $x=y=0$,得 $f(0)=f(0)^2$. 所以,$f(0)=0$ 或 $f(0)=1$.

若 $f(0)=0$,对于 $x=0$ 或 $y=0$,可得 $f(2y)=f(3x)=0$ 对所有 $x、y\in\mathbf{N}$ 成立. 设 $f(1)=a$,则

$f(5)=f(3\times1+2\times1)=f(1)f(1)=a^2$,

$f(25)=f(3\times5+2\times5)=f(5)f(5)=a^4$.

又因为 $f(25)=f(2\times2+3\times7)=f(2)f(7)=0$,所以,$a=0$.

当奇数 $k>4$ 时,存在 $y\in\mathbf{N}$,使得 $k=3+2y$. 则 $f(k)=0$,故对于所有 $x\in\mathbf{N}$,$f(x)=0$ 满足条件.

若 $f(0)=1$,令 $x=0$ 或 $y=0$ 得

$f(2y)=f(y)$ 或 $f(3x)=f(x)$.

设 $f(1)=a$,则

$f(2)=a$,

$f(5)=f(3\times1+2\times1)=f(1)f(1)=a^2$,

$f(25)=f(3\times5+2\times5)=f(5)f(5)=a^4$.

又因为 $f(25)=f(3\times3+2\times8)=f(3)f(8)=f(1)f(4)=f(1)f(2)=a^2$,所以,$a=0$ 或 $a=1$.

同理有

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x>0\end{cases}\text{或 } f(x)=1,x\in\mathbf{N}.$$

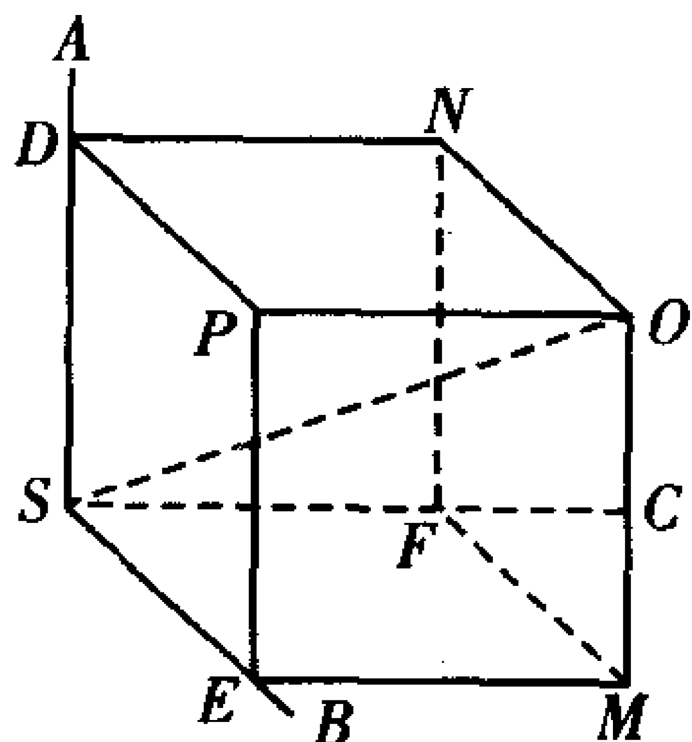
综上所述,共有 3 个函数满足条件.

第2章 化归法

A组

1. 选C.理由:原式$=\frac{\sqrt{\cos^2 20^\circ+\sin^2 20^\circ-2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}}{\cos 20^\circ-\sqrt{1-\cos^2 20^\circ}}=\frac{\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}=1$.

2. 选A.理由:如图所示,过O分别作与SA、SB、SC平行的平面交SA、SB、SC于D、E、F,从而构成以SO为对角线的长方体$MFSE-ONDP$.由题意知



$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

再由 $\sin^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta\geqslant 2\cos\alpha\cdot\cos\beta$,

$\sin^2\alpha=\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geqslant 2\cos\beta\cdot\cos\gamma$,

$\sin^2\beta=\cos^2\alpha+\cos^2\gamma\geqslant 2\cos\alpha\cdot\cos\gamma$,

得 $\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma\geqslant 2\sqrt{2}$.

3. 因为$a^2+ab+b^2\geqslant 3ab$,所以,

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{a^3+a^2b+ab^2-(a^2b+ab^2)}{a^2+ab+b^2}=a-\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}\geqslant a-\frac{a+b}{3}. \quad ①$$

同理,$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}\geqslant b-\frac{b+c}{3}$, ②

$$\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant c-\frac{c+a}{3}. \quad ③$$

①+②+③,得

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant(a+b+c)-\frac{2(a+b+c)}{3}=\frac{a+b+c}{3}.$$

4. 由$a+b>2$,有$(a+b)^2>4$,即$a^2+b^2+2ab>4$,又由$(a-b)^2\geqslant 0$,有$a^2+b^2-2ab\geqslant 0$,与上式相加,有 $2(a^2+b^2)>4$,即$a^2+b^2>2$,于是$(a^2)^2+(b^2)^2>2$,即 $a^4+b^4>2$.

5. 原问题可化归为:在数$1,1,2,2,\cdots,n,n$中,问怎样加上$n-1$个"+"号和几个"-"号,使所得到的代数和最大?最大值是多少?

当$n=2k$时,最大值为$n+n+\cdots+(k+1)+(k+1)-k-k-\cdots-1-1=2[n+(n-1)+\cdots+2+1]-4(k+\cdots+2+1)=n(n+1)-2k(k+1)=\frac{1}{2}n^2$.

当$n=2k+1$时,最大值为$n+n+\cdots+(k+1)-(k+1)-k-k-\cdots-1-1=2(n+\cdots+2+1)-4(k+\cdots+2+1)-2(k+1)=(2k+2)\cdot k=\frac{1}{2}(n^2-1)$.

6. 把这三个圆看作放在平面α上的三个球的正射影.每两个球可确定一个圆锥面,两圆的两条外公切线成了圆锥面的正射影.外公切线的交点就是圆锥面的顶点,由于三个圆锥面平躺在水平面α上,故三个顶点必在平面α内.

另取平面β,将它搁在这三个球上,平面β与三球面必相切(平面的基本性质),从而必与三圆锥面相切,故三个圆锥的顶点也在平面β内.

显然 α 与 β 相交于过三个顶点的直线，即证得原结论成立.

7. 原不等式可化为

$$\left(\cos x-\frac{a-1}{2}\right)^2\leqslant a^2+\frac{(a-1)^2}{4}.$$

因 $-1\leqslant\cos x\leqslant1, a<0, \frac{a-1}{2}<0$,

则当 $\cos x=1$ 时，函数 $y=\left(\cos x-\frac{a-1}{2}\right)^2$ 有最大值 $\left(1-\frac{a-1}{2}\right)^2$.

从而，有 $\left(1-\frac{a-1}{2}\right)^2\leqslant a^2+\frac{(a-1)^2}{4}$.

解得 $a\geqslant1$ 或 $a\leqslant-2$，又 $a<0$，故 $a\leqslant-2$.

8. 由 $a_{n+2}-a_{n+1}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n-a_{n+1}=(n+2)(a_{n+1}-a_n)=(n+2)(n+1)(a_n-a_{n-1})=\cdots=(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdots4\cdot3\cdot(a_2-a_1)=(n+2)!$,

故 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+2!+3!+\cdots+n!\ (n\geqslant1)$.

由于 $a_1=1, a_2=3, a_3=9, a_4=33, a_5=153$，此时 153 能被 9 整除.

当 $m\geqslant5$ 时，$a_n=a_5+\sum\limits_{k=6}^{m}k!$，而 $k\geqslant6$ 时，$k!$ 能被 9 整除.

于是，当 $m\geqslant5$ 时，a_n 能被 9 整除，故所求的 n 的最小值为 5.

9. 令 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$，则

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1})-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$$
$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}[1+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(2n-1)}]<\frac{1}{2}[1+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}]$$
$$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.$$

而 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{n+n}\geqslant\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$.

10. (1) 由 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+y^2=1,\\ y^2=2(x+m)\end{cases}$ 消去 y，得

$$x^2+2a^2x+2a^2m-a^2=0. \quad ①$$

设 $f(x)=x^2+2a^2x+2a^2m-a^2$，问题(1)化归为方程①在 $x\in(-a,a)$ 上有惟一解或等根.

只须讨论以下三种情况：

(1°) $\Delta=0$ 得 $m=\frac{a^2+1}{2}$. 此时 $x_p=-a^2$，当且仅当 $-a<-a^2<a$，即 $0<a<1$ 时适合；

(2°) $f(a)f(-a)<0$ 当且仅当 $-a<m<a$；

(3°) $f(-a)=0$ 得 $m=a$. 此时 $x_p=a-2a^2$, 当且仅当 $-a<a-2a^2<a$, 即 $0<a<1$ 时适合.

$f(a)=0$ 得 $m=-a$. 此时 $x_p=-a-2a^2$. 由于 $-a-2a^2<-a$, 从而 $m\neq -a$.

综上可知,

当 $0<a<1$ 时, $m=\frac{a^2+1}{2}$ 或 $-a<m\leqslant a$;

当 $a\geqslant 1$ 时, $-a<m<a$.

(2) $\triangle OAP$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ay_p$.

因 $0<a<\frac{1}{2}$, 故当 $-a<m\leqslant a$ 时, $0<-a^2+a\sqrt{a^2+1-2m}<a$.

由惟一性得

$x_p=-a^2+a\sqrt{a^2+1-2m}$.

显然, 当 $m=a$ 时, x_p 取值最小.

由于 $x_p>0$, 从而 $y_p=\sqrt{1-\frac{x_p^2}{a^2}}$ 取值最大, 此时 $y_p=2\sqrt{a-a^2}$. 故 $S=a\sqrt{a-a^2}$.

当 $m=\frac{a^2+1}{2}$ 时, $x_p=-a^2$, $y_p=\sqrt{1-a^2}$, 此时 $S=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$.

下面比较 $a\sqrt{a-a^2}$ 与 $\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$ 的大小.

令 $a\sqrt{a-a^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$, 得 $a=\frac{1}{3}$.

故当 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$ 时, 有 $a\sqrt{a(1-a)}\leqslant\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$.

此时, $S_{\max}=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$.

当 $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ 时, 有 $a\sqrt{a(1-a)}>\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$.

此时, $S_{\max}=a\sqrt{a-a^2}$.

B 组

1. 从数集 M 中取出 4 个不同的数 a、b、c、d. 由于 $d^2+ab\in Q$, $d^2+bc\in Q$, 所以 $bc-ab\in Q$. 故 $a^2+ab=a^2+bc+(ab-bc)\in Q$.

同理可知 $b^2+ab\in Q$. 从而, 对于 M 中任何两个不同的数 a 和 b, 都有 $q=\frac{a}{b}=\frac{a^2+ab}{b^2+ab}\in Q$. 于是,

$a=qb\Rightarrow a^2+ab=b^2(q^2+q)=l\in Q$,

$b=\sqrt{\frac{l}{q^2+q}}=\sqrt{\frac{m}{k}}$, m、$k\in\mathbf{N}$.

令 $n=mk$, 得 $b\sqrt{n}=m\in Q$. 故对任何 $c\in M$, 有 $c\sqrt{n}=\frac{c}{b}\cdot b\sqrt{n}\in Q$.

2. 设 $t=\cos x$, 则原不等式化为

$t^2-2at+a^2+2a-3>0, t\in[-1,1]$.

于是，所求问题转化为函数 $f(t)=t^2-2at+a^2+2a-3$ 在 $t\in[-1,1]$上的最小值是正数.

因为函数 $f(t)=(t-a)^2+2a-3$，所以，只须对该函数的图象（抛物线）的对称轴 $t=a$ 相对于区间$[-1,1]$的 3 种位置分别讨论.

(1)当 $a\leqslant -1$ 时，函数 $f(t)$在 $t\in[-1,1]$上是增函数，此时最小值为 $f(-1)$. 所以，

$\begin{cases} a\leqslant -1, \\ f(-1)=a^2+4a-2>0. \end{cases}$ 解得 $a<-2-\sqrt{6}$.

(2)当$-1<a<1$ 时，函数 $f(t)$在 $t\in[-1,1]$上的最小值为 $f(a)$. 所以，

$\begin{cases} -1<a<1, \\ f(a)=2a-3>0. \end{cases}$

此时，a 的值不存在.

(3)当 $a\geqslant 1$ 时，函数 $f(t)$在 $t\in[-1,1]$上是减函数，此时最小值为 $f(1)$. 所以，

$\begin{cases} a\geqslant 1, \\ f(1)=a^2-2>0. \end{cases}$ 解得 $a>\sqrt{2}$.

因此，满足条件的 a 的取值范围为 $a<-2-\sqrt{6}$ 或 $a>\sqrt{2}$.

3. 根据题意不妨设 $A(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta)$，$B\left(r_2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), r_2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$，则

$B(-r_2\sin\theta, r_2\cos\theta)$，$AB^2=r_1^2+r_2^2$，

$\frac{r_1^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r_1^2\cos^2\theta}{b^2}=1$，$r_1^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$，

$\frac{r_2^2\sin^2\theta}{a^2}+\frac{r_2^2\cos^2\theta}{b^2}=1$，$r_2^2=\frac{a^2b^2}{b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}$.

$$\text{故 } r_1^2+r_2^2=\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)}=\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^4+b^4)\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta+a^2b^2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)}$$

$$=\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^4+b^4)\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta+a^2b^2(1-2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta)}$$

$$=\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta+a^2b^2}$$

$$=\frac{4a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2\sin 2\theta+4a^2b^2}\geqslant\frac{4a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)}.$$

当且仅当 $\theta=k\pi\pm\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$时等号成立.

因此，线段 AB 长的最小值为$\frac{2ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$.

4. 对于 $k=1,2,\cdots,2000$，有

$$|y_k-y_{k+1}|=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}}{k+1}\right|=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k-kx_{k+1}}{k(k+1)}\right|$$

$$=\frac{|(x_1-x_2)+2(x_2-x_3)+\cdots+k(x_k-x_{k+1})|}{k(k+1)}$$

$$\leqslant\frac{|x_1-x_2|+2|x_2-x_3|+\cdots+k|x_k-x_{k+1}|}{k(k+1)}.$$

按恒等式

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$=1-\frac{1}{n}$和它的一个结果

$$\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$可得

$$\sum_{k=1}^{2000}|y_k-y_{k+1}|$$

$$\leqslant|x_1-x_2|\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{2000\cdot 2001}\right)+2|x_2-x_3|\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2000\cdot 2001}\right)+\cdots+$$

$$2000\cdot|x_{2000}-x_{2001}|\cdot\frac{1}{2000\cdot 2001}$$

$$=|x_1-x_2|\left(1-\frac{1}{2001}\right)+|x_2-x_3|\left(1-\frac{2}{2001}\right)+\cdots+|x_{2000}-x_{2001}|\left(1-\frac{2000}{2001}\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{2000}|x_k-x_{k+1}|\left(1-\frac{1}{2001}\right)=2000.$$

等号当且仅当$|x_1-x_2|=2001, x_2=x_3=\cdots=x_{2001}$时成立，特别取$x_1=2001, x_2=x_3=\cdots=x_{2001}=0$就能使等号成立.

故$\sum_{k=1}^{2000}|y_k-y_{k+1}|$的最大值为 2000.

5.(1)令 $x=-1, y=0$ 得

$f(-1)=f(-1)f(0), f(0)=1$. 故 $a_1=f(0)=1$.

当 $x>0$ 时，$-x<0, f(0)=f(x)f(-x)=1$，进而得 $0<f(x)<1$.

设 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则

$x_2-x_1>0, f(x_2-x_1)<1$,

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=f(x_1)-f(x_1+x_2-x_1)\\&=f(x_1)[1-f(x_2-x_1)]>0.\end{aligned}$$

故 $f(x_1)>f(x_2)$，函数 $y=f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是单调递减函数.

由 $f(a_{n+1})=\frac{1}{f(-2-a_n)}$，得

$f(a_{n+1})f(-2-a_n)=1$，故

$f(a_{n+1}-a_n-2)=f(0), a_{n+1}-a_n-2=0$

$a_{n+1}-a_n=2(n\in\mathbf{N})$.

因此，$\{a_n\}$是首项为 1，公差为 2 的等差数列. 由此得 $a_n=2n-1, a_{2003}=4005$.

(2)由$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant k\sqrt{2n+1}$恒成立，知

$$k\leqslant\frac{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)}{\sqrt{2n+1}}$$恒成立.

设 $F(n)=\frac{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)}{\sqrt{2n+1}}$，则 $F(n)>0$，

且 $F(n+1)=\dfrac{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)}{\sqrt{2n+3}}$

又$\dfrac{F(n+1)}{F(n)}=\dfrac{2(n+1)}{\sqrt{4(n+1)^2-1}}>1$，即 $F(n+1)>F(n)$，故 $F(n)$ 为关于 n 的单调增函数，$F(n)\geqslant F(1)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

所以，$k\leqslant\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$，即 k 的最大值为$\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

6. 由题设可知$\dfrac{3^l}{10^4}-\left[\dfrac{3^l}{10^4}\right]=\dfrac{3^m}{10^4}-\left[\dfrac{3^m}{10^4}\right]=\dfrac{3^n}{10^4}-\left[\dfrac{3^n}{10^4}\right]$.

于是，$3^l\equiv3^m\equiv3^n\pmod{10^4}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3^l\equiv3^m\equiv3^n\pmod{2^4}, & ①\\ 3^l\equiv3^m\equiv3^n\pmod{5^4} & ②\end{cases}$$

由于$(3,2)=(3,5)=1$，则由①可知

$3^{l-n}\equiv3^{m-n}\equiv1\pmod{2^4}$.

设 u 是满足 $3^u\equiv1\pmod{2^4}$的最小正整数，则对任意满足 $3^v\equiv1\pmod{2^4}$的正整数 v，有 $u|v$，即 u 整除 v. 事实上，若 $u\nmid v$，则由带余除法可知，存在非负整数 a 及 b，使得 $v=au+b$，其中 $0<b\leqslant u-1$. 从而，可推出 $3^b\equiv3^{b+au}\equiv3^v\equiv1\pmod{2^4}$，而这显然与 u 的定义矛盾，所以，$u|v$.

注意到 $3\equiv3\pmod{2^4}$，$3^2\equiv9\pmod{2^4}$，$3^3\equiv27\equiv11\pmod{2^4}$，$3^4\equiv1\pmod{2^4}$，从而，可设 $m-n=4k$，其中 k 为正整数.

同理，可由②推出 $3^{m-n}\equiv1\pmod{5^4}$.

故 $3^{4k}\equiv1\pmod{5^4}$.

下面求满足 $3^{4k}\equiv1\pmod{5^4}$的正整数 k.

因为 $3^{4k}-1=(1+5\times2^4)^k-1\equiv0\pmod{5^4}$，即

$$5k\times2^4+\frac{k(k-1)}{2}\times5^2\times2^8+\frac{k(k-1)(k-2)}{6}\times5^3\times2^{12}$$

$$\equiv5k+5^2k[3+(k-1)\times2^7]+\frac{k(k-1)(k-2)}{3}\times5^3\times2^{11}\equiv0\pmod{5^4},$$

则有 $k=5t$，并代入上式得

$t+5t[3+(5t-1)\times2^7]\equiv0\pmod{5^2}$.

所以，$t\equiv0\pmod{5^2}$.

从而，$k=5t=5^3s$，其中 s 为正整数，故 $m-n=500s$，s 为正整数.

同理可证 $l-n=500r$，r 为正整数.

由于 $l>m>n$，所以，$r>s$.

于是，三角形三边为 $500r+n$、$500s+n$ 和 n. 故有 $n>500(r-s)$. 因此，当 $s=1$，$r=2$，$n=501$ 时三角形周长最小，其值为

$(1000+501)+(500+501)+501=3003$.

7. 考虑如下三种情况：

(1)n 能被 5 整除，设 $d_1,d_2,\cdots,d_m$ 为 S_n 中所有个位数为 3 的元素，则 S_n 中还包括 $5d_1,5d_2,\cdots,$

$5d_m$ 这 m 个个位数为 5 的元素，所以 S_n 中至多有一半元素的个位数为 3.

(2)n 不能被 5 整除，且 n 质因子的个位数均为 1 或 9，则 S_n 中所有的元素的个位数均为 1 或 9. 结论成立.

(3)n 不能被 5 整除，且 n 有个位数为 3 或 7 的质因子 p，令 $n=p^rq$，其中 q 和 r 都是正整数，p 和 q 互质. 设 $S_q=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 为 q 的所有正约数组成的集合，将 S_n 中的元素写成如下的方阵：

$a_1,a_1p,a_1p^2,\cdots,a_1p^r$,

$a_2,a_2p,a_2p^2,\cdots,a_2p^r$,

……

$a_k,a_kp,a_kp^2,\cdots,a_kp^r$.

对于 $d_i=a_jp^l$，选择 a_jp^{l-1} 或 a_jp^{l+1} 之一与之配对(所选的数必须在 S_n 中). 设 e_i 为所选的数，我们称(d_i,e_i)为一对朋友. 如果 d_i 的个位数都是 3，则由 p 的个位数是 3 或 7 知 e_i 的个位数不是 3.

假设 d_i 和 d_j 的个位数都是 3，且有相同的朋友 $e=a_sp^t$，则$\{d_i,d_j\}=\{a_sp^{t-1},a_sp^{t+1}\}$. 因为 p 的个位数为 3 或 7，从而，p^2 的个位数是 9. 而 n 不能被 5 整除，故 a_s 的个位数不为 0 所以，a_sp^{t-1}，$a_sp^{t-1}\cdot p^2=a_sp^{t+1}$的个位数不同. 这与 d_i 和 d_j 的个位数都是 3 矛盾，因此，每个个位数为 3 的 d_i 均有不同的朋友.

综上所述，S_n 中每个个位数为 3 的元素，均与一个 S_n 中个位数不为 3 的元素为朋友，而且两个个位数为 3 的不同元素的朋友也是不同的. 所以，S_n 中至多有一半元素的个位数为 3.

8. 第一项显然为 0，将它舍去. 对于剩下的 1000 个加项，先考察

$$\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^{1000}}{3}.$$

这是等比数列的和，其值为$\frac{1}{3}(2^{1001}-2)$. 再来考察，它们的整数部分的和. 在上面的和式中，任何一项都不是整数，但任何两个邻项的和都是整数(因为$\frac{2^k}{3}+\frac{2^{k+1}}{3}=\frac{3\cdot 2^k}{3}=2^k$). 易知，如果两个非整数的和为整数，则它们的整数部分的和比它们自身的和小 1$(\alpha+\beta=[\alpha]+\{\alpha\}+[\beta]+\{\beta\}=[\alpha]+[\beta]+\{\alpha\}+\{\beta\}=[\alpha]+[\beta]+1)$.

因此，一旦把等比数列中的每两个相邻之项都换为整数部分，它们的和便减小 1. 由于和式中共有 1000 个加项，因此它们的整数部分的和比原来减小 500. 故所求和为$\frac{1}{3}(2^{1001}-2)-500$.

9. 化归用图论语言，以头作为顶点，颈子作为边，而把对由头 A 所连出的颈子所砍的一剑称为对顶点 A 所作的一次"反转". 易知，如果有某个顶点 X 的度数不大于 10，那么，就只需对 X 的所有相邻顶点都作一次"反转"，即可使得顶点 X"游离". 而如果有某个顶点 X 至多与 $n(n\leqslant 9)$个顶点不相邻，那么，就只需首先对 X 作一次"反转"，再对这 n 个顶点各作一次"反转"，即可使得顶点 X"游离".

如果每个顶点都至少有 11 个相邻顶点，且都至少有 10 个不相邻顶点，则至少一共有 22 个顶点. 于是，边的条数(颈子的数目)不少于 $22\times 11>100$，不在考虑范围之内.

我们举例说明 9 次不一定行.

假设有两组各 10 个头，每个组内的每个头都与另一组内的每个头相连，恰好共有 100 条颈子.

若砍 9 剑，那么，每个组内都有一个头没有受到打击，设为 A,B. 对其余 18 个头，由题设知，其中任一头 C 任何时候(9 剑中)都与且只与 A、B 中一头相连，另一头不相连，又 A 与 B 相连，故"多头

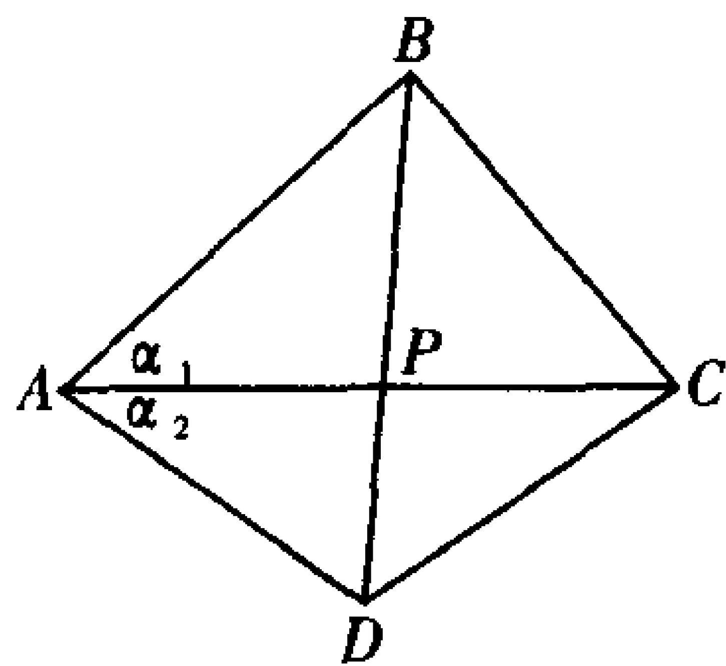
蛇"神仍然是连通的.

故所找最小自然数为 10.

10. 设 $P=A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 3)$. 当 $n=3$ 时,结论显然成立,只须考虑 $n\geqslant 4$ 的情形. 为了证明结论,先证明下面的引理.

引理　设凸四边形 $ABCD$ 的边和对角线的长度都是有理数,对角线 AC 和 BD 交于点 P. 则线段 AP、BP、CP、DP 的长度都是有理数.

事实上,如图,设 $\angle BAP=\alpha_1$, $\angle DAP=\alpha_2$,由余弦定理知 $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos(\alpha_1+\alpha_2)$ 都是有理数. 又



$\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2=\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2-\cos(\alpha_1+\alpha_2)$,

故 $\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2$ 是有理数. 所以,

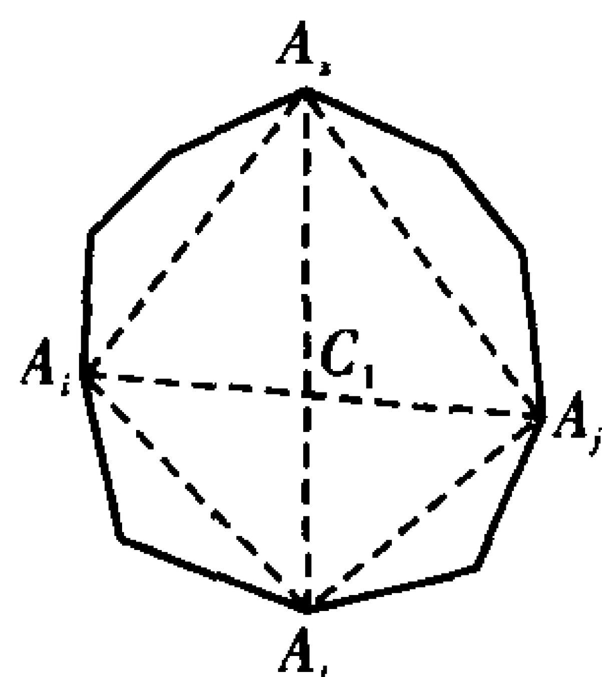
$\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}=\dfrac{\sin\alpha_2\cdot\sin\alpha_1}{\sin^2\alpha_1}=\dfrac{\sin\alpha_2\cdot\sin\alpha_1}{1-\cos^2\alpha_1}$ 是有理数.

易知 $\dfrac{|BP|}{|PD|}=\dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ADP}}=\dfrac{\frac{1}{2}|AB|\cdot|AP|\cdot\sin\alpha_1}{\frac{1}{2}|AD|\cdot|AP|\cdot\sin\alpha_2}=\dfrac{|AB|}{|AD|}\cdot\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$,

即 $\dfrac{|BP|}{|PD|}$ 是有理数.

因为 $|BP|+|PD|=|BD|$ 是有理数,则 $|BP|$、$|PD|$ 都是有理数. 同理, $|AP|$、$|PC|$ 是有理数. 这就证明了引理.

由引理,当 P 是凸四边形的结论显然成立. 如图,设 $A_iA_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 是 P 的一条对角线, $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是对角线 A_iA_j 上连续的分点(C_1 是离点 A_i 最近的分点, C_n 是离点 A_j 最近的分点),线段 $C_lC_{l+1}(1\leqslant l\leqslant m-1)$ 是分割所得多边形的边,又设 C_l 是对角线 A_iA_j、A_sA_t 的交点,则四边形 $A_iA_sA_jA_t$ 满足引理的条件. 所以,线段 A_iC_l 和 C_lA_j 的长度是有理数. 类似地, $A_iC_1,A_iC_2,\cdots,A_iC_n$ 的长度都是有理数. 从而, $C_lC_{l+1}=A_iC_{l+1}-A_iC_l$ 是有理数. 由 i、j、l 的任意性,故分割后所有的小凸多边形的边长都是有理数.



第 3 章　转换法

A 组

1. 选 C. 理由:本题中的函数比较抽象,直接根据已知条件来选正确结论有困难,不妨将满足题设条件的函数具体化.

令　$f(x)=x,g(x)=|x|$.

设 $a=2,b=1,f(a)=g(\pm a)=2$,

$f(b)=g(\pm b)=1$,

$f(-2)=-2,f(-1)=-1$,

代入检验易知(1)、(3)正确,故选 C.

2. 方程左边括号内的两个因式之和恰好等于右边括号内的因式,故可引入两个参数化简.

设 $a=x^2+3x-4, b=2x^2-7x+6$，则 $a+b=3x^2-4x+2$，原方程化为 $a^2+b^2=(a+b)^2$，即 $ab=0$. 当 $a=0$，即 $x^2+3x-4=0$，得 $x_1=1, x_2=-4$；当 $b=0$，即 $2x^2-7x+6=0$，得 $x_3=2, x_4=\frac{3}{2}$.

3. 单独考虑 $|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$，无法判定它们之中至少有1个不小于 $\frac{1}{2}$，现综合考虑它们的代数和.

由于 $f(1)=1+a+b, f(2)=4+2a+b, f(3)=9+3a+b$.

则 $f(1)-2f(2)+f(3)=1+a+b-2(4+2a+b)+9+3a+b=2$.

又因为 $|f(1)-2f(2)+f(3)|\leqslant|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|$，

所以 $|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|\geqslant 2=4\times\frac{1}{2}$，故 $|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$ 中至少有1个不小于 $\frac{1}{2}$.

4. 由于已知为等式，而要证的为不等式，所以可尝试从等式向不等式转换，同时已知为根式，结论为常数5，所以可考虑把根式向整式转换，然后再转换为常数.

因为 $\sqrt{4a+1}=\sqrt{(4a+1)\cdot 1}\leqslant\frac{4a+1+1}{2}=2a+1$.

所以 $\sqrt{4a+1}\leqslant 2a+1$（$a=0$ 时取"="）.

同理：$\sqrt{4b+1}\leqslant 2b+1$（$b=0$ 时取"="），

$\sqrt{4c+1}\leqslant 2c+1$（$c=0$ 时取"="）.

所以 $y\leqslant 2(a+b+c)+3=5$，当 $a+b+c=0$ 时，取"="这与 $a+b+c=1$ 矛盾.

所以 $y>5$.

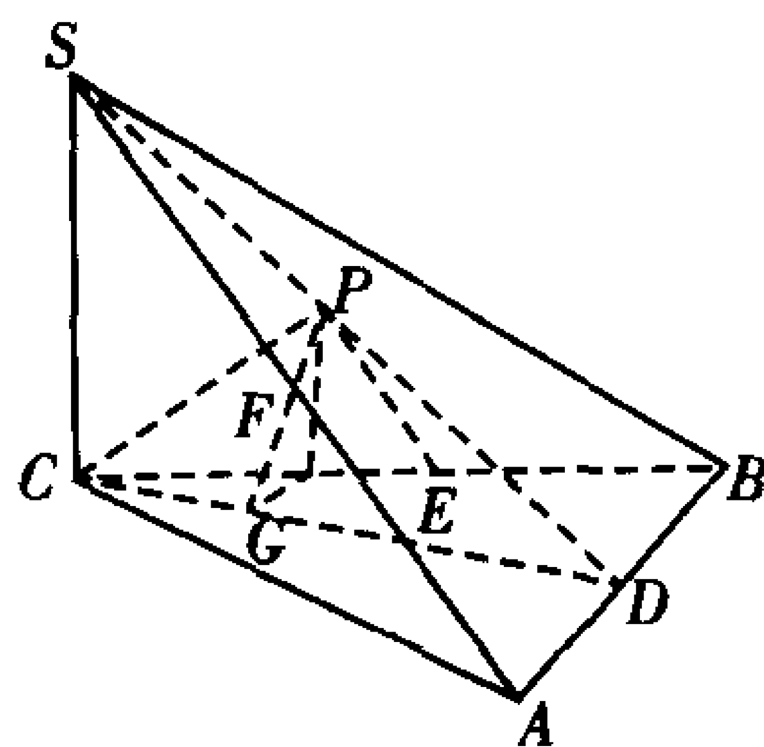
5. 按照常规解法，通过比较圆心到直线 l 的距离与圆半径的大小关系来判定，则十分麻烦，但若挖掘直线 l 中"静"的因素，则可获得简捷解答.

l 的方程用直线系表示为：

$x+3y-17+k(3x-2y+4)=0$.

可知 l 恒过直线 $l_1: x+3y-17=0$ 和 $l_2: 3x-2y+4=0$ 的交点 $P(2,5)$，又点 P 在圆内，故直线 l 与圆 C 总有两个交点.

6. 当 P 在 SE 上移动时，$\triangle PCD$ 的底边 CD 保持不变，因此，$\triangle PCD$ 的面积最小值由 P 到 CD 的最小值确定. 过 P 作 $PF\perp BC$，垂足为 F，由 $SC\perp$ 底面 ABC 知，平面 $SBC\perp$ 底面 ABC，交线是 BC，所以 $PF\perp$ 底面 ABC. 过 F 作 $FG\perp CD$ 于 G，连结 PG，则 $PG\perp CD$，因此 PG 的最小值就使 $\triangle PCD$ 面积最小.



不妨设 $PF=x, x\in(0,2)$，由 $\triangle PEF\backsim\triangle SEC$ 得

$\frac{x}{SC}=\frac{EF}{EC}\Rightarrow EF=\frac{EC}{SC}\cdot x$,

即 $EF=\sqrt{2}x$,

故 $CF=2\sqrt{2}-\sqrt{2}x$,

$GF=CF\sin 30^\circ=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

由此得函数关系式：

$$PG^2=PF^2+GF^2=x^2+(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2=\frac{3}{2}(x-\frac{2}{3})^2+\frac{4}{3},$$

知当 $x=\frac{2}{3}$ 时，$PG_{\min}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以△PCD 面积的最小值 $S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}CD\cdot PG=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{3}=2\sqrt{2}(\text{cm}^2)$.

7. 一般地，依题意列出关于首项 a_1 与公差 d 的二元一次方程组，求出 a_1 及 d，再用求和公式得 S_{p+q}，因为是字母运算，故有较大的运算量，且易出错. 又由于

$$S_{p+q}=(p+q)a_1+\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}d=(p+q)[a_1+\frac{(p+q-1)}{2}d],$$

故若能求出 $a_1+\frac{(p+q-1)}{2}d$ 这个整体，事情就好办多了.

于是，据题意得

$$\begin{cases}S_p=pa_1+\frac{p(p-1)}{2}d=q, & ①\\ S_q=qa_1+\frac{q(q-1)}{2}d=p. & ②\end{cases}$$

①－②得

$$(p-q)a_1+\frac{(p-q)(p+q-1)}{2}d=q-p.$$

因 $p\neq q$,

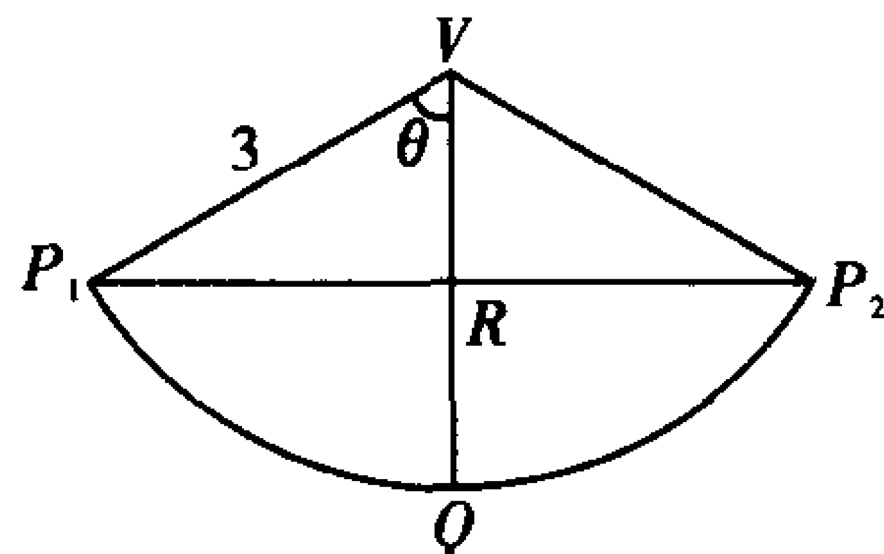
由 $a_1+\frac{(p+q-1)}{2}d=-1$,

故 $S_{p+q}=(p+q)[a_1+\frac{(p+q-1)}{2}d]=-(p+q)$.

8. 凡结论涉及定值、定比、定点的问题，如果我们事先不知道定值、定比、定点是什么，可先从特殊情况入手，把定值、定比、定点先确定下来，使论证有一个明确的方向，且可从特殊情况的论证中借鉴相似之处. 如本题，先将 P 选作特殊点，不妨设 P 为短轴的一个端点，此时点 D 重合于原点，内心 I 在 PO 上，有 $\frac{|PI|}{|ID|}=\frac{|PF_2|}{|DF_2|}=\frac{a}{c}=\frac{1}{e}$ 为定值，目的明确了，简单的证法也有了. 简证如下：

$$\frac{|PI|}{|ID|}=\frac{|PF_2|}{|F_2D|}=\frac{|PF_1|}{|F_1D|}=\frac{|PF_2|+|PF_1|}{|F_2D|+|F_1D|}$$

$$=\frac{2a}{2c}=\frac{a}{c}=\frac{1}{e}\quad \text{为定值.}$$



9. 如右图，沿 VP 将圆锥侧面剪开成一扇形，则绕圆锥的最短路线变为弦 P_1P_2，且 $\overset{\frown}{P_1QP_2}=2\pi$，故 $2\theta\cdot 3=2\pi$，$\theta=\frac{\pi}{3}$，所求最小距离 $VR=3\cdot\cos\theta=3\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}(\text{cm})$.

10. 根据柯西不等式，有

$$\left(\frac{1}{P_1+P_2}+\cdots+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}\right)[(P_1+P_2)+\cdots+(P_{n-1}+P_n)]\geqslant(n-1)^2.$$

则$\frac{1}{P_1+P_2}+\cdots+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}\geqslant\frac{(n-1)^2}{2(P_1+\cdots+P_n)-P_1-P_n}$

$$\geqslant\frac{(n-1)^2}{n(n+1)-3}=\frac{(n-1)^2}{(n-1)(n+2)-1}>\frac{(n-1)^2}{(n-1)(n+2)}=\frac{n-1}{n+2}.$$

11. 令 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=t$，即 $\sin+\cos x=\sqrt{2}t$. 于是，$1+\sin2x=2t^2$，即 $\sin2x=2t^2-1$. 从而有

$t(3-2t^2)=1$，

即　$2t^3-3t+1=0$.　①

注意到 $t=1$ 是上述方程的解，故

$(t-1)(2t^2+2t-1)=0$.

由于 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以，$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant t\leqslant1$.

于是，$2t^2+2t-1\geqslant2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1>1$.

从而，方程①有惟一解 $t=1$.

故原方程有惟一解 $x=\frac{\pi}{4}$.

12. 由题目式子结构特点，令 $x_2+x_3+x_4=b$，$x_2x_3x_4=c$，可将求证式变为一个二次不等式：

$x_1^2+2(b-2c)x_1+b^2\leqslant0$.　①

由$\frac{b}{c}=\frac{1}{x_3x_4}+\frac{1}{x_2x_4}+\frac{1}{x_2x_3}\leqslant\frac{3}{4}$及 $\Delta=16(c^2-bc)$，知 $\Delta>0$，故①式的解为

$\alpha\leqslant x_1\leqslant\beta$，　②

其中 α,β 为①式左边二次三项式的两个根.

又因$\frac{b}{3}\leqslant x_1\leqslant b$，要证②式又只要证 $\alpha\leqslant\frac{b}{3}$，$\beta\geqslant b$，这是不难的. 于是②式成立，从而①式成立，命题得证.

B组

1. 不失一般性，设 $\alpha-\beta\geqslant0$，$\gamma-\tau\geqslant0$，令 $a=\frac{\alpha+\beta}{2}$，$b=\frac{\alpha-\beta}{2}$，$c=\frac{\gamma+\tau}{2}$，$d=\frac{\gamma-\tau}{2}$.

于是，题中的条件转换为

$\sin ax\cdot\cos bx=\sin cx\cdot\cos dx$，　①

其中，$a>b\geqslant0$，$c>d\geqslant0$.

已知 $\sin ax\cdot\cos bx=0$ 的最小正根为$\frac{\pi}{a}$或$\frac{\pi}{2b}$；而 $\sin cx\cdot\cos dx=0$ 的最小正根为$\frac{\pi}{c}$或$\frac{\pi}{2d}$. 如果 $a=c$，则 $\cos bx=\cos dx$，这表明 $b=d$，由此可得所证.

假定式①左端的最小正根为$\frac{\pi}{a}$. 如果$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2d}$，则有 $a=2d$. 于是，$2\sin dx\cdot\cos bx=\sin cx$.

通过比较该式左右两端的最小正根，得到 $c=d$（这是不可能的）或者 $c=2b$. 在后一种情况下，有 $\sin bx=\sin dx$，因而 $b=d$，有 $\sin ax=\sin cx$，故 $a=c$. 所以，当$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2d}$时，有 $a=c$，$b=d$.

同理可证，当$\frac{\pi}{2b}=\frac{\pi}{2d}$时，$a=c$，$b=d$.

2. 如图 1，设四边形 $ABCD$ 即为所求矩形，将其沿 BA 平移至矩形 $A'B'C'D'$，其中 $B'=A$，$C'=D$. 则 A' 在直线 KM 关于点 A 对称的直线 $K'M'$ 上，且 $K'M'$ 与 LK 交于点 K'，与 LM 交于点 M'. 由于 AC 在直线 KL 上，$A'C'/\!/KL$，则以点 M' 为位似中心将 $A'C'$ 变为 $K'L$，将 A 变为 A''，有$\triangle K'A''L\backsim\triangle A'AC'$. 所以，$\angle K'A''L=\angle A'AC'=90°$，$A''$ 在以 $K'L$ 为直径的圆上.

作 K 关于点 A 的对称点 K'，对 K' 作直线 $K'M'/\!/KM$，交 LM 于 M'. 作以 $K'L$ 为直径的圆，连 $M'A$ 与该圆交于 A''，以 M' 为位似中心，将 A'' 变到 A 的同时，将 K' 变为 A'，将 L 变为 C'. 从而作出矩形 $A'B'C'D'(B'=A)$，将矩形 $A'B'C'D'$ 沿 $A'B'$ 平移可得所求矩形 $ABCD$ 满足 B、C、D 分别在边 KM、KL、LM 上.

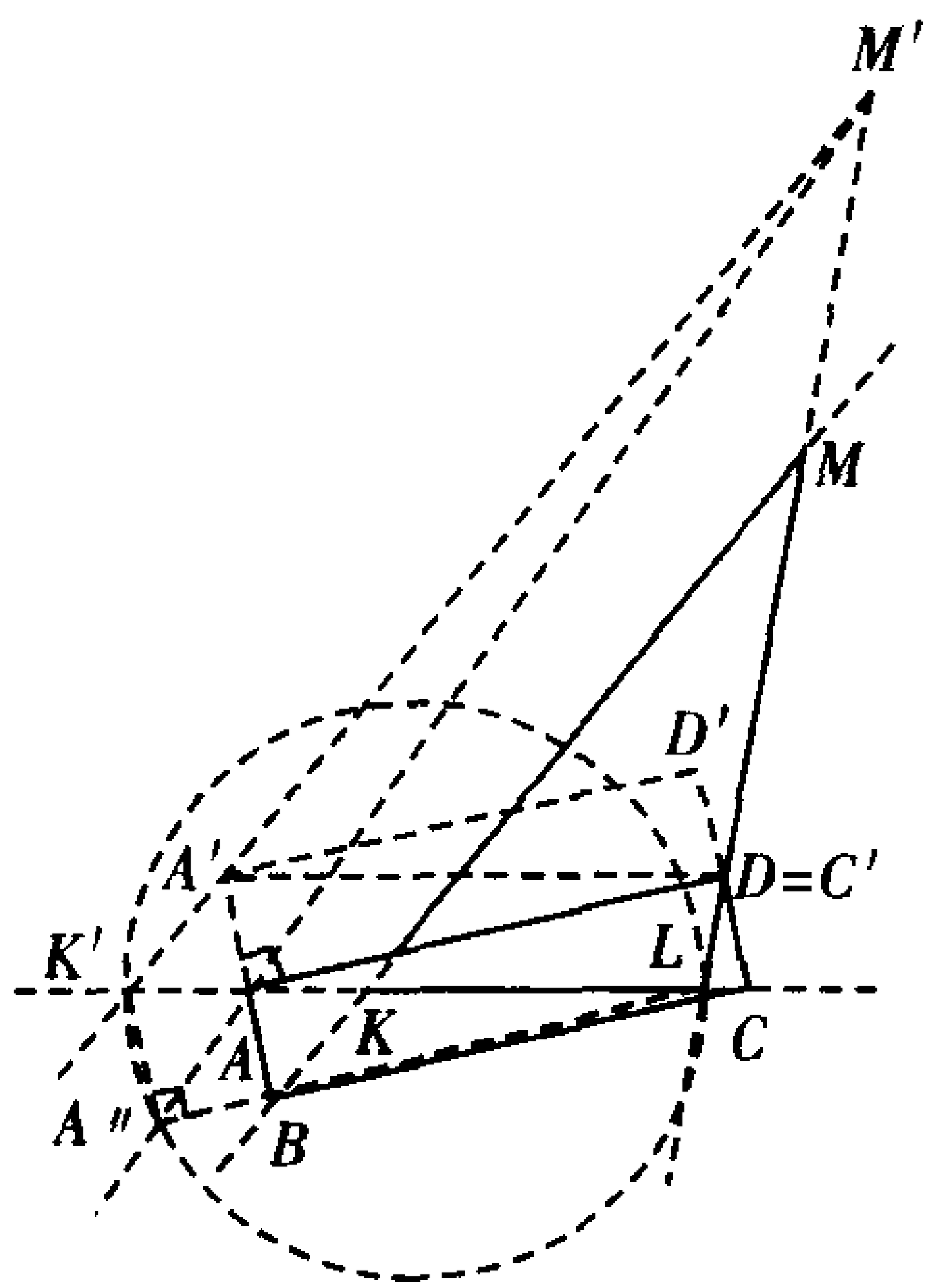


图 1

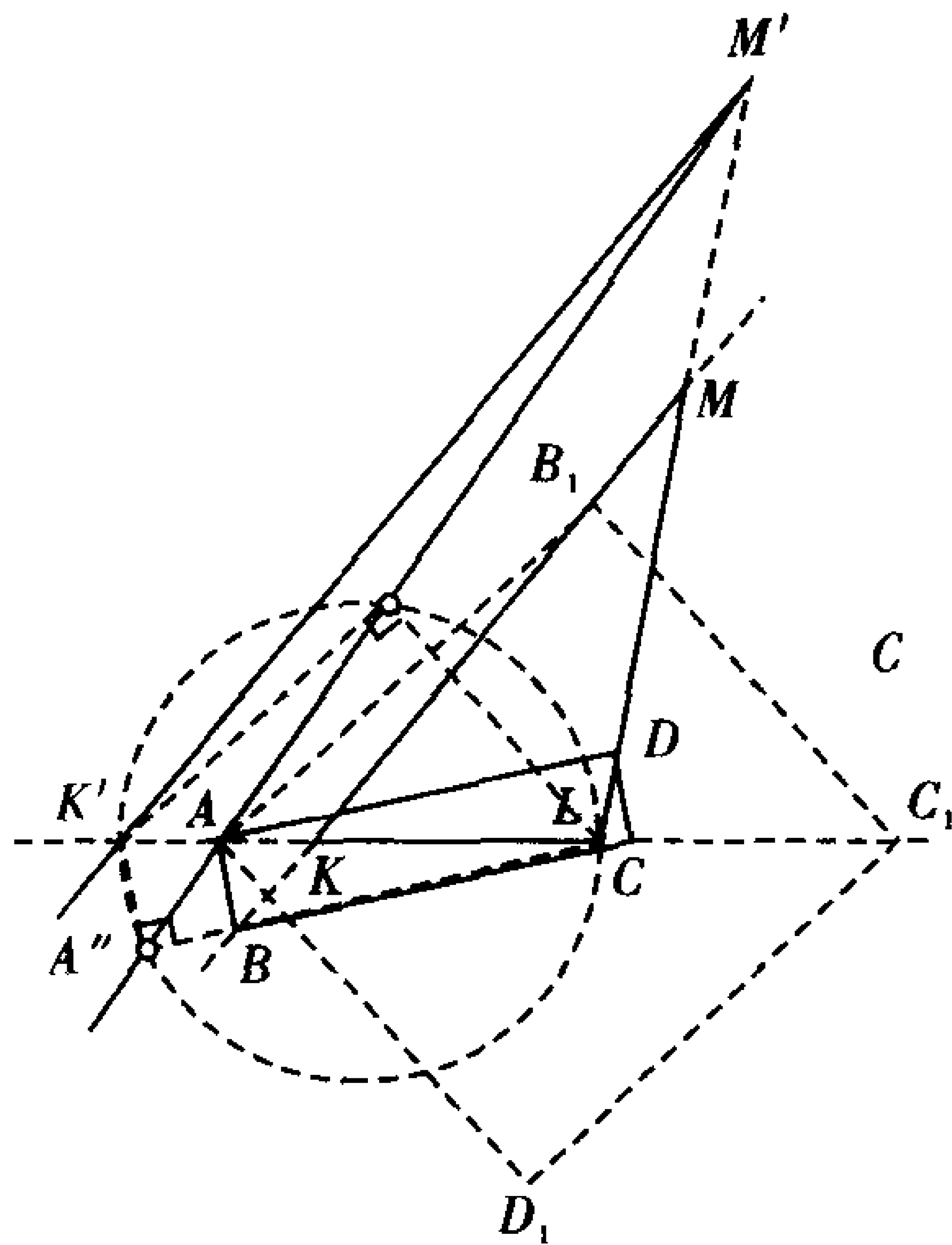


图 2

若 M' 在以 $K'L$ 为直径的圆上，则有惟一的 A''，从而，有惟一的矩形 $ABCD$ 满足条件.

若 M' 不在以 $K'L$ 为直径的圆上，则 $M'A$ 与该圆有两个交点，从而，有两个矩形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 满足条件，如图 2.

3. 解法 1　延长 AB 至 B' 使 $BB'=BP$，在射线 QC 上取 C'，使 $QC'=QB$，如图 3 或图 4.

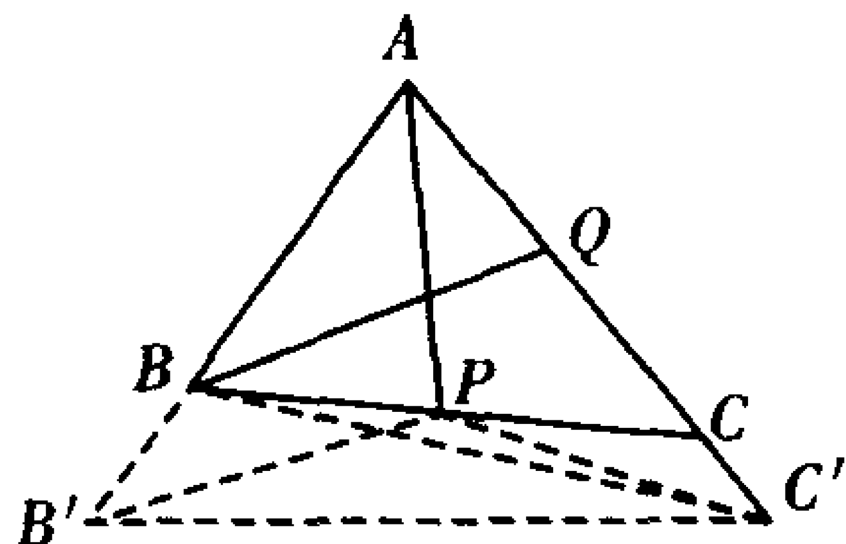


图 3

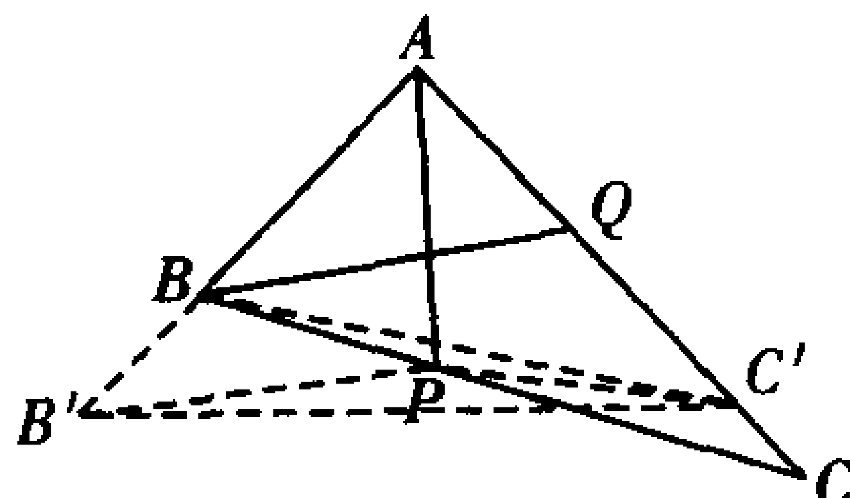


图 4

若 C、C' 不重合，则连 $B'C'$、$B'P$、$C'P$、BC'.

因 $AB+BP=AQ+QB$，

则 $AB+BB'=AQ+QC'$，即 $AB'=AC'$.

又 $\angle B'AC'=60°$，知 $\triangle AB'C'$ 为正三角形.

由 AP 平分 $\angle B'AC'$，则 AP 为 $\triangle AB'C'$ 的对称轴.

从而 $\angle AB'P=\angle AC'P$，$B'P=C'P$.

又 $\angle ABC=\angle ABQ+\angle CBQ=\angle BB'P+\angle BPB'$，$\angle ABQ=\angle CBQ$，$\angle BB'P=\angle BPB'$，

有 $\angle QBC=\angle BB'P=\angle QC'P=\alpha$.

由 $BQ=QC'$，有 $\angle QBC'=\angle QC'B=\beta$. 知 $\angle PBC'=\angle PC'B=\alpha-\beta$ 或 $\beta-\alpha$.

从而 $BP=C'P=B'P=BB'$.

则 $\angle BB'P=60°$，$\angle ABC=120°$.

又 $\angle BAC=60°$，矛盾，则 C、C' 重合.

同理，可得 $B'P=CP$，如图 5.

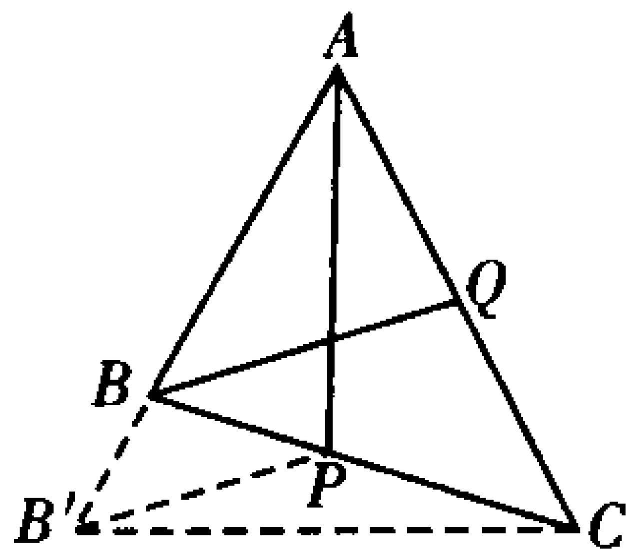


图 5

则 $\angle PB'C=\angle PCB'$.

因 $\angle BPB'=\angle BB'P=\angle PB'C+\angle PCB'=\gamma$，

则 $\angle PB'C=\dfrac{\gamma}{2}$，

$\gamma+\dfrac{\gamma}{2}=60°$，$\gamma=40°$，

$\angle ABC=2\gamma=80°$

解法 2　在 $\triangle ABQ$ 中，由正弦定理知

$$\frac{AQ}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{AB}{\sin\left(\frac{B}{2}+60°\right)}=\frac{BQ}{\sin60°}.$$

故 $AQ=\dfrac{AB\cdot\sin\frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{B}{2}+60°\right)}$，$BQ=\dfrac{AB\cdot\sin60°}{\sin\left(\frac{B}{2}+60°\right)}$.

同理，$BP=\dfrac{AB\cdot\sin30°}{\sin(30°+B)}$.

又由 $AB+BP=AQ+BQ$，$\angle B+\angle C=120°$，且 $0°<\angle B<120°$，

则 $1+\dfrac{\sin30°}{\sin(B+30°)}=\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{B}{2}+60°\right)}+\dfrac{\sin60°}{\sin\left(\frac{B}{2}+60°\right)}$.

于是，$1+\dfrac{\sin30°}{\sin(B+30°)}=\dfrac{\cos\left(\frac{B}{4}-30°\right)}{\cos\left(\frac{B}{4}+30°\right)}$，

则 $\dfrac{\sin30°}{\sin(B+30°)}=\dfrac{\sin\frac{B}{4}}{\cos\left(\frac{B}{4}+30°\right)}$.

从而 $\sin30°\cdot\cos\left(\frac{B}{4}+30°\right)=\sin\frac{B}{4}\cdot\sin(B+30°)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3B}{4}+30°\right)-\cos\left(\frac{5B}{4}+30°\right)\right]$

则 $\cos\left(\frac{B}{4}+30^\circ\right)+\cos\left(\frac{5B}{4}+30^\circ\right)=\cos\left(\frac{3B}{4}+30^\circ\right)$.

故 $\cos\left(\frac{3B}{4}+30^\circ\right)\cos\frac{B}{2}=\cos\left(\frac{3B}{4}+30^\circ\right)$. (1)

当 $\cos\left(\frac{3B}{4}+30^\circ\right)=0$ 时,式(1)成立. 则 $\frac{3\angle B}{4}+30^\circ=90^\circ$.

故 $\angle B=80^\circ$.

当 $\cos\left(\frac{3B}{4}+30^\circ\right)\neq 0$ 时,由式(1)知, $\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$. 则 $\angle B=120^\circ$,与题意不符.

综上所述, $\triangle ABC$ 的内角为

$\angle BAC=60^\circ$, $\angle ABC=80^\circ$, $\angle ACB=40^\circ$.

4. 设 ω 是 1 的非实的立方根,满足 $\omega^2+\omega+1=0$,则 $g(\omega^2+\omega+1)=g(0)=0$.

设 α 是 -1 的非实的立方根,则 $f(\alpha^2-\alpha+1)=f(0)=0$. 故可设 $f(x)=xa(x)$, $g(x)=xb(x)$. 因此,原条件化为

$a(x^2-x+1)=b(x^2+x+1)$.

令 $x=-y$,得 $a(y^2+y+1)=b(y^2-y+1)$,则

$b(x^2+x+1)=b[(x+1)^2-(x+1)+1]=a[(x+1)^2+(x+1)+1]$.

故 $a(x^2-x+1)=a[(x+1)^2+(x+1)+1]$.

下面证明有无穷多个 n 使得

$a(n^2+3n+3)=a(1)$.

由 $x=1$ 可得 $a(1)=a(7)$.

假设 $a[(n-1)^2+3(n-1)+3]=a(1)(n\geq 2)$,则

$a[(n+1)^2+3(n+1)+3]=a[(n+2)^2+(n+2)+1]$

$=a[(n+1)^2-(n+1)+1]=a[(n-1)^2+3(n-1)+3]=a(1)$.

由于多项式 $a(x)-a(1)$ 有无穷多个根,所以, $a(x)-a(1)$ 是零多项式,即 $a(x)$ 是常数. 因此, $f(x)=kx$. 类似地可得 $g(x)=kx$.

5. 注意到格点 (x,y) 从原点可见当且仅当 x、y 互素. 由此,问题转化为求一个正方形 $ABCD$,使得其内部的每一格点 (x,y) 满足 x 与 y 不互素. 设 p_1、p_2…是一列不同的质数,在 $n\times n$ 的矩阵 M 中,第 1 行的元素为前 n 个质数,第 2 行的元素为随后的 n 个质数,依此下去,设 m_i 为 M 中第 i 行元素的乘积, M_j 是 M 中第 j 列元素的乘积,则 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 两两互素, $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 两两互素. 下面,考虑同余式.

$x\equiv -1(\bmod m_1)$,

$x\equiv -2(\bmod m_2)$,

…

$x\equiv -n(\bmod m_n)$.

由孙子定理,在 $\bmod m_1 m_2\cdots m_n$ 下有惟一解 a.

类似地,同余式

$y\equiv -1(\bmod M_1)$,

$y\equiv -2(\bmod M_2)$,

…

$y\equiv -n(\bmod M_n)$.

在 $\bmod M_1M_2\cdots M_n=m_1m_2\cdots m_n$ 下也有惟一解 b.

在以 (a,b) 和 $(a+n,b+n)$ 为相对顶点的正方形中，其内部的格点满足

$(a+r,b+s)$，其中 $0<r<n$，$0<s<n$.

只要证明这样的点从原点不可见，事实上，因为 $a\equiv -r(\bmod m_r)$，$b\equiv -s(\bmod M_s)$，所以，矩阵 M 的第 r 行 s 列的质数可以整除 $a+r$、$b+s$，由于 $a+r$ 和 $b+s$ 不互素，故格点 $(a+r,b+s)$ 从原点不可见.

6. 设 $X=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$Y=\max\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$. 用 $x'_i=\frac{x_i}{X}$ 代替 x_i，$y'_i=\frac{y_i}{Y}$ 代替 y_i、$z'_i=\frac{z_i}{\sqrt{XY}}$ 代替 z_i，则原不等式不变. 不妨假设 $X=Y=1$，下面证明

$$M+z_2+z_3+\cdots+z_{2n}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_n. \quad ①$$

只要证明对于任意 $r\geqslant 0$，式①左边大于 r 的项的数目不少于右边大于 r 的项的数目.

若 $r\geqslant 1$，则右边没有比 r 大的项，故假设 $r<1$.

设 $A=\{i\mid x_i>r,1\leqslant i\leqslant n\}$，$a=|A|$，

$B=\{i\mid y_i>r,1\leqslant i\leqslant n\}$，$b=|B|$.

因为 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\max\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}=1$，于是，$a$、$b$ 至少为 1. 由 $x_i>r$，$y_i>r$，可得 $z_{i+j}\geqslant\sqrt{x_iy_j}>r$，所以，

$C=\{i\mid z_i>r,2\leqslant i\leqslant 2n\}\supset(A+B)=\{\alpha+\beta\mid\alpha\in A,\beta\in B\}$.

设 $A=\{i_1,i_2,\cdots,i_a\}$，$i_1<i_2<\cdots<i_a$，$B=\{j_1,j_2,\cdots,j_b\}$，$j_1<j_2<\cdots<j_b$.

则 $i_1+j_1,i_1+j_2,\cdots,i_1+j_b,i_2+j_b,\cdots,i_a+j_b$ 是 $a+b-1$ 个不同的数，且属于 $A+B$. 所以，

$|A+B|\geqslant|A|+|B|-1=a+b-1$.

故有 $|C|\geqslant|A+B|\geqslant a+b-1$.

特别地，$|C|\geqslant 1$，且对于一些 k，有 $z_k>r$.

因为 $M>r$，所以，式①左边至少有 $a+b$ 项比 r 大. 由于 $a+b$ 是右边比 r 大的项的数目，所以，结论成立. 因此，

$$\left(\frac{M+z_2+z_3+\cdots+z_{2n}}{2n}\right)^2\geqslant\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)\right]^2$$
$$\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right).$$

7. 如图 6，设 AB 与圆 Γ_1 和圆 Γ_3 的内公切线的交点为 Q，则

$\angle APB=\angle APQ+\angle BPQ=\angle PDA+\angle PCB$.

故 $\theta_2+\theta_3+\angle APB=\theta_2+\theta_3+\theta_5+\theta_8=180°$.

同理，由 $\angle BPC=\angle PAB+\angle PDC$，有

$\theta_4+\theta_5+\theta_2+\theta_7=180°$.

将 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$ 分别被大为 $\triangle PB'A'$、$\triangle PC'B'$、$\triangle PD'C'$、$\triangle PA'D'$，相似比分别为 $PC\cdot PD$、$PD\cdot PA$、$PA\cdot PB$、$PB\cdot PC$，于是，得到一个新四边形 $A'B'C'D'$，如图 7.

其中 $A'B'=AB\cdot PC\cdot PD$，$B'C'=BC\cdot PD\cdot PA$，

$C'D'=CD\cdot PA\cdot PB$，$D'A'=DA\cdot PB\cdot PC$.

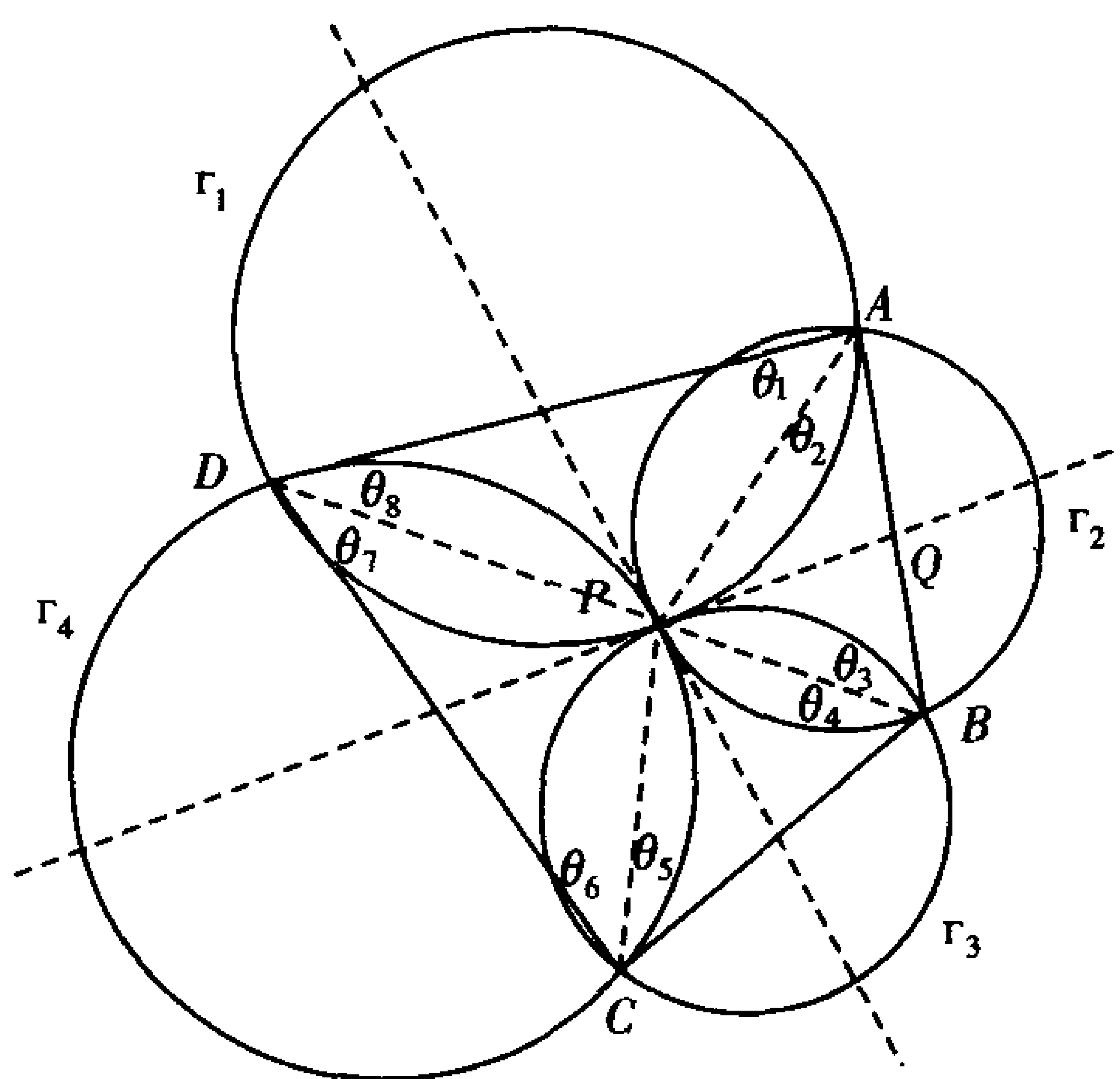


图 6

由于 $\theta_2+\theta_3+\theta_5+\theta_8=180°$，$\theta_4+\theta_5+\theta_2+\theta_7=180°$，所以，$A'D'/\!/B'C'$，$A'B'/\!/C'D'$.

于是，四边形 $A'B'C'D'$ 是平行四边形.

从而，$A'B'=C'D'$，$A'D'=C'B'$，即

$AB\cdot PC\cdot PD=CD\cdot PA\cdot PB$，

$AD\cdot PB\cdot PC=BC\cdot PD\cdot PA$.

故 $\dfrac{AB\cdot BC}{AD\cdot DC}=\dfrac{PB^2}{PD^2}$.

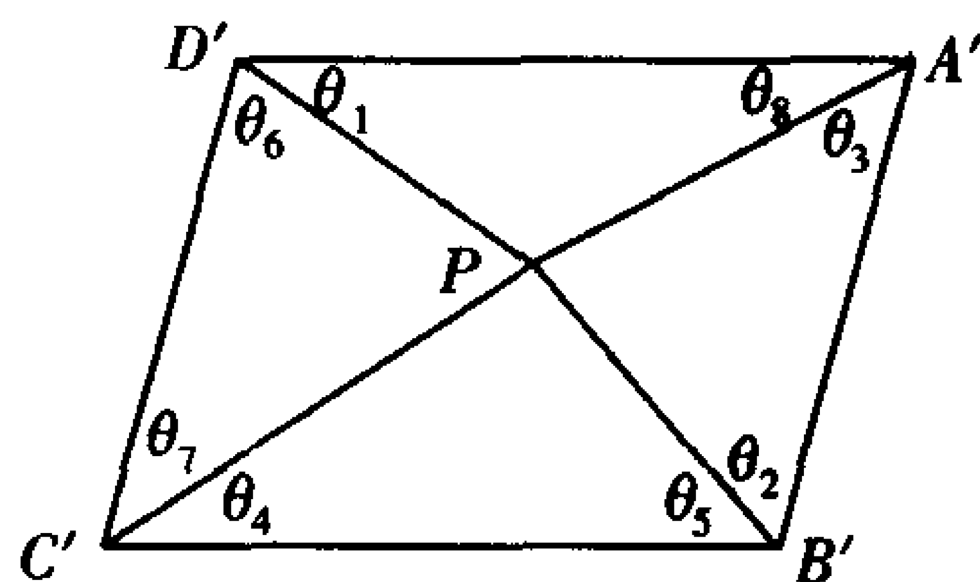


图 7

8. 证法 1　记 $x=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$，$y=\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}$，$z=\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$，则 x、y、$z\in\mathbf{R}^+$，$x^2=\dfrac{a^2}{a^2+8bc}$，即 $\dfrac{1}{x^2}-1=\dfrac{8bc}{a^2}$.

类似地，$\dfrac{1}{y^2}-1=\dfrac{8ac}{b^2}$，$\dfrac{1}{z^2}-1=\dfrac{8ab}{c^2}$.

于是，$\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)\left(\dfrac{1}{y^2}-1\right)\left(\dfrac{1}{z^2}-1\right)=512$.

另一方面，若 $x+y+z<1$，则 $0<x<1$，$0<y<1$，$0<z<1$ 及

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=\frac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}{x^2y^2z^2}$$

$$>\frac{[(x+y+z)^2-x^2][(x+y+z)^2-y^2][(x+y+z)^2-z^2]}{x^2y^2z^2}$$

$$=\frac{(y+z)(2x+y+z)(x+z)(2y+x+z)(x+y)(x+y+2z)}{x^2y^2z^2}$$

$$\geqslant\frac{2\sqrt{yz}\cdot4\sqrt[4]{x^2yz}\cdot2\sqrt{xz}\cdot4\sqrt[4]{y^2xz}\cdot2\sqrt{xy}\cdot4\sqrt[4]{xyz^2}}{x^2y^2z^2}$$

$$=\frac{512x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}=512.$$

矛盾.

故 $x+y+z\geqslant 1$,即

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1.$$

证法 2 将原不等式转换为

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8bc}{a^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ac}{b^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ab}{c^2}}}\geqslant 1.$$

令 $\alpha=\frac{bc}{a^2},\beta=\frac{ac}{b^2},\gamma=\frac{ab}{c^2}$. 显然有 α、β、$\gamma\in\mathbf{R}^+$,且 $\alpha\beta\gamma=1$. 原题转换为证

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{1+8\beta}}+\frac{1}{\sqrt{1+8\gamma}}\geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(1+8\alpha)(1+8\beta))}+\sqrt{(1+8\beta)(1+8\gamma)}+\sqrt{(1+8\alpha)(1+8\gamma)}$$

$$\geqslant\sqrt{(1+8\alpha)(1+8\beta)(1+8\gamma)}.$$

令右式为 x,两边平方有

$$\Leftarrow 1+8(\alpha+\beta)+64\alpha\beta+1+8(\beta+\gamma)+64\beta\gamma+1+8(\alpha+\gamma)+64\alpha\gamma++2(\sqrt{1+8\alpha}+\sqrt{1+8\beta}+\sqrt{1+8\gamma})x$$

$$\geqslant 1+8(\alpha+\beta+\gamma)+8^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+8^3\alpha\beta\gamma$$

$$\Leftarrow 8(\alpha+\beta+\gamma)+2(\sqrt{1+8\alpha}+\sqrt{1+8\beta}+\sqrt{1+8\gamma})x\geqslant 8^3-2. \quad ①$$

注意到

$$x^2=1+8(\alpha+\beta+\gamma)+8^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+8^3\geqslant 1+8\times 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+8^2\times 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}+8^3=729$$

$$\Rightarrow x\geqslant 27.$$

式①左边 $\geqslant 8(\alpha+\beta+\gamma)+2\times 3x\sqrt[3]{\sqrt{1+8\alpha}\sqrt{1+8\beta}\sqrt{1+8\gamma}}$

$$=8(\alpha+\beta+\gamma)+6x^{\frac{4}{3}}\geqslant 8\times 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+6\times 27^{\frac{3}{4}}$$

$$=8\times 3+6\times 81=8^3-2=\text{右边}.$$

证法 3 注意到权方和不等式:设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$;$b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{R}^+$. 当 $\alpha\geqslant 0$ 或 $\alpha\leqslant -1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{\alpha+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{\alpha}}$$

由此,原不等式左边为

$$\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}=\sum\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3+8abc}}=\sum\frac{a^{1+\frac{1}{2}}}{(a^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}\geqslant\frac{(\sum a)^{\frac{3}{2}}}{[(\sum a^3)+24abc]^{\frac{1}{2}}}. \quad ②$$

故原不等式左边 $\geqslant 1$,就只需式②的右边 $\geqslant 1$ 即可.

$$(\sum a)^3\geqslant(\sum a^3)+24abc$$

$$\Leftrightarrow\sum a^3+3\sum(a^2b+ab^2)+6abc$$

$$\geqslant(\sum a^3)+24abc$$

$$\Leftrightarrow\sum(a^2b+ab^2)\geqslant 6abc.$$

由 $\sum(a^2b+ab^2)\geqslant 6\sqrt[6]{\prod a^2b\prod ab^2}=6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}=6abc.$

故原不等式成立.

注 这里$\sum$、$\prod$表示循环求和、循环求积.

证法 4 进行互逆转换,用反证法.假设存在某一组正数 a_0、b_0、c_0,使

$$\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2+8b_0c_0}}+\frac{b_0}{\sqrt{b_0^2+8a_0c_0}}+\frac{c_0}{\sqrt{c_0^2+8a_0b_0}}<1.$$

令 $x=\dfrac{a_0}{\sqrt{a_0^2+8b_0c_0}}$, $y=\dfrac{b_0}{\sqrt{b_0^2+8a_0c_0}}$,

$z=\dfrac{c_0}{\sqrt{c_0^2+8a_0b_0}}$,

则$\dfrac{x^2}{1-x^2}=\dfrac{a_0^2}{8b_0c_0}$, $\dfrac{y^2}{1-y^2}\geqslant\dfrac{b_0^2}{8a_0c_0}$,

$\dfrac{z^2}{1-z^2}=\dfrac{c_0^2}{8a_0b_0}$.

故
$$\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{y^2}{1-y^2}\cdot\frac{z^2}{1-z^2}=\frac{1}{8^3}. \qquad ③$$

由 $x+y+z<1$,有

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z}<\frac{x}{y+z}\cdot\frac{y}{x+z}\cdot\frac{z}{x+y}\leqslant\frac{x}{2\sqrt{yz}}\cdot\frac{y}{2\sqrt{xz}}\cdot\frac{z}{2\sqrt{xy}}=\frac{1}{8}. \qquad ④$$

又由 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$在$(0,1)$内图形是双曲线上一段凹弧,$f(x)$在$(0,1)$内是凹函数,由琴生不等式,有

$$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\leqslant3\cdot\frac{\frac{x+y+z}{3}}{1+\frac{x+y+z}{3}}=3\cdot\frac{1}{\frac{3}{x+y+z}+1}<3\times\frac{1}{\frac{3}{1}+1}=\frac{3}{4}\text{(}x+y+z<1\text{ 可得)}.$$

故
$$\frac{x}{1+x}\cdot\frac{y}{1+y}\cdot\frac{z}{1+z}\leqslant\left[\frac{\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}+}{3}\right]^3<\frac{1}{4^3}.$$

由③、④可得

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z}\cdot\frac{x}{1+x}\cdot\frac{y}{1+y}\cdot\frac{z}{1+z}<\frac{1}{8^3},$$

即
$$\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{y^2}{1-y^2}\cdot\frac{z^2}{1-z^2}<\frac{1}{8^3}.$$

与式③矛盾,从而原不等式成立.

9.(a)由于将 x_i 作变换(都减去某一定值)不等式两边不变,不失一般性,设$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$,则

$$\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)=2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i.$$

由 Cauchy 不等式有

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2\leqslant4\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2=4\,\frac{n(n+1)(n-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

另一方面,

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}x_j+n\sum_{j=1}^{n}x_j^2=2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

所以，$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2\leqslant\frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2$.

(b)若等号成立，则存在某个 k，$x_i=k(2i-n-1)$，$i=1,2,\cdots,n$. 从而，$\{x_i\}$为等差数列.

反之，设$\{x_i\}$的公差为 d，则

$$x_i=\frac{d}{2}(2i-n-1)+\frac{x_1+x_n}{2}.$$

将 $x_i-\frac{x_1+x_n}{2}$ 变换成 x'_i，则

$$x'_i=\frac{d}{2}(2i-n-1),\sum_{i=1}^{n}x'_i=0,\text{且等号成立}.$$

10. 显然，当 $n\geqslant2$ 时，$x_n=x_{n-1}+\left[\frac{2(x_{n-1}-1)}{n}\right]$.

令 $a_n=x_n-1$，则

$a_1=c-1$，

$$a_n=a_{n-1}+\left[\frac{2a_{n-1}}{n}\right]=\left[\frac{n+2}{n}\cdot a_{n-1}\right],n=2,3,\cdots. \qquad ①$$

设 $u_n=A\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}$，$n=1,2,\cdots$，$A$ 为非负整数. 由于当 $n\geqslant2$ 时，

$$\left[\frac{n+2}{n}\cdot u_{n-1}\right]=\left[A\cdot\frac{(n+2)}{2n}\cdot n(n+1)\right]=A\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}=u_n,$$

所以，数列$\{u_n\}$满足式①.

设 $y_n=n$，$n=1,2,\cdots$. 由于当 $n\geqslant2$ 时，

$$\left[\frac{n+2}{n}\cdot y_{n-1}\right]=\left[\frac{(n+2)(n-1)}{2}\right]=\left[n^2+1-\frac{2}{n}\right]=n^2=y_n,$$

所以，$\{y_n\}$也满足式①.

设 $z_n=\left[\frac{(n+2)^2}{4}\right]$，$n=1,2,\cdots$.

当 $n=2m$ 且 $m\geqslant1$ 时，

$$\left[\frac{n+2}{n}\cdot z_{n-1}\right]=\left[\frac{m+1}{m}\cdot\left[\frac{(2m+1)^2}{4}\right]\right]=\left[\frac{m+1}{m}\cdot m(m+1)\right]=(m+1)^2=z_n.$$

当 $n=2m+1$ 且 $m\geqslant1$ 时，

$$\left[\frac{n+2}{n}\cdot z_{n-1}\right]=\left[\frac{2m+3}{2m+1}\cdot\left[\frac{(2m+2)^2}{4}\right]\right]=\left[\frac{2m+3}{2m+1}(m+1)^2\right]$$

$$=\left[(m+1)(m+2)+\frac{m+1}{2m+1}\right]=(m+1)(m+2)=\left[\frac{(2m+3)^2}{4}\right]=z_n.$$

从而，$\{z_n\}$也满足式①.

对任意非负整数 A，令

$$v_n=u_n+y_n=A\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}+n,$$

$$w_n=u_n+z_n=A\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\left[\frac{(n+2)^2}{4}\right],$$

$n=1,2,\cdots$，显然$\{v_n\}$和$\{w_n\}$都满足式①.

由于 $u_1=3A, y_1=1, z_1=\left[\frac{9}{4}\right]=2$，所以，

当 $3|a_1$ 时，

$a_n=\frac{a_1}{6}(n+1)(n+2)$；

当 $a_1\equiv 1(\bmod 3)$时，

$a_n=\frac{a_1-1}{6}(n+1)(n+2)+n$；

当 $a_1\equiv 2(\bmod 3)$时，

$a_n=\frac{a_1-2}{6}(n+1)(n+2)+\left[\frac{(n+2)^2}{4}\right]$.

综上可得

当 $c\equiv 1(\bmod 3)$时，$x_n=\frac{c-1}{6}(n+1)(n+2)+1$；

当 $c\equiv 2(\bmod 3)$时，$x_n=\frac{c-2}{6}(n+1)(n+2)+n+1$；

当 $c\equiv 0(\bmod 3)$时，$x_n=\frac{c-3}{6}(n+1)(n+2)+\left[\frac{(n+2)^2}{4}\right]+1$.

第 4 章　构造法

A 组

1. 由要证明的不等式的特点知，不等式中三项分别为函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 在 a,b,c 三点处的函数值，故可构造函数

$$f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x},$$

易证 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是单调递增函数.

因　$c<a+b$,

则　$f(c)<f(a+b)$,

从而　$\frac{c}{1+c}<\frac{a+b}{1+(a+b)}=\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$,

故　$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>\frac{c}{1+c}$.

2. 设 $f(t)=(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i)t^2-2(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)t+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}(\sqrt{y_i}t-\frac{x_i}{\sqrt{y_i}})^2(t\in\mathbf{R})$.

因　$\sum\limits_{i=1}^{n}y_i>0$, $f(t)\geqslant 0$ 恒成立.

则　$\Delta=4(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2-4(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i)\cdot(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i})\leqslant 0$.

整理即得原不等式：

类似地可证 1984 年全国高中联赛题,设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$,

则有 $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$.

3. 设 $f(t)=[\sum\limits_{i=1}^{n}(S-a_i)]t^2-2(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)t+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{S-a_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}(\sqrt{S-a_i}t-\frac{a_i}{\sqrt{S-a_i}})^2(t\in\mathbf{R})$

因 $\sum\limits_{i=1}^{n}(S-a_i)=(n-1)S>0,f(t)\geqslant0$ 恒成立.

则 $\Delta=4(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2-4[\sum\limits_{i=1}^{n}(S-a_i)]\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{S-a_i}\right)\leqslant0$.

即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{S-a_i}\geqslant\frac{S}{n-1}$.

注 同理可证:设 $x_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant2)$,$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{1-x_i}\geqslant\frac{1}{n-1}$.(《数学通报》问题 845 题)

4. 设 $f(t)=2(ab+bc+ca)t^2-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)t+A=[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]t^2-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)t+A=(\sqrt{a(b+c)}t-\sqrt{\frac{1}{a^3(b+c)}})^2+\sqrt{b(c+a)}t-\sqrt{\frac{1}{b^3(c+a)}}^2+(\sqrt{c(a+b)}t-\sqrt{\frac{1}{c^3(a+b)}})^2(t\in\mathbf{R})$.

因 $2(ab+bc+ca)>0,f(t)\geqslant0$ 恒成立,

则 $\Delta=4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-8A(ab+bc+ca)\leqslant0$.

故 $A\geqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ac)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{(abc)^2}=\frac{3}{2}$.

5. 设$(t)=(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2})t^2-2(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k})t+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{a_k}}{k}t-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2(t\in\mathbf{R})$.

因 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}>0,f(t)\geqslant0$ 恒成立,

则 $\Delta=4\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2-4\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\leqslant0$.

又因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$,故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

6. 设 $f(t)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\right)t^2-2(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)t+\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{\sqrt{a_i+b_i}}t-\sqrt{a_i+b_i}\right)^2(t\in\mathbf{R})$

因 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}>0,f(t)\geqslant0$ 恒成立.

则 $\Delta=4(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2-4\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\right)[\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)]\leqslant0$.

又因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\geqslant\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

7. 注意到,待证不等式的两边很像某个一元二次方程的两个实根,考虑构造方程. 由条件

$\Rightarrow\quad c>\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\Rightarrow c^2>ab$,

构造以 $c\pm\sqrt{c^2-ab}$ 为两根的一元二次方程 $x^2-2cx+ab=0$.

显然　$f(x)=x^2-2cx+ab<0$ 的解为

$c-\sqrt{c^2-ab}<x<c+\sqrt{c^2-ab}$,

而　$f(a)=a^2-2ac+ab=a(a+b-2c)<0$,

即　$x=a$ 满足不等式　$f(x)<0$,

故　$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$.

8. 通常思路是,先设法化为 x 的有理式,然后再求出最值.很遗憾!这样只能求出 y 的最大值.若从题设所给区间 $x\in[\frac{1}{2},3]$ 入手则可获得巧解:

由　$x\in[\frac{1}{2},3]$ 可构造不等式 $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)\leqslant 0$,

展开此式得　$2x^2-7x+3\leqslant 0\Rightarrow\quad 2x^2\leqslant 7x-3$,

因　$x>0$,则　$\sqrt{2}\leqslant\frac{\sqrt{7x-3}}{x}$,

故得　$y_{\min}=\sqrt{2}$.

9. 不等式的左边是几个分数连乘积,能不能在每两个相邻的分数之间插入另一个分数?因此:

设　$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$,　$B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$,

由于　$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\frac{3}{4}<\frac{4}{5},\cdots$,

$\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$,

因此 $A<B$,从而

$A^2<A\cdot B=\frac{1}{2n+1}\Rightarrow A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

故原不等式成立.

10. 设 $A=\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}$;

$B=\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\gamma}$;$C=\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma}$.

结合已知得　$B+C=3$,

$A+B=\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}\geqslant 3$;

同理　$A+C\geqslant 3$.

那么　$2A+(B+C)\geqslant 6\Rightarrow A\geqslant\frac{3}{2}$.

故原不等式成立.

11. 令 $A=\frac{x_1^2}{1-x_1}+\frac{x_2^2}{1-x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{1-x_n}$,$B=\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\cdots+\frac{1}{1-x_n}$,

则 $B-A=n+1$.

由于 $\frac{1}{1-x_1}+\frac{x_1^2}{1-x_1}=\frac{\frac{n^2-1}{n^2}+\left(\frac{1}{n^2}+x_1^2\right)}{1-x_1}\geqslant\frac{\frac{n^2-1}{n^2}+\frac{2x_1}{n}}{1-x_1}=\frac{n^2+2n-1}{n^2}\cdot\frac{1}{1-x_1}-\frac{2}{n}$,

所以 $B+A\geqslant\frac{n^2+2n-1}{n^2}\cdot B-2$.

因而得 $(n+1+A)+A\geqslant\frac{n^2+2n-1}{n^2}(n+1+A)-2\Rightarrow A\geqslant\frac{1}{n+1}$.

故原不等式成立.

12. 此题我们通常用判别式法去证. 如果设：$-4,\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1},1$ 分别是有向线段上的三点，则可通过定比 λ 的值确定内、外分点来证得.

证明 设 $-4,\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1},1$ 分别对应数轴上的点 P_1、P、P_2，P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比为 λ，则

$$\lambda=\frac{\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}+4}{1-\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}}=\frac{(3x+1)^2}{(x+2)^2},$$

∴ $\lambda\geqslant0$ 或 λ 不存在，故点 P 不是 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的外分点.

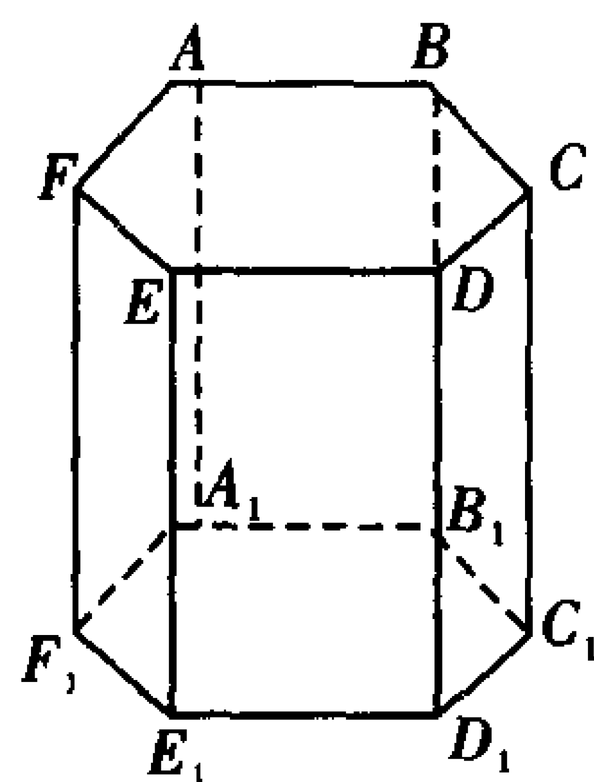
当 $\lambda>0$ 时，$-4<\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}<1$；

当 $\lambda=0$ 时，$\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}=-4$；

当 λ 不存在时，$\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}=1$.

∴ $-4\leqslant\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}\leqslant1$.

13. 构造六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，如图用 6 种不同的颜色给六棱柱的 12 个顶点染色，使得同一侧棱的两端点同色，用来表示一对老搭档运动员. 由题意，只须求出从 12 个着色点中任取 5 个不同色点的不同取法，共有 $C_6^5=6$ 种；第二步，因为图中的 6 个染色点中同色各 2 个，所以第一步中的第一种取法均有 $(C_2^1)^5=32$ 种搭配方式. 由乘法原理，完成这件事共有 $6\times32=192$ 种方法，即选派 5 名运动员共有 192 种方法.



14. 由于 $y=x+1-\sqrt{-x^2+2x}$ 可变为

$y=2-[-(x-1)+\sqrt{1-(x-1)^2}]$,

取 $f(x)=-(x-1)+\sqrt{1-(x-1)^2}$,

且 $(x-1)^2+[\sqrt{1-(x-1)^2}]^2=1$,

构造向量 $\vec{a}=(-1,1)$，$\vec{b}=(x-1,\sqrt{1-(x-1)^2})$,

由向量性质可得

$f(x)=-(x-1)+\sqrt{1-(x-1)^2}\leqslant\sqrt{(-1)^2+1^2}$，即

$\sqrt{(x-1)^2+[\sqrt{(1-(x-1)^2}]^2}=\sqrt{2}$.

从而 $y\geqslant 2-\sqrt{2}$，当且仅当 $-\sqrt{1-(x-1)^2}=x-1$，即

$x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y_{\min}=2-\sqrt{2}$.

15. 构造向量

$\vec{a}=(\sqrt{\lambda x+\mu y+\upsilon z},\sqrt{\lambda y+\mu z+\upsilon x},\sqrt{\lambda z+\mu x+\upsilon y})$，

$\vec{b}=\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda x+\mu y+\upsilon z}},\dfrac{y}{\sqrt{\lambda y+\mu z+\upsilon x}},\dfrac{z}{\sqrt{\lambda z+\mu x+\upsilon y}}\right)$，

则 $(\lambda+\mu+\upsilon)(x+y+z)\cdot\left(\dfrac{x^2}{\lambda x+\mu y+\upsilon z}+\dfrac{y^2}{\lambda y+\mu z+\upsilon x}+\dfrac{z^2}{\lambda z+\mu x+\upsilon y}\right)$

$=[(\lambda x+\mu y+\upsilon z)+(\lambda y+\mu z+\upsilon x)+(\lambda z+\mu x+\upsilon y)]\cdot\left(\dfrac{x^2}{\lambda x+\mu y+\upsilon z}+\dfrac{y^2}{\lambda y+\mu z+\upsilon x}+\dfrac{z^2}{\lambda z+\mu x+\upsilon y}\right)$

$=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\geqslant(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=(x+y+z)^2$.

所以 $\dfrac{x^2}{\lambda x+\mu y+\upsilon z}+\dfrac{y^2}{\lambda y+\mu z+\upsilon x}+\dfrac{z^2}{\lambda z+\mu x+\upsilon y}\geqslant\dfrac{x+y+z}{\lambda+\mu+\upsilon}$.

注 ①在不等式(＊)(即题设不等式)中，若令 $\lambda=\mu=\upsilon=1$，再增设条件 $x+y+z=1$，即得：

$x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.(前苏联奥尔德荣尼基市第三届竞赛试题)

②在不等式(＊)中，若令 $\lambda=\mu=1,\upsilon=0$，即得：

$\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x}\geqslant\dfrac{x+y+z}{2}$.(《数学通报》问题 946 题)

③在不等式(＊)中，若令 $\lambda=0$，即得：

$\dfrac{x^2}{\mu y+\upsilon z}+\dfrac{y^2}{\mu z+\upsilon x}+\dfrac{z^2}{\mu x+\upsilon y}\geqslant\dfrac{x+y+z}{\mu+\upsilon}$.(《数学通报》问题 1197 题)

16. (a)前 17 次猜最多排除 $17\times5=85$ 个数，还剩下 5 个数；第 18 次猜无法从 5 个数中知道甲数.

(c)构造 10×9 表格，其中第 i 列第 j 行的格中放 $(10i+j-1)$，其中 $1\leqslant i\leqslant9,1\leqslant j\leqslant10$.

将此表格按粗线分割，如图.

10		30		50			80	90
	21					71		
			42					92
13					63			
		34					84	
15				55				95
	26					76		
			47					97
18					68			
		39		59			89	

其中形如╬有 11 个，包含 55 个数，故乙先猜 21,26,34,42,47,55,63,68,71,76,84 共 11 次. 若甲说“近”，例如 21 为“近”. 乙只需猜 11,20,31，即可确定甲数；若“远”，则乙猜 11 次排除 55 个数.

形如╦有 7 个，包含 28 个数，故乙再猜 13,18,39,50,89,92,97 共 7 次. 若甲说“近”，例如 13 为“近”，乙只需猜 12,14 即可确定甲数；若“远”，则又猜 7 次排除 28 个数.

至此，还剩 10,30,80,90,15,59,95 共 7 个数.

乙再猜 20,80 共 2 次. 若 20 为“近”，则甲数必在 10,30 之中，再猜 10 即可确定甲数；若 80 为“近”，则甲数必在 80,90 之中，再猜 70 即可确定甲数；若“远”，则又猜 2 次排除 4 个数.

最后，只剩下 15,59,95 共 3 个数，再猜 2 次即可确定甲数.

故仅需猜 11+7+2+2=22 次即可确定甲数.

此时(b)显然也满足.

17. 先证 $f(n)>\frac{2n}{3n+1}$.

设 $A:\sum_{i=1}^{n}(n+i)=n^2+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n(3n+1)$,

由柯西不等式可得:

$$A\cdot f(n)=\left[\sum_{i=1}^{n}(n+i)\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\right]>n^2,$$

所以 $\frac{1}{2}n(3n+1)\cdot f(n)>n^2$,

所以 $f(n)>\frac{2n}{3n+1}$.

下面再证 $f(n)<\frac{25}{36}$.

$$f(n)-f(n+1)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=-\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}<0,$$

所以 $f(n)$ 关于 n 单调递增.

构造函数 $g(n)=f(n)+\frac{1}{4n+1}$,则

$$\begin{aligned}g(n)-g(n+1)&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{4n+5}\\&=\frac{4}{(4n+1)(4n+5)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\\&=\frac{3}{(2n+1)(2n+2)(4n+1)(4n+5)}>0,\end{aligned}$$

所以 $g(n)$ 关于 n 单调递减,

所以 $f(n)<g(n)\leqslant g(2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{25}{36}$.

所以 $\frac{2n}{3n+1}<f(n)<\frac{25}{36}$.

18. 因为 $1-\frac{1+2+\sqrt{2}}{2^3+1}=\frac{6-\sqrt{2}}{9}>\frac{1}{2}$,$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,$n\geqslant3$ 时,

构造 $T_n=1-\frac{1+2+3+\cdots+n+\sqrt{2}}{n^3+1}$,

则有 $T_n=\frac{n^3+1-\left[\frac{n(n+1)}{2}+\sqrt{2}\right]}{n^3+1}>\frac{n^3+1-2\left[\frac{n(n+1)}{2}+\sqrt{2}\right]}{n^3+1-\left[\frac{n(n+1)}{2}+\sqrt{2}\right]}$,

所以 $T_n^2>\frac{n^3+1-2\left[\frac{n(n+1)}{2}+\sqrt{2}\right]}{n^3+1}>\frac{n^3-n^2-n-2}{n^3+1}=\frac{(n-2)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$,

即 $T_n>\sqrt{\frac{n-2}{n+1}}\cdot\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}}$,

所以左边>

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{(n-4)}{n-1}\cdot\frac{(n-3)}{n}\cdot\frac{(n-2)}{(n+1)}}\cdot\sqrt{\frac{13}{7}\cdot\frac{21}{13}\cdots\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}}\cdot\sqrt{\frac{n^2+n+1}{7}}$$

$$=\sqrt{\frac{6}{28n}}\cdot\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2-1}}>\frac{1}{\sqrt{5n}}.$$

所以不等式成立.

19. 构造 50 个数组:

(1,100),(2,99),…,(50,51),每个数组中的两个数之和是 101.

由于 101 是质数,在 S 中不存在元素 c,使得 101 与 c 的最大公约数大于 1. 因此,在 S 中不可能同时含有上述数组中的同一数组中的两个数. 由抽屉原理可知,集合 S 中元素的个数不大于 50.

另一方面,我们构造集合 $A=\{2,1,3,5,7,\cdots,95,97\}$. 此集合含有 2 和小于 98 的 49 个奇数.

下面说明集合 A 满足题设条件.

对于集合 A 中的任意两个元素 a 和 b:

(i)若 $a=2$,则 b 是奇数.

若 $b=1$,易见 A 中存在元素 c 满足题设条件.

若 $3\leqslant b\leqslant 95$,则 A 中元素 1 与 $a+b$ 的最大公约数等于 1,A 中元素 $b+2$ 与 $a+b$ 的最大公约数是 $b+2$ 大于 1.

若 $b=97$,易见 A 中存在元素 c 满足题设条件.

(ii)若 a、b 都不等于 2,则 a、b 都是奇数,$a+b$ 是偶数. 于是,$a+b$ 与 2 的最大公约数是 2 大于 1,且 $a+b$ 与 1、89、91 中的某个数必互质.

所以,集合 A 满足题设条件.

因此,集合 S 的元素个数的最大值是 50.

20. 先考虑 $\{a_n\}$ 的前 100 项.

记 $S_0=0,S_1=a_1,\cdots,$

$S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\quad(1\leqslant k\leqslant 100).$

则 $S_k\in\mathbf{N}_+$,且 $1\leqslant S_1<\cdots<S_{100}$,

故 $S_{100}>100$.

由抽屉原理可知,存在 $S_m,S_n(0\leqslant m<n\leqslant 100)$,使

$S_n-S_m=\sum\limits_{i=m+1}^{n}a_i=100t,$

由题设条件,知 $t\neq 1$,所以 $t\geqslant 2$,

所以 $\sum\limits_{i=m+1}^{n}a_i\geqslant 200.$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{100}a_i\geqslant\sum\limits_{i=m+1}^{n}a_i\geqslant 200,$

同理,$\sum\limits_{i=1}^{100}a_{100k+i}200,k=1,2,\cdots,19.$

$\sum\limits_{i=1}^{3}a_{2000+i}\geqslant 3,$



所以 $S=\sum_{i=1}^{2003}a_i=\sum_{k=0}^{19}\sum_{i=1}^{100}a_{100k+i}+\sum_{i=1}^{3}a_{2000+i}$

$\geqslant 20\times 200+3=4003.$

构造一个数列$\{a_n\}$,其中$a_{100k+50}=50,a_{100k+51}=51,a_{100(k+1)}=2(k=0,1,19)$,其余各项是1.

这个数列的各项都小于100,它们的和为4003,下面再证明此数列满足条件(2).

假设存在若干个连续项之和为100,则这些连续项中不能同时含有项50和51.

若仅含有项50,则其余各项只能是项50后面的项.若这些项中含有项2,则这些连续项之和大于等于50+49+2=101.若不含有2,则这些连续之和不大于50+49=99,因此,这些连续项中不含有50.

同理可以证明,这些连续中不含有51.

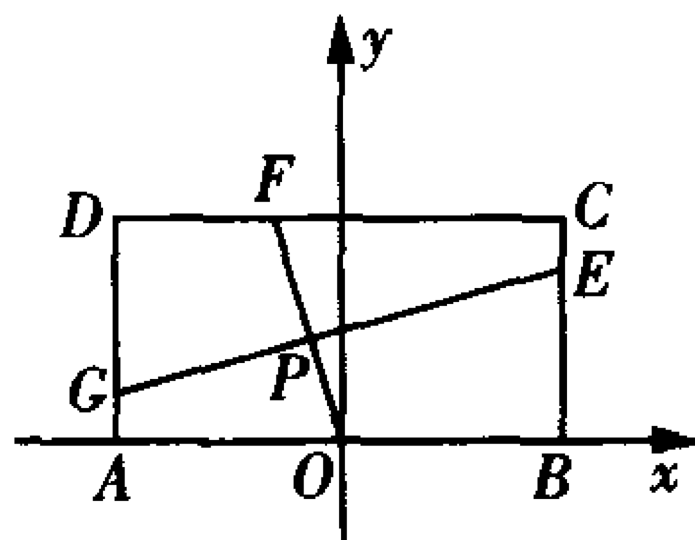
若这些连续项不含有50和51,则它们和不大于48+2+49=99.

所以,假设不成立,即不存在连续项之和为100.

因此,S的最小值是4003.

B组

1. 依据题设条件,先求出点P的坐标满足的方程,据此再判断是否存在两个定点,使得点P到两个定点的距离之和为定值.



从而由题意得$A(-2,0),B(2,0),C(2,4a),D(-2,4a)$.

设$\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{DG}{DA}=k(0\leqslant k\leqslant 1)$,则$E(2,4ak),F(2-4k,4a),G(-2,4a-4ak)$.

又令 $P(x,y)$,则$\overrightarrow{OP}=(x,y),\overrightarrow{OF}=(2-4k,4a)$,

$\overrightarrow{GP}=(x+2,y-4a+4ak),\overrightarrow{GE}=(4,8ak-4a)$.

因 $\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OF}$共线,

则 $4ax-(2-4k)y=0$,

即 $2ax=(1-2k)y$. ①

又 $\overrightarrow{GP}$与$\overrightarrow{GE}$共线,可得

$4(y-4a+4ak)-(x+2)(8ak-4a)=0$,

即 $2a-y=(1-2k)ax$. ②

由①②消去k得 $2a^2x^2+y^2-2ay=0$,

整理 $\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{(y-a)^2}{a^2}=1$.

(Ⅰ)当$a^2=\dfrac{1}{2}$时,点P的轨迹是圆弧,不存在符合题意的两定点.

(Ⅱ)当$a^2<\dfrac{1}{2}$时,点P的轨迹是椭圆弧,其焦点$\left(-\sqrt{\dfrac{1}{2}-a^2},a\right),\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}-a^2},a\right)$为所求的符合题意的两定点,此时点$P$到它们的距离和为定值$\sqrt{2}$.

(Ⅲ)当$a^2>\dfrac{1}{2}$时,点P的轨迹是椭圆弧,其焦点$\left(0,a-\sqrt{a^2-\dfrac{1}{2}}\right)$、$\left(0,a+\sqrt{a^2-\dfrac{1}{2}}\right)$为所求的

符合题意的两定点，此时 P 点到它们的距离和为定值 $2a$.

2. 当 $a_i>0$，从而 $a>0$ 时，待证不等式 $\frac{a_1}{ka-a_1}+\frac{a_2}{ka-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{ka-a_n}\geqslant\frac{n}{kn-1}\Leftrightarrow\ \frac{1}{ka-a_1}+\frac{1}{ka-a_2}+\cdots+\frac{1}{ka-a_n}\geqslant\frac{n^2}{(kn-1)a}$ (*)

成立.

记 $A=(ka)^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{ka-a_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(ka)^2}{ka-a_i}$，$B=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{ka-a_i}$.

则 $A-B=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(ka)^2-a_i^2}{ka-a_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}(ka+a_i)=nka+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=nka+a$，

$$A+B=\sum_{i=1}^{n}\frac{(ka)^2+a_i^2}{ka-a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(ka)^2-(\frac{a}{n})^2+[(\frac{a}{n})^2+a_i^2]}{ka-a_i}$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{(ka)^2-(\frac{a}{n})^2+\frac{2aa_i}{n}}{ka-a_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n^2k^2+2nk-1}{n^2k^2}\cdot\frac{k^2a^2}{ka-a_i}-\frac{2a}{n}\right)$$

$$=\frac{n^2k^2+2nk-1}{n^2k^2}\cdot A-2a,$$

从而 $2A\geqslant\frac{n^2k^2+2nk-1}{n^2k^2}\cdot A+(nk-1)a$，即 $A\geqslant a^2k^2\cdot\frac{n^2}{a(nk-1)}$.

即 (*)式成立，原不等式也成立.

当 $a_i<0$ 时，类似的可予证明.

3. 设 $f(t)=2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\cdot t^2-2(a^2+b^2+c^2+d^2)t+L$

$=[a(b+c+d)+b(c+d+a)+c(a+b+d)+d(a+b+c)]t^2-2(a^2+b^2+c^2+d^2)t+L$

$=\left(\sqrt{a(b+c+d)}t-\sqrt{\frac{a^3}{b+c+d}}\right)^2+\left(\sqrt{b(c+d+a)}\,t-\sqrt{\frac{b^3}{c+d+a}}\right)^2+\left(\sqrt{c(a+b+d)}\,t-\sqrt{\frac{c^3}{a+b+d}}\right)^2+\left(\sqrt{d(a+b+c)}t-\sqrt{\frac{d^3}{a+b+c}}\right)^2(t\in\mathbf{R})$.

因 $2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)>0$，$f(t)\geqslant0$ 恒成立，

则 $\Delta=4(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-8L(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\leqslant0$.

又因为 $2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\leqslant3(a^2+b^2+c^2+d^2)$，

故 $L\geqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant\frac{1}{3}(ab+bc+cd+da)=\frac{1}{3}$.

4. (1)当 $n=3$ 时，存在满足题意的安排.具体安排如下(把 9 位女同学记为 1,2,…,9)：

(1,2,3),(1,4,5),(1,6,7),(1,8,9),(2,4,6),

(2,7,8),(2,5,9),(3,4,8),(3,5,7),(3,6,9),

(4,7,9),(5,6,8).

(2)任意选一位女同学，因为她和其他每一位女同学恰好值勤一次，并且每天有 3 人值勤，所以，其余 $3n-1$ 位女同学两两成对.

故 $2\mid(3n-1)$. 所以，n 是奇数.

(3)因 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant0$，



故 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

5. 设(b,c)是满足条件的数对.

若 $a_k=a_{k+1}$，且 k 是满足这个条件的下标中最小的一个. 若 $k\geqslant4$，因为 $a_{k+1}=|3a_k-2a_{k-1}|$，且 $a_k\neq a_{k-1}$，则 $a_{k+1}=2a_{k-1}-3a_k$，即 $a_{k-1}=2a_k$.

又因为 $a_k=|3a_{k-1}-2a_{k-2}|$，所以，$2a_{k-2}=5a_k$ 或 $2a_{k-2}=7a_k$，即 a_k 可以被 2 整除.

另一方面，易知 $a_n=a_k$，其中 $n\geqslant k$. 设 P 是所有素数和 1 构成的集合，则 $a_k\in P$. 从而，知 $a_k=2$，$a_{k-1}=4$，$a_{k-2}=5$ 或 7，与 $4=a_{k-1}=|3a_{k-2}-2a_{k-3}|$矛盾. 因为右端是奇数，左端是偶数，所以，$k\leqslant3$.

当 $k=3$ 时，$a_3=2$，$a_2=4$，$a_1=5$ 或 7，即$(b,c)=(5,4)$或$(7,4)$.

当 $k=2$ 时，$a_2=p$，$a_1=2p$，其中 $p\in P$，即$(b,c)=(2p,p)$.

当 $k=1$ 时，$a_1=p$，$p\in P$，$a_2=p$，即$(b,c)=(p,p)$.

若对所有的 n，均有 $a_n\neq a_{n+1}$，由于 $a_n\geqslant0$，则一定存在一个正整数 l，使得 $a_{l+1}>a_l$. 由数学归纳法可得，当 $n\geqslant l$ 时，有 $a_{n+1}>a_n$. 再利用 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，由数学归纳法可得

$a_n=a_{l+2}+2(2^{n-l-2}-1)(a_{l+2}-a_{l+1})$.

若 a_{l+2}是偶数，则 $a\geqslant4$ 是偶数，其中 $n\geqslant l+3$，矛盾.

若 a_{l+2}是奇数，则 $a_{l+2}\geqslant3$，且$(a_{l+2},2)=1$.

由欧拉(Euler)定理，a_{l+2}可以整除 $2^{\varphi(a_{l+2})}-1$，其中 φ 是欧拉函数，即 $\varphi(m)$表示小于 m 且与 m 互素的正整数的个数.

令 $n=l+2+i\varphi(a_{l+2})$，$i=1,2,\cdots$，则 a_{l+2}可以整除 $a_n(a_n>a_{l+2})$，矛盾.

综上所述，$(b,c)=(5,4)$或$(7,4)$或$(2p,p)$或(p,p)，其中 $p\in P$.

6. 解法 1　对于 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$，用$[i,j]$表示由 i 到 j 的一段整数，记

$S(i,j)=\dfrac{a_i+a_{i+2}+\cdots+a_j}{j-i+1}$.

易知，可由 $S(i,j)>\alpha$ 和 $S(j+1,l)>\alpha$ 推出 $S(i,j)>\alpha$.

按如下法则将$[1,n]$分为若干段$[p_i,q_i]$：第 i 段整数的左端为不含于在其之前构造出的段中的使得 a_p 大于 α 的最小整数 p(如果没有这样的整数存在，则构造过程告终)；其右端为使得对任何 $j\in[p_i,q]$，都有 $S(p_i,j)>\alpha$ 成立的最大整数 q. 由构造法则知 $p_{i+1}>q_i+1$.

将自然数 k 称为"好数"，如果 $m_k>\alpha$. 现证，所有的"好数"都位于所构造出的诸段中. 用反证法，假设有某些"好数"不在任何一段中，我们来考察它们中的最小一个"好数"k. 由于 $m_k>\alpha$，故存在 $l\leqslant k$，使 $S(l,k)>\alpha$. 由于各段之外的数全都小于 α，所以数段$[l,k]$必与某一所构造出的段$[p_i,q_i]$相交. 假设位于 k 之左的最右边的段是$[p_i,q_i]$. 如果 $k>q_i+1$，则 $S(q_i+2,k)\leqslant\alpha$，因此 $S(l,q_i+1)>\alpha$，此与 k 的选取相矛盾. 从而，$k=q_i+1$. 由"段"的选取原则知 $l\neq p_i$(事实上，如果 $l=p_i$，则 q_i 是这样的数 n 的最大值：它们使 $S(l,n)>\alpha$，但 $S(l,k)=S(l,q_i+1)>\alpha$). 如果 $l>p_i$，则 $S(p_i,l-1)>\alpha$，故而 $S(p_i,q_i+1)>\alpha$，这不可能. 而如果 $l<p_i$，则由 $S(p_i,q_i+1)\leqslant\alpha$ 推知 $S(l,p_i-1)>\alpha$，从而 p_i-1 是不属于任何一个"段"$[p_i,q_i]$的"好数"，且小于 k，于是又与所作的假设相矛盾. 这样一来，所有的"好数"全都位于所构造的各段之中.

由上述结论可知，"好数"的数目不超过$\sum(q_i-p_i+1)$，从而，

$\sum a_k\geqslant\sum\limits_{k\in[p_i,q_i]}a_k>\alpha\sum(q_i-p_i+1)$.

由此得出题中结论.

解法 2　记 $b_i=a_1+\cdots+a_i$，显然 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，且

$\frac{a_{l+1}+a_{k-m+2}+\cdots+a_k}{m}=\frac{b_k-b_l}{k-l}$.

在坐标平面上考察 $B_0(0,0)$，$B_1(1,b_1)$，$B_2(2,b_2)$，…，$B_n(n,b_n)$，易知，比值$\frac{b_k-b_l}{k-l}$恰为直线 B_lB_k 的斜率. 这意味着条件 $m_k>\alpha$ 等价于：经过点 B_k 且倾斜角为 $\arctan\alpha$ 的直线 l_k 至少经过某一个点 B_l $(l<k)$的上方. 我们称这样的点 B_k 为"好点". 表达式$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\alpha}$等于$\frac{b_n}{\alpha}$，亦即等于点$(0,n)$与直线 l_n 同横轴的交点之间的距离.

我们来对点的数目 n 作归纳，证明该距离大于"好点"的个数. 基本情况显然. 如果 B_n 不是"好点"，则将它去掉，这样做未改变"好点"的数目，而线段距离减少(因为 $b_{n-1}\leqslant b_n$). 如果 B_n 是"好点"，则观察位于 l_n 下方的(按横轴看)离 B_n 最近的点 B_k. 此时，我们去掉由 B_{k+1} 到 B_n 的所有点(它们全是"好点")，好点的数目减少了 $n-k$ 个，而线段减少的部分则长于 $n-k$.

7. 构作一个图，其顶点和边分别对应该国最初的各个城市和各条道路. 按照题意对该图作一系列如下形式的改造：每一次改造均是去掉某一个简单圈上的所有边，并将该圈上的顶点都与一个新的顶点相连. 我们来证明，在最后一次改造之后，原来图中的所有顶点全都变为 1 度的. 由于原来图中恰有 2002 个顶点，所以便证得了题中的结论.

观察原来图中的任意一个顶点 v. 由题意知，将该顶点自原来图中分离(去掉原来图中连结该顶点的所有边和该顶点)之后，该图仍然是连通的. 我们来证明，这个性质在改造之后仍然保持.

观察任意一个图 G 和该图中的任意一个分离之后图仍保持连通的顶点 u. 假设经过一次如题意所述的改造之后的图为 G'. 我们考察图 G 中任意一条不经过顶点 u 的路. 在图 G' 中，该路上的一些边可能被去掉了，但是它们的端点则都与某个新的顶点(记为 w)相连. 此时，将该路上被去掉的最小的段换为将其两个端点与 w 相连的两条新的边，在图 G' 中得到一条具有同样的端点的不经过顶点 u 的路. 这就表明，如果我们自图 G' 中分离出顶点 u，则对所得的图中的任何两个顶点，都仍然可以找到连结它们的路. 事实上，对于除了 w 之外的老顶点，这条路如上所述，就是在把顶点 u 从图 G' 中分离之后连结着它们的路. 而顶点 w 则至少有一条边与这样的老顶点相连，这个老顶点有路与所给图的其余顶点相连. 所以，在把顶点 u 从图 G' 中分离之后所得的图仍然是连通的.

由上所证可知，在经过全部改造之后，如果从图中把顶点 v 分离出去，所得的图仍然是连通的. 此时，如果顶点 v 的度数大于 1，则在两个与 v 相连的顶点之间有不经过 v 的路. 这条路，连同顶点 v 以及连接 v 和路的两个端点的边便形成了一个简单圈，这是不可能的，因为此时图中已经没有这样的圈了.

所以，顶点 v 的度数一定是 1.

8. 用 $A{}^{BC}_{FE}D$ 表示操作过程中的某个状态，这里 A、B、C、D、E、F 为 6 个点上所写的数字. 用 $A{}^{BC}_{FE}D\pmod 2$ 表示所写的数字模 2，s 表示某一状态时的所有数字的和，M 表示其中的最大值. 我们将证明，从任何 s 为奇数的状态出发，都可以变到各顶点数字全为零的状态. 构造下面两个步骤，交替操作：

(1)从一个 s 为奇数的状态变到只有一个奇数的状态；

(2)从只有一个奇数的状态变到 s 为奇数，且 M 变小或 6 个数字全为 0 的状态.

注意到任何操作都不会增加 M，而每次操作(2)都使得 M 至少减少 1，所以，上面的步骤一定会

结束，且只能结束在各顶点数字全为零的状态. 下面给出每一步的操作.

首先，对某个 s 为奇数的状态 $A{}_{FE}^{BC}D$，$A+C+E$ 和 $B+D+F$ 有一个是奇数. 不妨设 $A+C+E$ 是奇数. 若 A、C、E 中只有一个是奇数，比如 A，则可按下面的顺序操作：

$$1{}_{F\,0}^{B\,0}D\to 1{}_{\mathbf{1}\,0}^{\mathbf{1}\,0}\mathbf{0}\to \mathbf{0}{}_{1\,0}^{1\,0}0\to 0{}_{\mathbf{0}\,0}^{1\,0}0 \pmod 2.$$

我们已经证明了(1)是可行的. 下面不妨考虑只有 A 是奇数，其他都是偶数的状态 $A{}_{FE}^{BC}D$. 我们希望变到某个使 M 更小的状态. 记 M_0 为该状态的 M，根据 M_0 的奇偶性，分两种情况讨论.

(i)M_0 是偶数，即 B、C、D、E、F 中的某一个是最大值，且 $A<M_0$. 我们断言，按照 B、C、D、E、F 的顺序操作，则 s 是奇数且 $M<M_0$. 下面的顺序

$$1{}_{0\,0}^{0\,0}0\to 1{}_{0\,0}^{\mathbf{1}\,0}0\to 1{}_{0\,0}^{1\,\mathbf{1}}0\to 1{}_{0\,0}^{1\,1}\mathbf{1}\to 1{}_{0\,\mathbf{1}}^{1\,1}1\to 1{}_{\mathbf{0}\,1}^{1\,1}1 \pmod 2$$

表明数字在每次操作后奇偶性的改变. 称这个新的状态为 $A'{}_{F'E'}^{B'C'}D'$，则 s 是奇数，且 A'、B'、C'、D'、E' 都小于 M_0(因为它们是奇数，而 M_0 是偶数)，同时，$F'=|A'-E'|\leqslant\max\{A',E'\}<M_0$，所以，$M$ 变小了.

(ii)M_0 是奇数，即 $M_0=A$，其余的数都不小于 M_0，若 $C>0$，则按照 B、F、A、F 的顺序操作：

$$1{}_{0\,0}^{0\,0}0\to 1{}_{0\,0}^{\mathbf{1}\,0}0\to 1{}_{\mathbf{1}\,0}^{1\,0}0\to \mathbf{0}{}_{1\,0}^{1\,0}0\to 0{}_{\mathbf{0}\,0}^{1\,0}0 \pmod 2.$$

称这一状态为 $A'{}_{F'E'}^{B'C'}D'$，则 s 是奇数. 而 M 只在 $B'=A$ 时才不减少；但这是不可能的，因为 $B'=|A-C|<A$，而 $0<C<M_0=A$，这样又变到了一个 s 为奇数而 M 较小的状态.

若 $E>0$，因为 C 和 E 是对称的，可类似讨论.

若 $C=E=0$，可以按照下面的顺序操作把数字变到全是 0 的状态：

$$A{}_{F\,0}^{B\,0}D\to A{}_{A\,0}^{A\,0}\mathbf{0}\to \mathbf{0}{}_{A\,\mathbf{0}}^{A\,\mathbf{0}}0\to 0{}_{\mathbf{0}\,0}^{\mathbf{0}\,0}0.$$

这里的 0 表示数字 0，而非偶数.

这样，我们展示了怎样操作(2)，证明了所需的结论. 作为一个特例，2003 是奇数，当然满足结论.

9. 将 X 分成以下 5 个子集进行考察：

$2001=1024+977\geqslant x\geqslant 1024-977=47$，

$46=32+14\geqslant x\geqslant 32-14=18$，

$17=16+1\geqslant x\geqslant 16-1=15$，

$14=8+6\geqslant x\geqslant 8-6=2$，

$x=1$.

为了构造一个使题中要求不被满足且又含元素最多的例子，这个子集不能含 2 的任一方幂且每对数 $\{2^r+a,2^r-a\}$ 中只能有 1 个含在集中. 令

$Y=\{2001,2000,\cdots,1025\}\cup\{46,45,\cdots,33\}\cup\{17\}\cup\{14,13,\cdots,9\}\cup\{1\}$，

则有 $\{Y\}=998$ 且对任何 u、$v\in Y$，$u+v$ 都不是 2 的方幂.

事实上，当 u、$v\in Y$ 时，不妨设 $u\geq v$ 且有 $2^r<u\leq 2^r+a<2^{r+1}$，其中当 r 分别取值 10,5,4,3 时，相应的 a 值依次为 977,14,1,6.

(1)若 $2^r<v\leq u$，则

$2^{r+1}<u+v<2^{r+2}$.

$u+v$ 不能是 2 的方幂.

(2)若 $1\leq v<2^r$，则当 $2^r<u\leq 2^r+a,1\leq a<2^r$ 时，$1\leq v<2^r-a$. 于是

$2^r<u+v<2^{r+1}$.

这表明 $u+v$ 也不能是 2 的方幂. 所以，子集 Y 中任何两数之和都不是 2 的方幂.

故知所求的最小正整数 $m\geq 999$.

将 X 划分成下列 999 个互不相交的子集：

$A_i=\{1024-i,1024+i\},i=1,2,\cdots,977$,

$B_j=\{32-j,32+j\},j=1,2,\cdots,14$,

$C=\{15,17\}$,

$D_k=\{8-k,8+k\},k=1,2,\cdots,6$,

$E=\{1,8,16,32,1024\}$.

对于 S 的任何一个 999 元子集 W，若 $W\cap E\neq\varnothing$，则从其中任取一个元素的 2 倍都 2 的方幂；若 $W\cap E=\varnothing$，则 W 中的 999 个元素分属于前面的 998 个 2 元子集. 由抽屉原理知 W 中必有不同的 u 和 v，属于其中同一子集. 显然，$u+v$ 为 2 的方幂.

综上可知，所求的最小正整数 $m=999$.

10. 解法 1　将 24 个分点依次编号 1,2,…,24，并将它们按“坏的关系”排成如下的 3×8 数表：

1,4,7,10,13,16,19,22,

9,12,15,18,21,24,3,6,

17,20,23,2,5,8,11,14.

易见，表中每行中相邻两数所代表的两个分点间所夹的弧长为 3，每列相邻两数所代表的两个分点间所夹的弧长都是 8(首尾两数也算作相邻). 这样一来，题中所对取 8 点的要求化为要求所取 8 点的号码在数表中互不相邻. 所以，每列恰取 1 个数，每行至多取 4 个互不相邻的数. 从而，3 行数中分别取数的个数只有 4 种不同情形：

{4,4,0},{4,3,1},{4,2,2},{3,3,2}.

(1){4,4,0}. 在 3 行中任取一行不取数，有 3 种不同取法. 另两行中第一行取 4 个互不相邻的数，有两种不同取法. 余下 4 列为另一行所取 4 个数所在的列，惟一确定. 由乘法原理知，这种情形共有 6 种不同取法.

(2){4,3,1}. 在 3 行中取数的个数分别为 4,3,1，共有 3！ =6 种不同安排. 在一行中取 4 个互不相邻的数，有两种不同取法. 在另一行和余下 4 列中选 1 个数. 有 4 种不同选法. 最后第 3 行和余下 3 列中各选 1 个数，选法惟一确定. 由乘法原理知，这时共有 $6\times2\times4=48$ 种不同选法.

(3){4,2,2}. 从 3 行中选定一行取 4 个互不相邻的数，选行有 3 种不同、取数有两种不同，共有 6 种不同取法. 余下 4 列互不相邻. 第 2 行从 4 列中任取 2 列，共有 $C_4^2=6$ 种不同取法. 由乘法原理知，这种情形共有 $6\times6=36$ 种不同取法.

(4){3,3,2}. 从 3 行数中选定一行取 2 个不相邻的数，选行有 3 种不同，选数有 $C_7^2-1=20$ 种不同(其中减 1 是去掉两个数分别在第 1 列与第 8 列的 1 种).

选定两数之后，余下 6 列被分成两部分，有 3 种不同分段情形：{1,5}，{2,4}和{3,3}. 3 种分段的种数分别为 8,8,4. 容易看出：

(i)对于{1,5}分段，取 3 列互不相邻，有两种不同取法；

(ii)对于{2,4}分段，取 3 列互不相邻，有 4 种不同取法；

(iii)对于{3,3}分段，取 3 列互不相邻，有两种不同取法.

所以，这种情形的不同取法种数为

$3\times\{8\times2+8\times4+4\times2\}=168.$

综上可知，满足题中要求的不同取法种数为

$6+48+36+168=258.$

解法 2 同在解法 1 中一样，将 24 个数写成 3×8 数表，于是，选取 8 个数时每列恰取 1 个数，这时，从第 1 列取 1 个数，共有 3 种不同取法. 第 1 列取定后，第 2 列所取的数不能与第 1 列所取的数同行，故只有两种不同取法. 以后每列都有两种不同取法，共有 3×2^7 种不同取法. 但其中第 1 列所取的数与第 8 列所取的数同行的所有取法都不满足要求.

若记从 $3\times n$ 数表中每列恰取一个数且任何相邻两列(包括第 n 列与第 1 列)所取的数都不同行的不同取法种数为 x_n，则上述的结论恰为

$x_8+x_7=3\times2^7.$

类似地可以得到

$x_n+x_{n-1}=3\times2^{n-1}.$

由此递推即得

$$\begin{aligned}x_8&=3\times2^7-x_7\\&=3\times2^7-(3\times2^6-x_6)\\&=3\times(2^7-2^6)+x_6\\&=\cdots\cdots\\&=3\times(2^7-2^6+2^5-2^4+2^3-2^2+2)\\&=3\times86=258.\end{aligned}$$

即满足题中要求的不同取法种数为 258.

11. 将不超过 100 的每个正整数 n 表示成

$n=2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}\cdot7^{\alpha_4}\cdot11^{\alpha_5}\cdot q.$

其中 q 是不能被 2、3、5、7、11 整除的正整数，α_1、α_2、α_3、α_4、α_5 为非负整数.

我们选取满足条件 α_1、α_2、α_3、α_4、α_5 中恰有 1 个或 2 个非零的那些正整数组成集合 S，即 S 中包括 50 个偶数 $2,4,\cdots,98,100$，但除去 $2\times3\times5$，$2^2\times3\times5$，$2\times3^2\times5$，$2\times3\times7$，$2^2\times3\times7$，$2\times5\times7$，$2\times3\times11$ 这 7 个数；3 的奇数倍 $3\times1,3\times3,\cdots,3\times33$ 共 17 个数；最小素因子为 5 的数 $5\times1,5\times5,5\times7,5\times11,5\times13,5\times17,5\times19$ 共 7 个数；最小素因子为 7 的数 $7\times1,7\times7,7\times11,7\times13$ 共 4 个数；以及素数 11. 从而，S 中总共有 $(50-7)+17+7+4+1=72$ 个数.

下面证明如此构造的 S 满足题述条件.

条件(1)显然满足.

对于条件(2)，注意在 $[a,b]$ 的素因子中至多出现 2,3,5,7,11 中的 4 个数，记某个未出现的系数为 p，显然 $p\in S$，并且

$(p,a)\leqslant(p,[a,b])=1,$

$(p,b)\leqslant(p,[a,b])=1$.

于是,取 $c=p$ 即可.

对于条件(3),当 $(a,b)=1$ 时,取 a 的最小素因子 p 和 b 的最小素因子 q,易见 $p\neq q$,并且 p、$q\in\{2,3,5,7,11\}$. 于是,$pq\in S$,并且

$(pq,a)\geqslant p>1,(pq,b)\geqslant q>1$.

a、b 互质保证了 pq 异于 a、b,从而,取 $c=pq$ 即可.

当 $(a,b)=e>1$ 时,取 p 为 e 的最小素因子,q 为满足 $q\nmid[a,b]$ 的最小素数,易见 $p\neq q$,并且 p、$q\in\{,3,5,7,11\}$. 于是,$pq\in S$,并且 $(pq,a)\geqslant(p,a)=p>1,(pq,b)\geqslant(p,b)=p>1$. $q\nmid[ab]$ 保证了 pq 异于 a,b,从而,取 $d=pq$ 即可.

下面证明任意满足题述条件的集合 S 的元素数目不会超过 72.

显然,$1\notin S$. 对于任意两个大于 10 的质数 p、q,因为与 p、q 均不互质的数最小是 pq,已大于 100,故据条件(3)知,10 与 100 之间的 21 个质数 11,13,…,89,97 中最多有一个出现在 S 中,记除 1 和这 21 个质数外的其余 78 个不超过 100 的自然数构成集合 T,我们断言 T 中至少有 7 个数不在 S 中,从而 S 中最多有 $78-7+1=72$ 个元素.

(i)当有某个大于 10 的质数 p 属于 S 时,S 中所有各数最小素因子只可能是 2,3,5,7 和 p. 运用条件(2)可得出以下结论:

①若 $7p\in S$,因 $2\times3\times5,2^2\times3\times5,2\times3^2\times5$ 与 $7p$ 包括了所有的最小素因子,故由条件(2)知,$2\times3\times5,2^2\times3\times5,2\times3^2\times5\notin S$;若 $7p\notin S$,注意 $2\times7p>100$,而 $p\in S$,故由条件(3)知 $7\times1,7\times7,7\times11,7\times13\notin S$.

②若 $5p\in S$,则 $2\times3\times7,2^2\times3\times7\notin S$;若 $5p\notin S$,则 $5\times1,5\times5\notin S$.

③$2\times5\times7$ 与 $3p$ 不同属于 S.

④$2\times3p$ 与 5×7 不同属于 S.

⑤若 $5p,7p\notin S$,则 $5\times7\notin S$.

当 $p=11$ 或 13 时,由①,②,③,④可分别得出至少有 3,2,1,1 个 T 中的数不属于 S,合计 7 个;当 $p=17$ 或 19 时,由①,②,③可分别得出至少有 4,2,1 个 T 中的数不属于 S,合计 7 个;当 $p>20$ 时,由①,②,③分别有至少 4,2,1 个 T 中的数不属于 S,合计也是 7 个.

(ii)如果没有大于 10 的质数属于 S,则 S 中的最小素因子只可能是 2,3,5,7. 于是,下面 7 对数中的每对都不能同时在 S 中出现:

$(3,2\times5\times7),(5,2\times3\times7),(7,2\times3\times5),(2\times3,5\times7),(2\times5,3\times7),(2\times7,3\times5),(2^2\times7,3^2\times5)$.

从而,T 中至少有 7 个数不在 S 中.

综上所述,本题的答案为 72.

12. 有 $n!$ 个"满的"数列.

为证明此结论,我们构造一个与集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列之间满足双射的"满的"数列.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一个"满的"数列,$r=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 于是,从 1 至 r 的整数都出现在这个数列中,设 $S_i=\{k|a_k=i\}$,$1\leqslant i\leqslant r$,则所有的 S_i 非空,且它是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个分割. 对于 $2\leqslant k\leqslant r$,"满的"数列还满足 $\min S_{k-1}<\max S_k$. 于是,先将 S_1 中的元素按照递减的次序写下来,再将 S_2 中的元素按照递减的次序写下来……最后将 S_r 中的元素按照递减的次序写下来,从而,得到集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$. 所以,我们得到了从"满的"数列到集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列之间

的一个映射.

这个映射也是可逆的. 实际上，设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列. 设

$S_1=\{b_1,b_2,\cdots,b_{k_1}\}$，

其中 $b_1>b_2>\cdots>b_{k_1}$，且 $b_{k_1}<b_{k_1+1}$，

$S_2=\{b_{k_1+1},b_{k_1+2},\cdots,b_{k_2}\}$，

其中 $b_{k_1+1}>b_{k_1+2}>\cdots>b_{k_2}$，且 $b_{k_2}<b_{k_2+1}$，

……

$S_t=\{b_{k_{t-1}+1},b_{k_{t-1}+2},\cdots,b_n\}$，

其中 $b_{k_{t-1}+1}>b_{k_{t-1}+2}>\cdots>b_n$.

当 $j\in S_i$，$1\leqslant i\leqslant t$ 时，令 $a_j=i$，则数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一个"满的"数列.

综上所述，"满的"数列同集合$\{1,2,\cdots,n\}$的排列所构成的集合是双射.

13. 设 $n\geqslant14$，将每道题表示为一个矩形，其 4 个顶点分别表示 4 名解出此题的参赛者. 设 P 为任一问题.

每个不同于 P 的题目和 P 有一个公共顶点，因为 $n\geqslant14$，由抽屉原则知，有 P 的一个顶点记作 S 至少是 4 个(不同于 P)矩形的顶点.

假设存在矩形 P' 与 P 不在 S 共点，则至少有 5 个矩形以点 S 为顶点，且均和 P' 只有一个公共顶点. 由抽屉原则，P'的一个顶点 S' 至少是 2 个以 S 为顶点的矩形的顶点.

若 $S\neq S'$，则有不少于 2 个矩形共点于 P 的 S 点和 P' 的 S' 点，与条件(iii)矛盾.

故 $S=S'$，即所有矩形共点于 S.

下表是 $n=13$ 时，无人解出所有题目的一个例子. 将竞赛题编号为 1，2，…，13，将参赛者编号为 1，2，…. 在附表中，除 1 号至 13 号参赛者外的所有参赛者均没解出题目，第 1 行表示竞赛题的编号，第 i 列($1\leqslant i\leqslant13$)表示解出第 i 道题的 4 名参赛者的编号.

附表：

竞赛题编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
解出竞赛题的参赛学生号码	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
	2	5	8	11	5	6	7	5	6	7	5	6	7
	3	6	9	12	8	9	10	9	10	8	10	8	9
	4	7	10	13	11	12	13	13	11	12	12	13	11

对于 $4\leqslant n\leqslant12$，则可以通过去掉若干列(问题)得到类似的例子. 故所求最小值为 14.

注 题中条件 $n\geqslant4$ 可替换为 $n\geqslant3$. 但若 $n=2$，则最小值为 2.

14. (1) 首先，构造抽屉：每个抽屉里有三个相异点，共有 C_n^3 个抽屉. 由于同一条边会在 C_{n-2}^1 个抽屉里出现(即该边两点加上任何一个其余的点可构成一个抽屉)，根据抽屉原理知，当 $x\cdot C_{n-2}^1\geqslant 2C_n^3+1$时，才能确保有一个抽屉里有三条边，而这三条边恰好与其中不共线的相异三点构成一个三角形.

这就是说，为了确保图形中出现以给定点为顶点的三角形，则 $x\geqslant\dfrac{2C_n^3+1}{C_{n-2}^1}$，即

$x\geqslant\frac{n(n-1)(n-2)+3}{3(n-2)}$.

其次，显然 n、$n-1$、$n-2$ 中有且只有一个是 3 的倍数.

(i)当 n 或 $n-1$ 是 3 的倍数时，一方面

$$\frac{n(n-1)(n-2)+3}{3(n-2)}=\frac{n(n-1)}{3}+\frac{1}{n-2}$$

是整数，则$\frac{1}{n-2}$是整数；另一方面 $n>3$，$n-2>1$，则$\frac{1}{n-2}$是分数. 矛盾. 此时 n 无解.

(ii)当 $n-2$ 是 3 的倍数时，不妨设 $n-2=3k$. 考虑

$$\frac{n(n-1)(n-2)+3}{3(n-2)}=\frac{3k(3k+1)(3k+2)+3}{3\times 3k}=\frac{3k(3k^2+3k+1)+1-k}{3k}=3k^2+3k+1+\frac{1-k}{3k}$$

是整数，则$\frac{1-k}{3k}$是整数.

令$\frac{1-k}{3k}=t$，则 $k(3t+1)=1$. 从而，$k=1$，$3t+1=1$，即 $k=1$，$t=0$. 所以，$n=3k+2=5$. 于是，$x\geqslant 3k^2+3k+1$，即 $x\geqslant 7$. 因此，x 的最小值是 7.

综合(i)、(ii)可知，当$\frac{n(n-1)(n-2)+3}{3(n-2)}$是整数时，$n=5$，$x_{\min}=7$.

(2)构造抽屉：每个抽屉里有 m 个相异点，共有 C_n^m 个抽屉. 由于同一条边会在 C_{n-2}^{m-2} 个抽屉里出现，根据抽屉原理知，当 $x\cdot C_{n-2}^{m-2}\geqslant C_n^m(C_m^2-1)+1$ 时，才能确保有一个抽屉里有 C_m^2 条边，而这 C_m^2 条边恰好与其中不共线的相异的 m 个点构成一个 m 阶完全图.

第 5 章　数形结合法

A 组

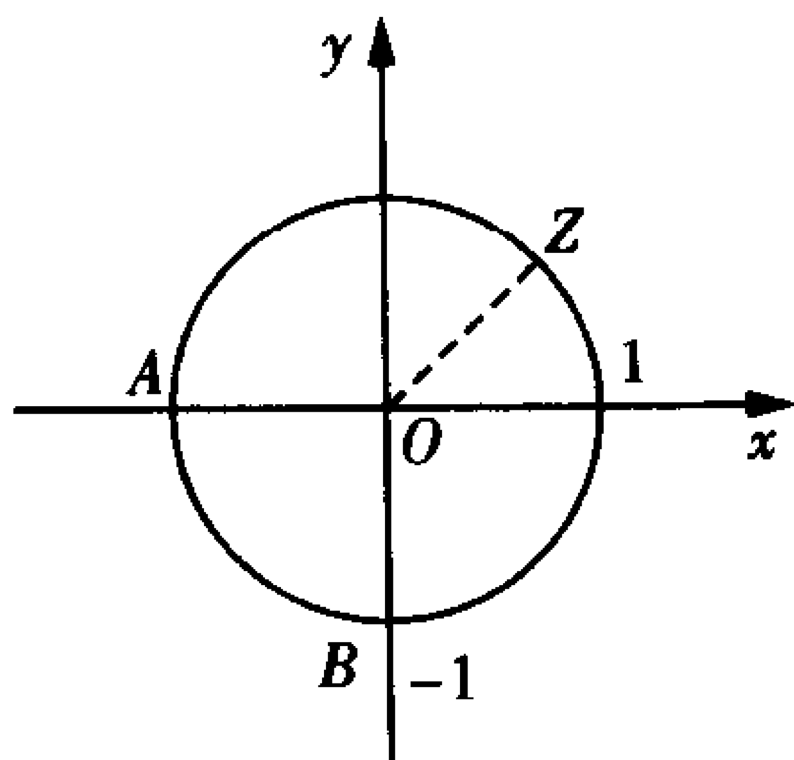
1. 选 B. 理由：

令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，则

$$\begin{aligned}(z+1)(\bar{z}-i)&=(1+\cos\theta+i\sin\theta)[\cos\theta-(1+\sin\theta)i]\\&=\cos\theta(1+\cos\theta)+\sin\theta(1+\sin\theta)+i[\sin\theta\cdot\cos\theta-(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)]\\&=(\sin\theta+\cos\theta+1)-i(1+\sin\theta+\cos\theta).\end{aligned}$$

所以

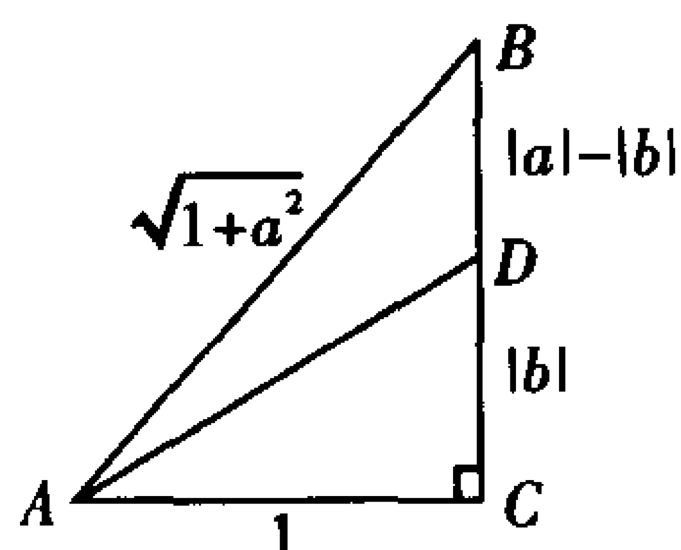
$$\begin{aligned}f(z)&=\sqrt{(1+\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta+\cos\theta+1)^2}\\&=\sqrt{2\left[1+\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}\end{aligned}$$



当 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，$f(z)$最大，最大值为 $2+\sqrt{2}$. 此时 $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$. 而 A、B、Z 三点的位置如图，所示，显然，$\triangle ABZ$ 为等腰三角形，但不是等边的，也不是直角的.

2. 欲证的不等式

$\left|\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}\right|<|a-b|$，相当于去证三角形两边之差小于第三边，故可借助三角形图形来证.

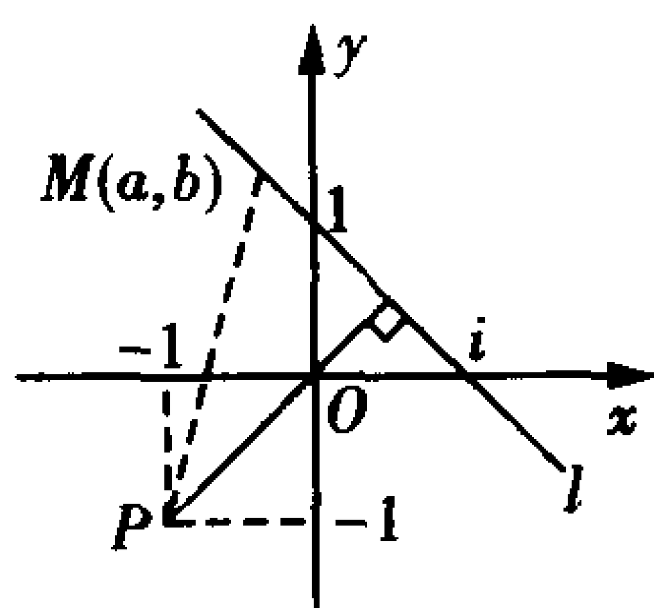


如右图，不妨设$|a|>|b|$，作三角形，以$|a|$、1、$\sqrt{1+a^2}$，及$|b|$、1、$\sqrt{1+b^2}$为三边作两个直角三角形，再将长为1的直角边重合起来，就出现了以$\sqrt{1+a^2}$，$\sqrt{1+b^2}$，$|a|-|b|$为边的$\triangle BAD$. 由于三角形两边之差小于第三边，故$\left|\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}\right|<|a|-|b|$，

而 $|a|-|b|\leqslant|a-b|$，

故 $|f(a)-f(b)|<|a-b|$.

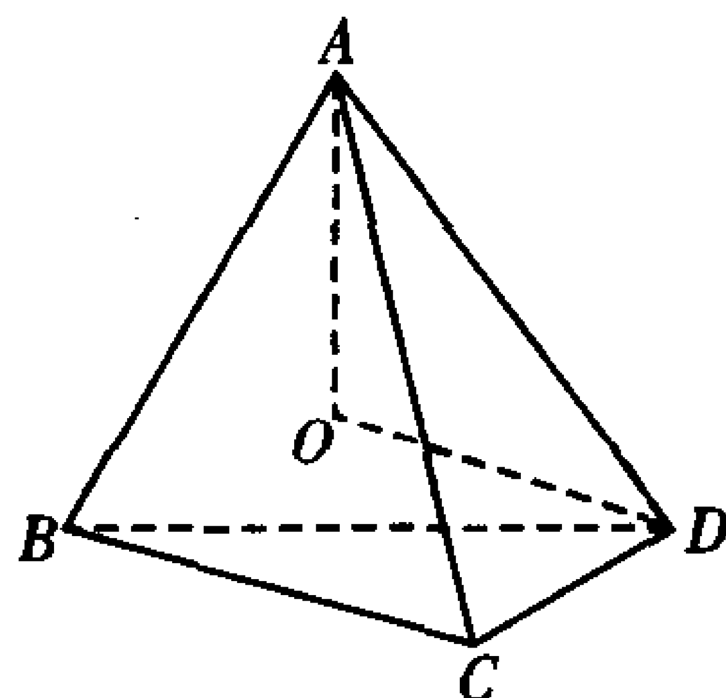
3. 由$a+b=1$，知点$M(a,b)$在直线$l:x+y-1=0$上，如图所示，故点$P(-1,-1)$到点M的距离不小于它到直线l的距离，由两点间的距离公式及点到直线的距离公式，即得



$$\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}\geqslant\frac{|-1-1-1|}{\sqrt{2}},$$

故 $(a+1)^2+(b+1)^2\geqslant\frac{9}{2}$.

4. **解法1** 如图，正四面体$ABCD$，中心O到各顶点连线所夹的角相等，则$\angle AOD$就为所求的角.

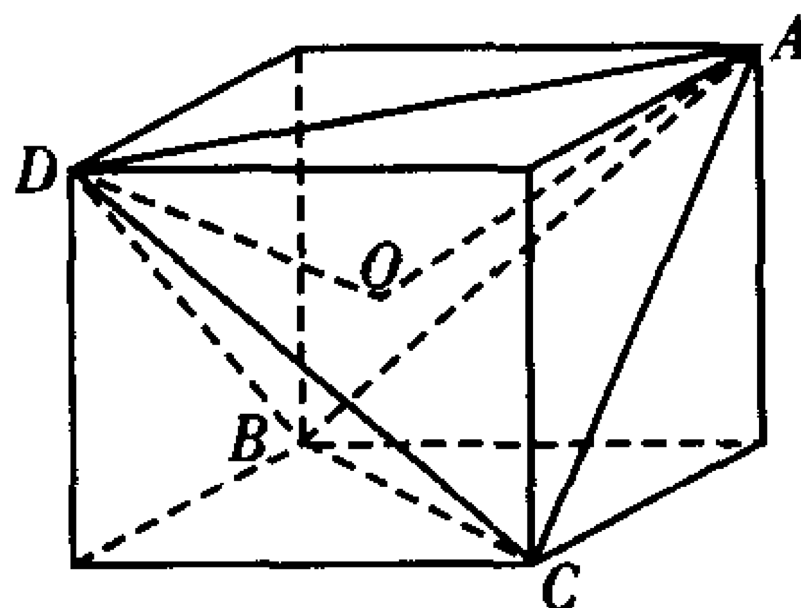


设棱长为a，则$OA=OD=\frac{\sqrt{6}}{4}a$，

$$\cos\angle AOD=\frac{OA^2+OD^2-AD^2}{2OA\cdot OD}=1-\frac{AD^2}{2\cdot OA^2}=1-\frac{a^2}{2\times\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2}=-\frac{1}{3}.$$

则所求的角为$\pi-\arccos\frac{1}{3}$.

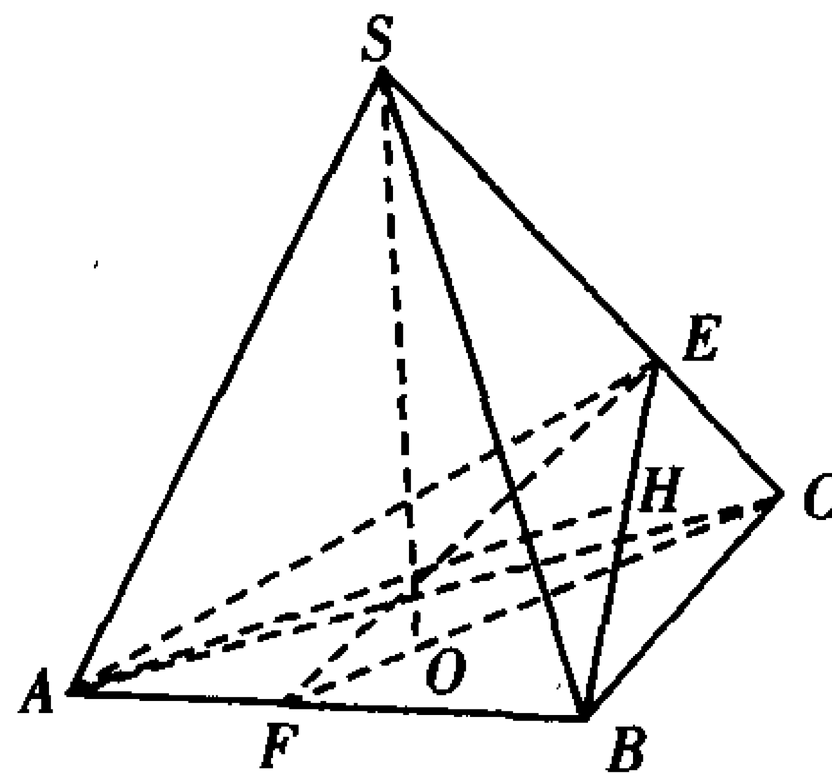
解法2 如图，正方体的中心O到四个顶点A、B、C、D连线所夹的角相等，则$\angle AOD$就为所求的角. 设棱长为a，则$OA=OD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$AD=\sqrt{2}a$，



$$\cos\angle AOD=\frac{OA^2+OD^2-AD^2}{2OA\cdot OD}=1-\frac{AD^2}{2\cdot OA^2}=1-\frac{2a^2}{2\times\frac{3}{4}a^2}=-\frac{1}{3},$$

则所求的角为$\pi-\arccos\frac{1}{3}$.

5. 由二面角H-AB-C的平面角等于30°，可以先作出二面角的平面角，再求出高和底面面积.



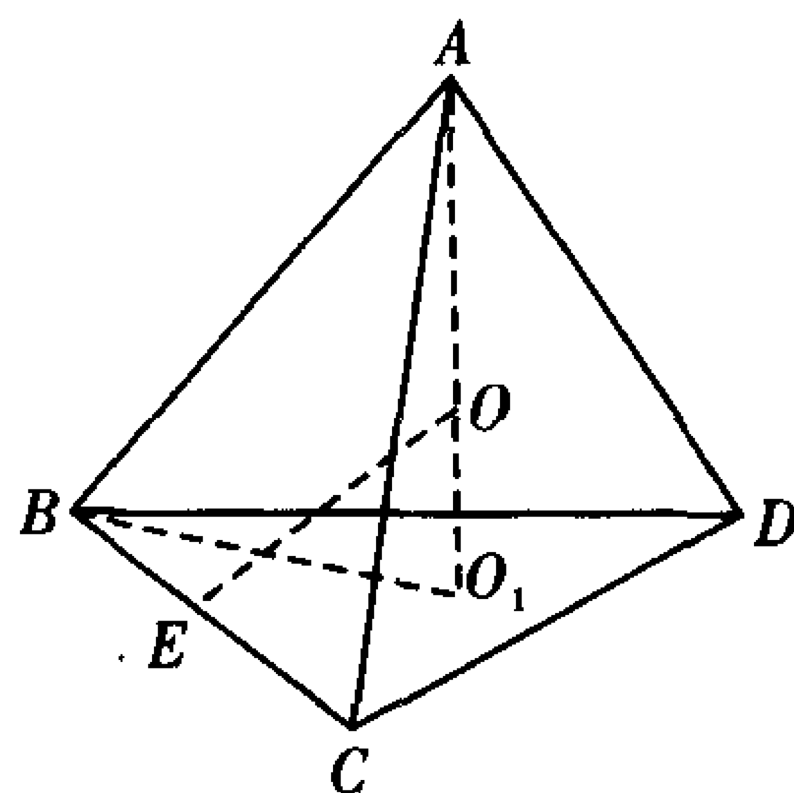
由题设，$AH\perp$面SBC. 作$BH\perp SC$于E. 由三垂线定理可知$SC\perp AE$，$SC\perp AB$，故$SC\perp$面ABE. 设S在面ABC内射影为O，则$SO\perp$面ABC. 由三垂线定理之逆定理，可知$CO\perp AB$于F. 同理$BO\perp AC$. 故O为$\triangle ABC$的垂心. 又因为$\triangle ABC$是等边三角形，故O为$\triangle ABC$的中心，从而$SA=SB=SC=2\sqrt{3}$.

因为$CF\perp AB$，CF是EF在面ABC上的射影，由三垂线定理，

$EF\perp AB$,所以$\angle EFC$是二面角 $H-AB-C$ 的平面角,故$\angle EFC=30^\circ$,$OC=SC\cdot\cos60^\circ=2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}$,$SO=\sqrt{3}\cdot\tan60^\circ=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$. 又 $OC=\frac{\sqrt{3}}{3}AB$,故 $AB=\sqrt{3}OC=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$.

所以 $V_{S-ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3^2\cdot 3=\frac{9}{4}\sqrt{3}$.

6. 正四面体的中心就是球心,然后可以求出半径,从而求出球的体积.



如图所示,设球心为 O,半径为 r,体积为 V,面 BCD 的中心为 O_1,棱 BC 的中点为 E,则

$AO_1=\sqrt{a^2-O_1B^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{3}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$,

由 $OB^2=O_1O^2+O_1B^2=(O_1A-OB)_0^2+O_1B^2$

得$\frac{2}{3}a^2-\frac{2\sqrt{6}}{3}a\cdot OB+\frac{1}{3}a^2=0$,

故 $OB^2=\frac{3}{2\sqrt{6}}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a$,

于是 $r=OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=\sqrt{\frac{3}{8}a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}a$.

$V=\frac{4}{3}\pi r^2=\frac{4}{3}\pi\frac{1}{16\sqrt{2}}a^3=\frac{\sqrt{2}}{24}\pi a^3$.

注 本题可以改编为(第 8 届 IMO 式题):证明一个正四面体的外接球球心,到它的四个顶点的距离之和,小于空间中的其他任一点到四顶点的距离之和.

7. 将所给不等式变形为

$(1+\sin\theta+\cos\theta)x^2-(1+2\sin\theta)x+\sin\theta>0$.

令 $f(x)=(1+\sin\theta+\cos\theta)x^2-(1+2\sin\theta)x+\sin\theta$,则 $f(x)>0$ 在闭区间$[0,1]$上恒成立. 由此可知,必有 $f(0)>0$,$f(1)>0$,即 $f(0)=\sin\theta>0$,$f(1)=\cos\theta>0$,

则 θ 在第一象限内,不妨先取 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$. 于是 $1+\sin\theta+\cos\theta>0$,二次函数 $f(x)$的开口向上,对称轴方程为 $x=\frac{1+2\sin\theta}{2(1+\sin\theta+\cos\theta)}$. 显然 $0<\frac{1+2\sin\theta}{2(1+\sin\theta+\cos\theta)}<1$. 即对称轴 $x=\frac{1+2\sin\theta}{2(1+\sin\theta+\cos\theta)}$位于闭区间$[0,1]$内(不能在端点). 如图所示,要使 $f(x)>0$ 在闭区间$[0,1]$上恒成立,只须满足条件 $\Delta<0$ 即可.

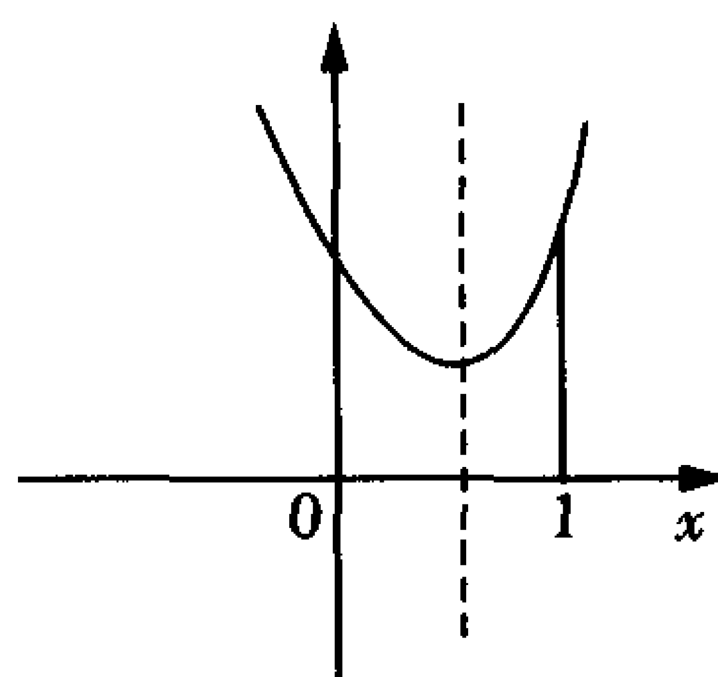
由 $\Delta=(1+2\sin\theta)^2-4\sin\theta(1+\sin\theta+\cos\theta)<0$ 得 $\sin2\theta>\frac{1}{2}$. 由于$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $2\theta\in(0,\pi)$.

$\frac{\pi}{6}<2\theta<\frac{5}{6}\pi$,$\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{5}{12}\pi$.

由此得符合条件的角 θ 的范围是

$2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5}{12}\pi(k\in\mathbf{Z})$.

8. 设 $\cos x=u,\sin x=v$,则原方程可化为 $\begin{cases}au+bv+c=0 & ①\\ u^2+v^2=1(v\geqslant 0) & ②\end{cases}$



$x=\dfrac{1+2\sin\theta}{2(1+\sin\theta+\cos\theta)}$

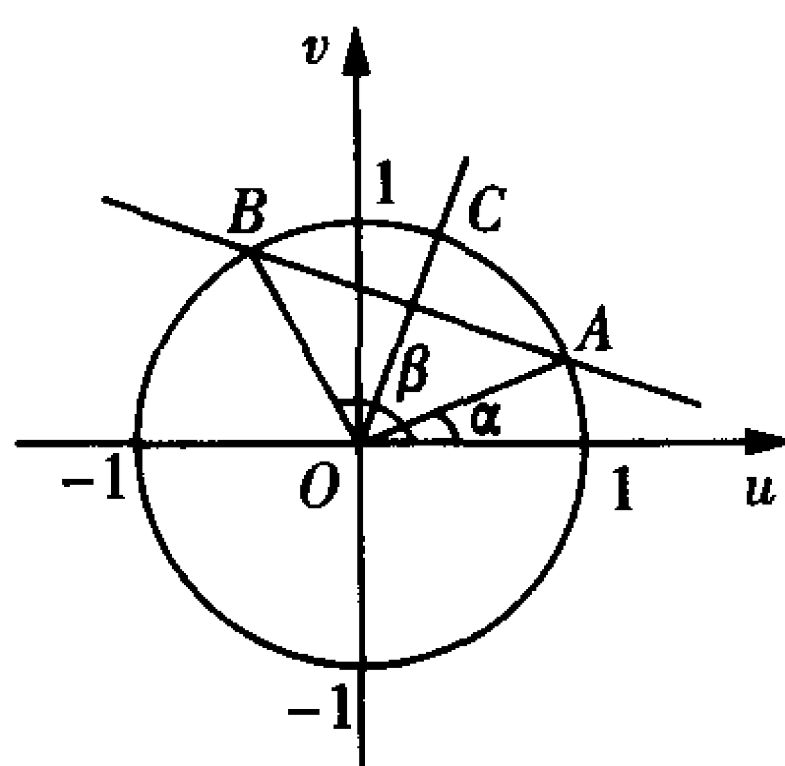
在右图中直线①与半圆②必相交于不同的两点 A、B,且 OA、OB 的倾角分别为 α、β(或 β、α),作 $OC\perp AB$ 交半圆于 C,则 OC 的倾斜角是 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

又 $k_{OC}\cdot k_{AB}=-1$,

即 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-1$,

从而 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{a}{b}$,

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\cdot\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

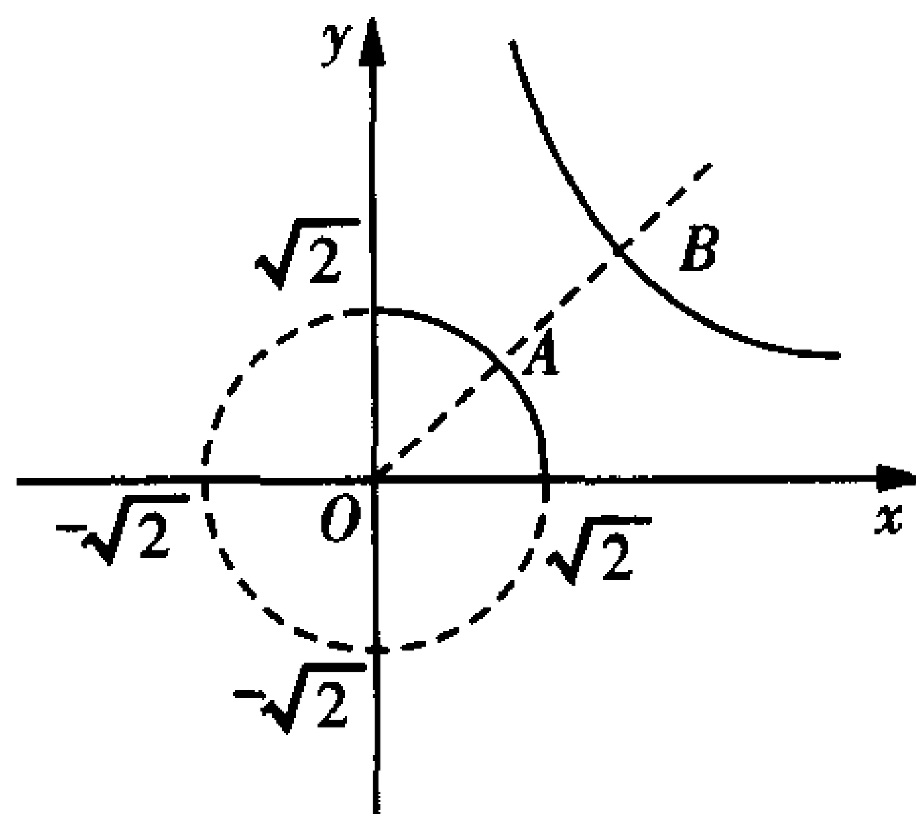


9. 因为 $(\sqrt{2}\sin x-2\tan y)^2+(\sqrt{2}\cos x-3\cot y)^2$ 可看作直角坐标系内两点 $A(\sqrt{2}\sin x,\sqrt{2}\cos x)$、$B(3\tan y,3\cot y)$ 之间的距离的平方. 此时,动点 A 的轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x_1=\sqrt{2}\sin x\\ y_1=\sqrt{2}\cos x\end{cases}$

即 $x_1^2+y_1^2=2\quad(x_1>0,y_1>0)$,其图象为第一象限内的圆弧;

动点 B 的轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x_2=3\tan y\\ y_2=3\cot y\end{cases}$

即 $x_2y_2=9(x_2>0,y_2>0)$,其图象是双曲线在第一象限内的一支. 由图可知,当且仅当 $x=y=\dfrac{\pi}{4}$ 时,A、B 有最短距离.



又 $|OA|=\sqrt{2}$,

$|OB|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$,

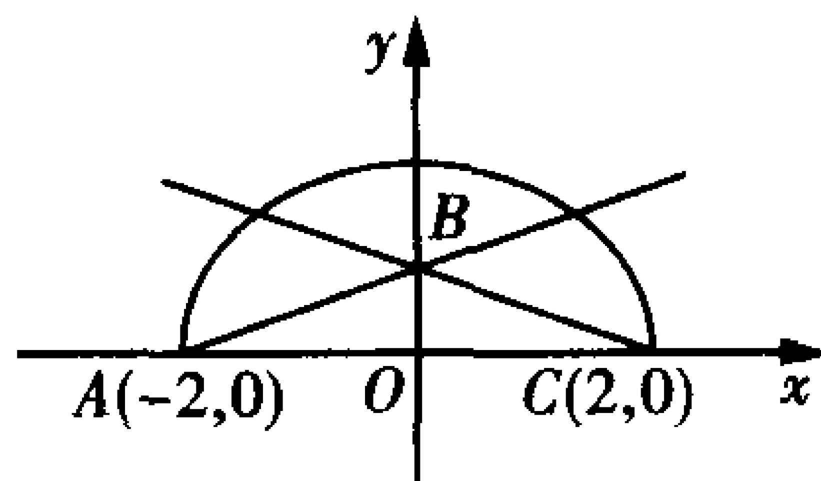
则 $|AB|=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,

故 原函数的最小值为 $|AB|^2=(2\sqrt{2})^2=8$.

10. 原方程变形为 $\sqrt{(x+3)^2+2}+\sqrt{(x-3)^2+2}=10$,将方程中的常数“2”看作变量,即令 $2=y^2$,则 $\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=10$.

由椭圆的定义可知,这个方程表示以 $F_1(-3,0)$,$F_2(3,0)$ 为焦点,长轴长为 10 的椭圆,其方程为 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$,再将 $y^2=2$ 代入后,求得原方程的解为 $x=\pm\dfrac{5}{4}\sqrt{14}$.

11. 设 $y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$,其图象是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的上半部分,又 $y=ax+\dfrac{1}{2}$ 的图象是过定点 $B\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,斜率为 a 的直线,如图.



$k_{AB}=\frac{1}{4}, k_{BC}=-\frac{1}{4}$,

于是直线与上半椭圆交点的横坐标即为方程

$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=ax+\frac{1}{2}$ 相应的解：$x=\frac{-2\pm\sqrt{16a^2+3}}{4a^2+1}$.

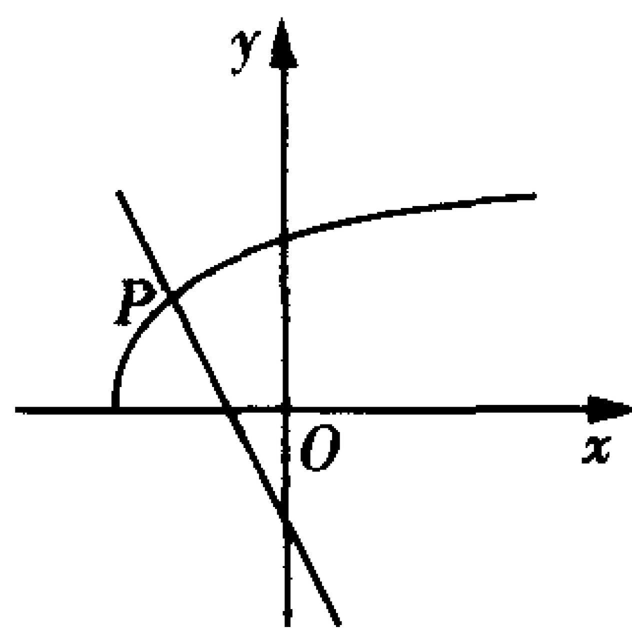
当 $-\frac{1}{4}<a<\frac{1}{4}$ 时，原不等式的解为

$-2\leqslant x<\frac{-2a-\sqrt{16a^2+3}}{4a^2+1}$ 或 $\frac{-2a+\sqrt{16a^2+3}}{4a^2+1}<x\leqslant 2$.

当 $a\geqslant\frac{1}{4}$ 时，原不等式的解为 $\frac{-2a+\sqrt{16a^2+3}}{4a^2+1}<x\leqslant 2$.

当 $a\leqslant-\frac{1}{4}$ 时，不等式的解为 $-2\leqslant x<\frac{-2a-\sqrt{16a^2+3}}{4a^2+1}$.

12. 不等式可化为 $\sqrt{a^2-ax}>a-2x$. 作出函数 $y=\sqrt{a^2-ax}$ 和 $y=a-2x$ 的图象，如图由 $\sqrt{a^2-ax}=a-2x$,



解得 $x=\frac{3a}{4}$.

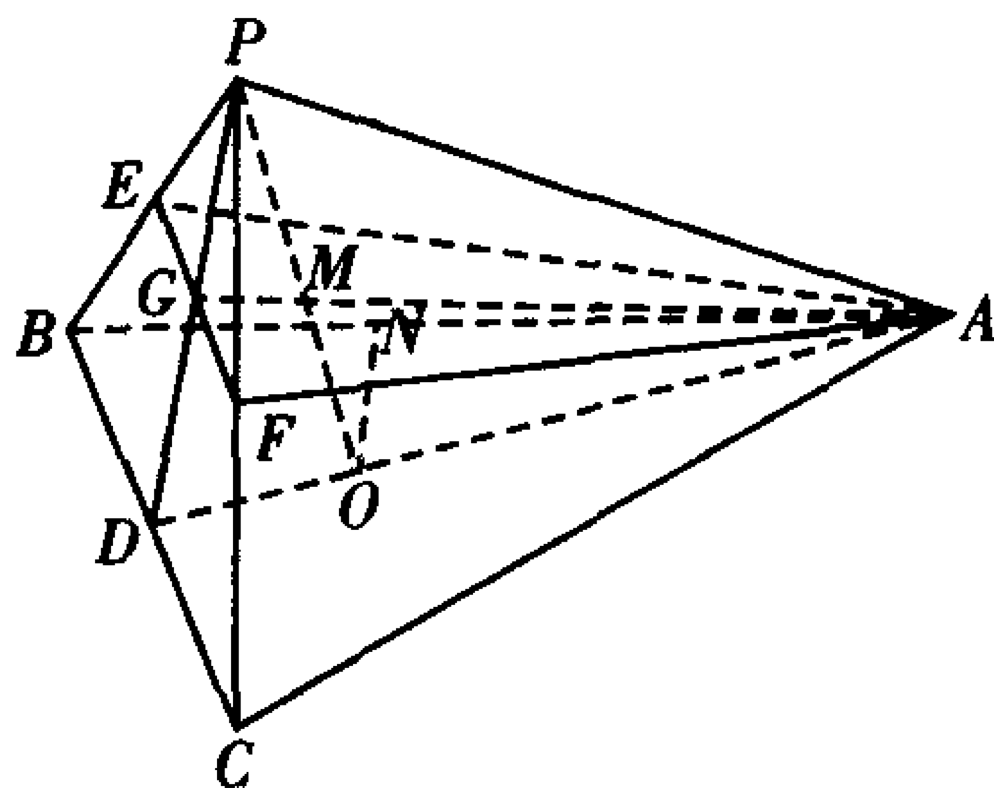
从而两个函数图象的交点为

$P\left(\frac{3a}{4},-\frac{a}{2}\right)$.

由图可知当 $x>\frac{3a}{4}$ 时，函数 $y=\sqrt{a^2-ax}$ 的图象位于函数 $y=a-2x$ 的图象的上方，故不等式的解集是

$\left(\frac{3a}{4},+\infty\right)$.

13. 设过 AM 平行于 BC 的平面与棱 PB、PC 分别交于 E、F，则 $EF/\!/BC$. 又设 D 为 BC 的中点，连接 PD 交 EF 于 G，则 $\frac{EF}{BC}=\frac{PG}{PD}$. 因 A 到平面 PBC 的距离即为 A 到平面 PEF 的距离，故



$\frac{V_{P\text{-}AEF}}{V_{P\text{-}ABC}}=\frac{V_{A\text{-}PEF}}{V_{A\text{-}PBC}}=\frac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle PBC}}=\left(\frac{PG}{PD}\right)^2$.

在 $\triangle PDA$ 中，过 O 点作 PD 的平行线交 AG 于 N，则 $\triangle PGM\backsim\triangle ONM$，又 $PM=OM$，故 $\triangle PGM\cong\triangle ONM$，$PG=ON$.

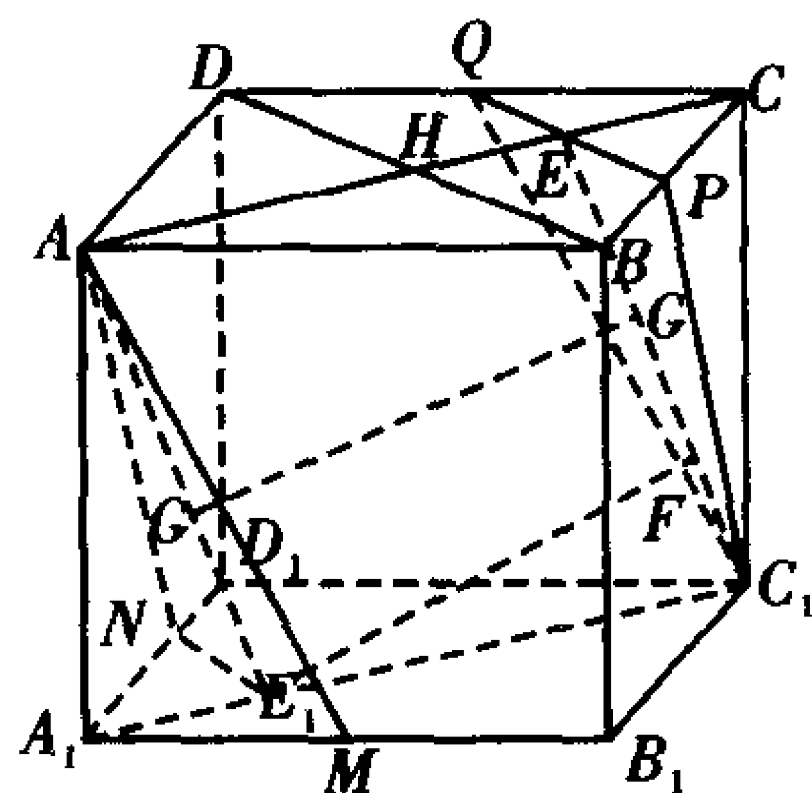
又 $\triangle ANO\backsim\triangle AGD$，故 $\frac{PG}{GD}=\frac{ON}{GD}=\frac{AO}{AD}=\frac{2}{3}$,

$\frac{PG}{PD}=\frac{PG}{PG+GD}=\frac{1}{1+\frac{3}{2}}=\frac{2}{5}$.

故 $\frac{V_{P\text{-}AEF}}{V_{P\text{-}ABC}}=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$.

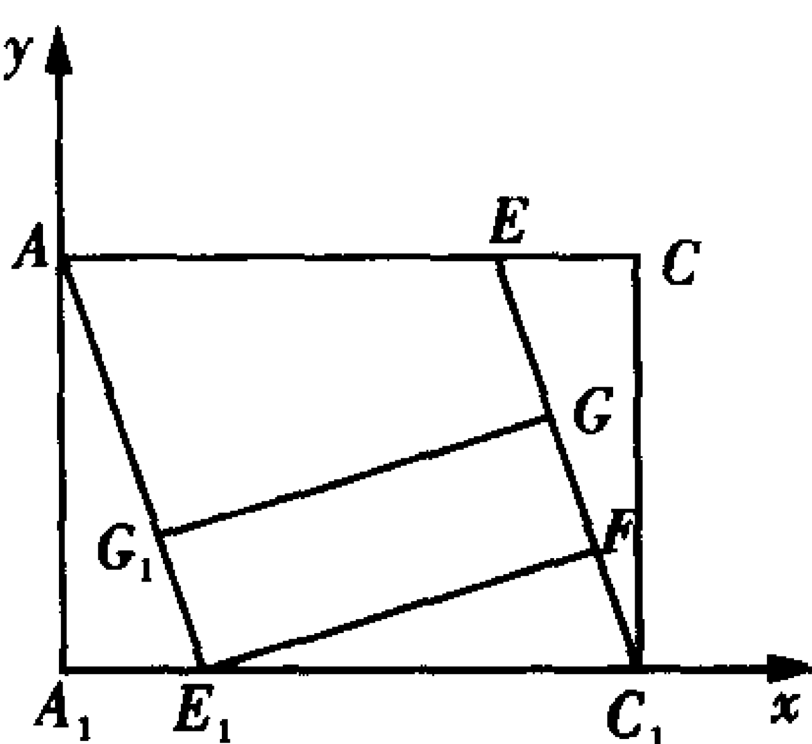
故上下两部分体积之比为$\frac{4}{21}$.

注 本题可以适当改编一下，即为第7届IMO试题：已知一个四面体$ABCD$，棱AB的长为a，棱CD的长为b. 异面直线AB与CD之间的距离为d，所成的角为δ. 该四面体被平行于棱AB与CD的平面γ截成两部分，如果AB、CD到平面γ的距离之比是k，试求这两部分的体积比. $\left(\frac{k^2(k+3)}{3k+1}\right)$



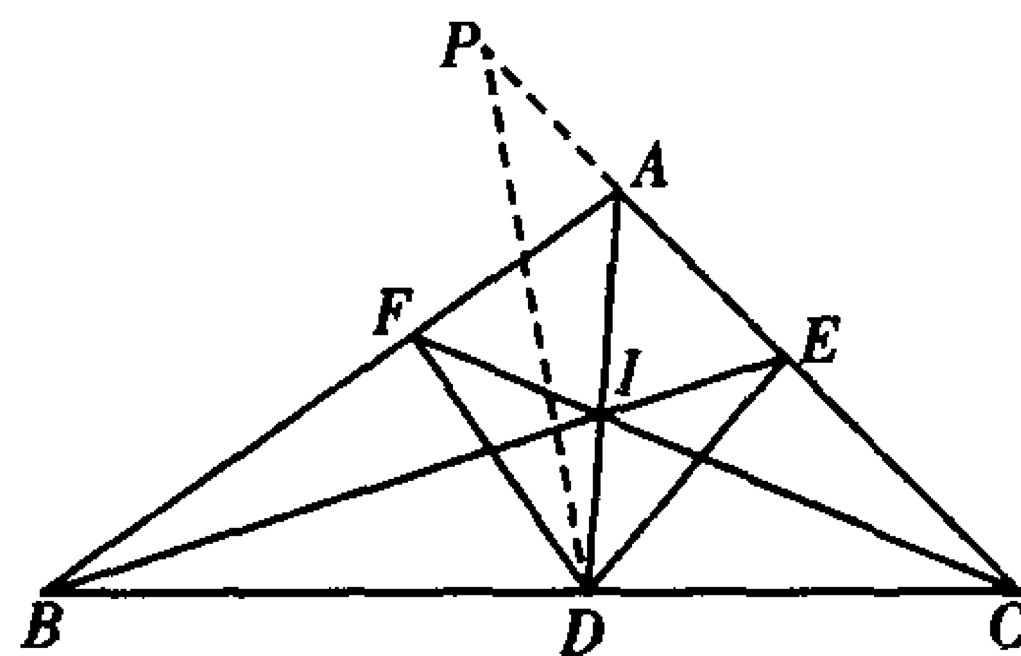
14. 如右上图所示，作截面AA_1C_1C. 设它与$\triangle AMN$、$\triangle C_1PQ$分别交于AE_1、C_1E. 设矩形$ABCD$的对角线相交于H，则有$AH=HC=BH=HD$，从而$PE=EQ=CE=\frac{1}{4}AC$，因此C_1E为$\triangle C_1PQ$的中线，$\triangle C_1PQ$的垂心G必在C_1E上. 同理$A_1E_1=\frac{1}{4}A_1C_1$，$\triangle AMN$的重心G_1必在AE_1上.

在截面中建立坐标系如右下图所示. A_1为原点，E_1、C_1、E的坐标分别为$\left(\frac{1}{4}d,0\right)$，$(d,0)$，$\left(\frac{3}{4}d,a\right)$. 其中$d=\sqrt{b^2+c^2}$.



在C_1E上取F，使$C_1F=\frac{1}{3}C_1E$. 易知E_1F 瘙綊G_1G. 由分点坐标公式，得F的坐标为$\left(\frac{11}{12}d,\frac{a}{3}\right)$，因此，$G_1G=E_1F=\sqrt{\left(\frac{11}{12}d-\frac{1}{4}d\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+4b^2+4c^2}$.

B组



1. (1)由正弦定理得

$$\frac{\sin\angle AFD}{\sin\angle FAD}=\frac{AD}{FD}=\frac{AD}{ED}=\frac{\sin\angle AED}{\sin\angle DAE},$$

则$\sin\angle AFD=\sin\angle AED$.

故$\angle AFD=\angle AED$，或$\angle AFD+\angle AED=180^\circ$.

若$\angle AFD=\angle AED$，则

$\triangle ADF\cong\triangle ADE$，$AF=AE$.

于是，$\triangle AIF\cong\triangle AIE$，$\angle AFI=\angle AEI$.

从而，$\triangle AFC\cong\triangle AEB$. 故$AC=AB$. 矛盾.

所以，$\angle AFD+\angle AED=180^\circ$，$A$、$F$、$D$、$E$四点共圆. 于是，

$\angle DEC=\angle DFA>\angle ABC$.

在CE的延线上取一点P，使得$\angle DPC=\angle B$，则

$$PC=PE+CE. \quad ①$$

由$\angle BFD=\angle PED$，$FD=ED$，得

$\triangle BFD\cong\triangle PED$.

故 $PE=BF=\dfrac{ac}{a+b}$.

又$\triangle PCD\backsim\triangle BCA$，则$\dfrac{PC}{BC}=\dfrac{CD}{CA}$，于是，

$$PC=a\cdot\frac{ba}{b+c}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a^2}{b+c}. \quad ②$$

由①、②得$\dfrac{a^2}{b+c}=\dfrac{ac}{a+b}+\dfrac{ab}{c+a}$. 所以，

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

(2)由(1)的结论有

$a(a+b)(a+c)=b(b+a)(b+c)+c(c+a)(c+b)$,

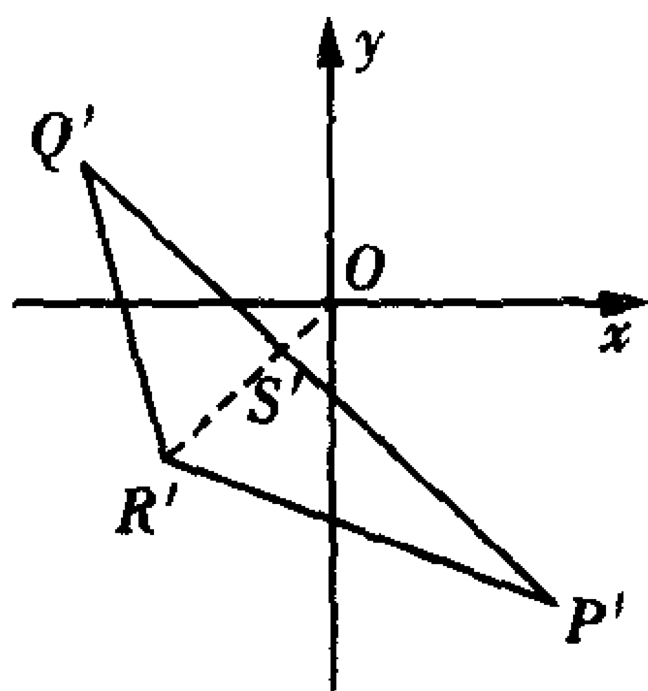
$a^2(a+b+c)=b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)+abc>b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)$.

由 $a^2>b^2+c^2$，所以，$\angle BAC>90°$.

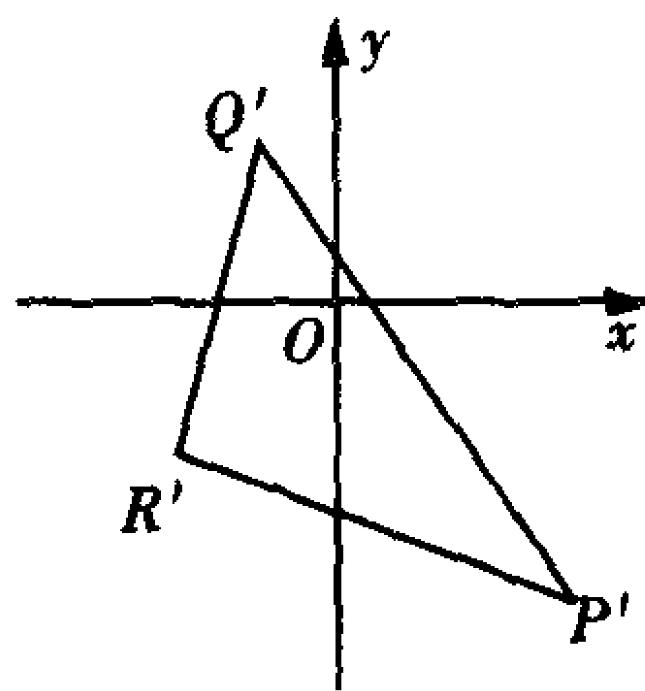
2. 设在空间直角坐标系中，$O(0,0,0)$，$P(a_{11},a_{21},a_{31})$，$Q(a_{12},a_{22},a_{32})$，$R(a_{13},a_{23},a_{33})$. 只要证明，在$\triangle PQR$ 中存在一点，其坐标要么都是负数，要么都是正数，要么都是零.

设 P、Q、R 在 xOy 平面上的投影分别为 P'、Q'、R'，则 P'、Q'、R'分别在第四象限、第二象限、第三象限.

如图甲，若 O 在$\triangle P'Q'R'$的外部或边界上，设 $P'Q'$ 与 OR' 交于 S'，S 是线段 PQ 上的点，其在 xOy 平面上的投影为 S'. 因为点 P、Q 在 z 轴上的坐标均为负数，所以，点 S 在 z 轴上的坐标也为负数. 于是，在线段 SR 上，且足够接近点 S 的任意一点的坐标都是负数.



图甲



图乙

如图乙，若 O 在$\triangle P'Q'R'$的内部，设 T 是平面 PQR 上的一点，T 在 xOy 平面上的投影为 O. 若 $T=O$，则 T 的坐标都是 0；若 T 在 z 轴上的坐标为负数(或正数)，那么，在$\triangle PQR$ 内取一点 U，且足够接近点 T，使得其在 x 轴和 y 轴上的坐标均为负数(或正数). 于是，点 U 的坐标全为负数(或正数).

3. 由已知条件可得

$BF^2-CE^2=(BP^2-PF^2)-(CP^2-PE^2)=(BP^2+PE^2)-(CP^2+PF^2)=0$.

从而，$BF=CE$.

设 $x=BF=CE$. 同理可设

$y=CD=AF$，$z=AE=BD$.

若 D、E、F 中有一个点在三边的延长线上，如点 D 在 BC 的延长线上，则有

$AB+BC=(x+y)+(z-y)=x+z=AC$，矛盾.

因此，D、E、F三个点都在$\triangle ABC$的三边上.

设$a=BC,b=CA,c=AB,p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则

$x=p-a,y=p-b,z=p-c.$

因为$BD=p-c,CD=p-b$，所以，D是$\triangle ABC\angle BAC$内的旁切圆与边BC的切点.

同理，E、F分别是$\angle ABC$、$\angle ACB$内的旁切圆与边CA、AB的切点.

由于PD和I_AD均垂直于BC，所以，P、D、I_A三点共线.

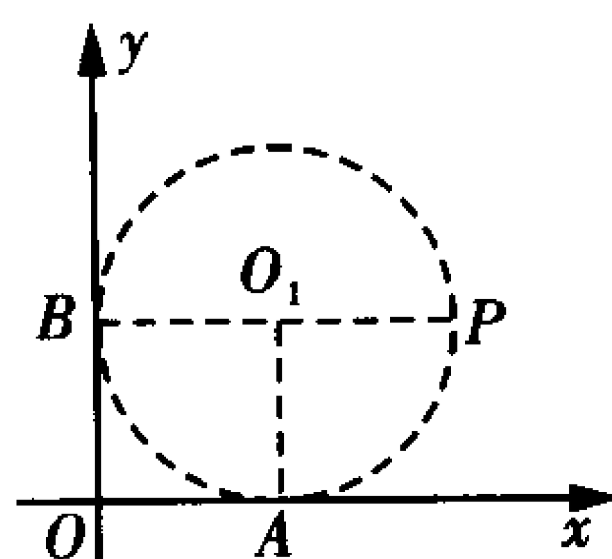
同理，P、E、I_B和P、F、I_C均三点共线.

因为I_A、C、I_B三点共线，且$\angle PI_AC=\angle PI_BC=\frac{\angle ACB}{2}$，所以，$PI_A=PI_C$.

同理可得，$PI_A=PI_B=PI_C$.

因此，P是$\triangle I_AI_BI_C$的外心.

4. 先作一$\odot O_1$过点P且与射线OX，OY相切(切点为A、B)，且点P在优弧$\overset{\frown}{AB}$上.



分别以射线OX、OY为x轴、y轴建立直角坐标系，如图，则有$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

设$O_1(a,a)$，则有

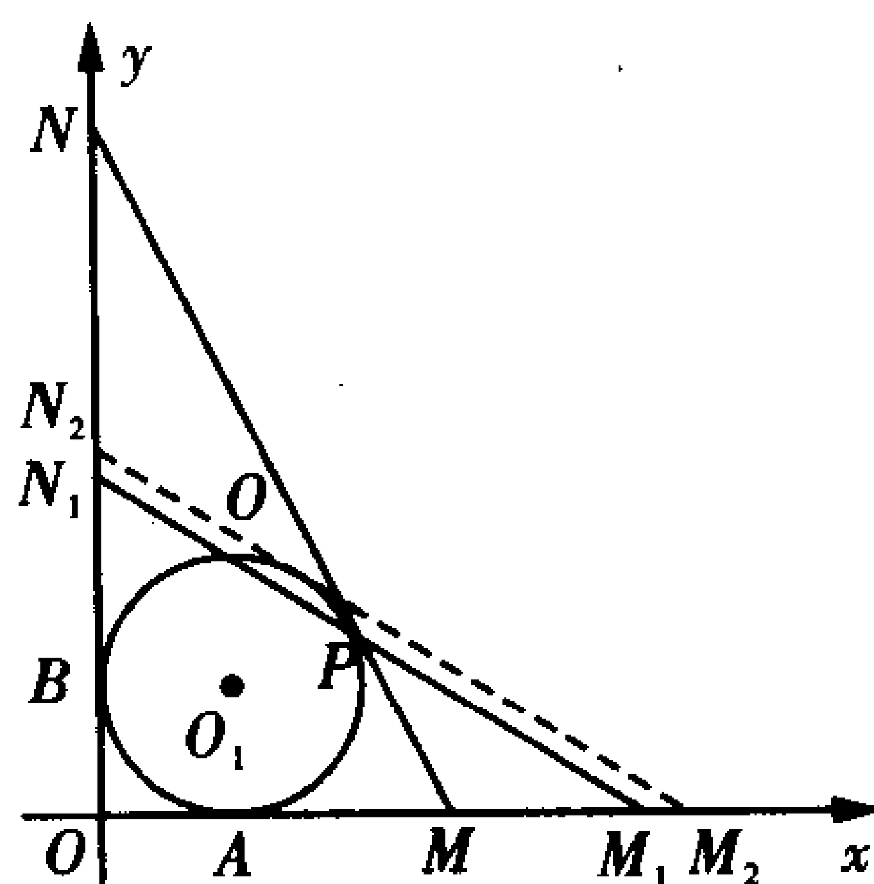
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-a\right)^2+\left(\frac{1}{2}-a\right)^2=a^2,$$

即 $a^2-(\sqrt{3}+1)a+1=0.$

所以，$\Delta=(\sqrt{3}+1)^2-4=2\sqrt{3}$.

故$a=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt[4]{12}}{2}$(取较小根).

因为$30^\circ<45^\circ$，且$\frac{1}{2}>a=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt[4]{12}}{2}$，所以，过点$P$的$\odot O_1$的切线与射线$OX$、$OY$都相交.



如图设MN是过点P的$\odot O_1$的切线，M、N分别在射线OX、OY上，设M_1N_1是过点P的任一直线，且与$\odot O_1$相交，M_1、N_1分别在射线OX、OY上.

将M_1N_1朝远离点O的方向平移，直至与$\odot O_1$相切所得直线为M_2N_2(切点为Q)，M_2、N_2分别在射线OX、OY上.

由切线长定理有

$OM_1+ON_2-M_1N_1<OM_2+ON_2-M_2N_2=(OB+BN_2)+(OA+AM_2)-(N_2Q+QM_2)=2OA.$

同理，$2OA=OM+ON-MN$.

综上可得，当MN是过点P的$\odot O_1$的切线时，$OM+ON-MN$取得最大值，且最大值为$2OA=2a=\sqrt{3}+1-\sqrt[4]{12}$.

5. 由题设得$0<a$、b、$c<\pi$. 故

$\sin a>0,\sin b>0,\sin c>0,$

$|\cos a|<1,|\cos b|<1,|\cos c|<1.$

不妨设 $\sin a\leqslant\sin b\leqslant\sin c$.

若 $a=\frac{\pi}{2}$，则 $b=c=\frac{\pi}{2}$.

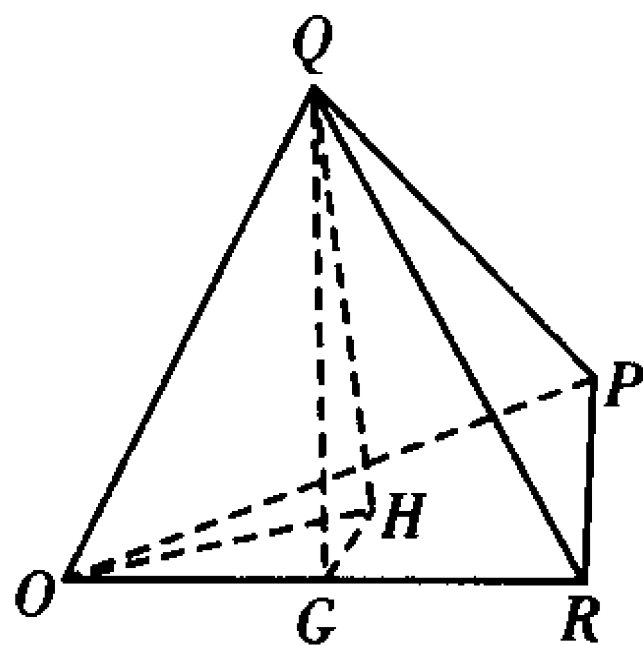
故 $\sin a=\sin b=\sin c=1$. 结论显然成立.

设 $a\neq\frac{\pi}{2}$.

(1)当 $a+b+c=2\pi$ 时，有

$\sin c=\sin(2\pi-a-b)=-\sin(a+b)\leqslant\sin a\cdot|\cos b|+\sin b\cdot|\cos a|<\sin a+\sin b$.

(2)当 $a+b+c<2\pi$ 时，由于 a、b、c 构成三角形的三边，故存在一个三面角使得 a、b、c 分别为其面角. 如图所示.



这里 OR、OP、OQ 不在一平面上，$OQ=OP=OR=1$，$\angle QOR=a$，$\angle QOP=b$，$\angle POR=c$.

过点 Q 作平面 POQ 的垂线，垂足为 H. 过 H 作 OR 的垂线，垂足为 G. 设 $\angle QOH=\varphi$，$\angle HOR=\theta$，则

$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\theta<2\pi$.

由勾股定理得

$$\sin a=QG=\sqrt{QH^2+GH^2}=\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cdot\sin^2\theta}=\sqrt{\sin^2\theta+\sin^2\varphi\cdot\cos^2\theta}\geqslant|\sin\theta|. \quad ①$$

类似有

$$\sin b=\sqrt{\sin^2(c-\theta)+\sin^2\varphi\cdot\cos^2(\theta-c)}\geqslant|\sin(c-\theta)|. \quad ②$$

我们断言，①和②中的等号不能同时成立. 若不然，由 $\sin^2\varphi\neq0$ 得 $\cos\theta=\cos(c-\theta)=0$. 故

$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$，$c-\theta=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2}$.

这与 $0<c<\pi$ 矛盾. 因此，

$\sin a+\sin b>|\sin\theta|+|\sin(c-\theta)|\geqslant|\sin(\theta+c-\theta)|=\sin c$.

6. **证法 1** 先证明一个引理：

已知△DEF，点 P、Q 分别在直线 FD、FE 上，使得 $PF\geqslant\lambda DF$，$QF\geqslant\lambda EF$，$\lambda>0$. 若 $\angle PFQ\geqslant90°$，则 $PQ\geqslant\lambda DE$.

事实上，设 $\angle PFQ=\theta$，因 $\theta\geqslant90°$，则 $\cos\theta\leqslant0$. 所以，

$PQ^2=PF^2+QF^2-2PF\cdot QF\cos\theta\geqslant(\lambda DF)^2+(\lambda EF)^2-2\lambda DF\cdot\lambda EF\cos\theta=(\lambda DE)^2$.

从而，$PQ\geqslant\lambda DE$.

下面证明原题.

因为 $\angle AFE=\angle BFE=\angle CFD=\angle AFD=60°$，设 BF、CF 分别交△CFA、△AFB 的外接圆于 P、Q，则△CPA 和△ABQ 均为正三角形. 由引理，令 $\lambda=4$，$\theta=120°$，设 P_1 为 F 在直线 AC 上的投影，AC 的中垂线交△CFA 的外接圆于 P 和 P_2，M 为 AC 的中点，则

$\frac{PD}{DF}=\frac{PM}{FP_1}\geqslant\frac{PM}{MP_2}=3$.

所以，$PF\geqslant4DF$.

同理，$QF\geqslant4EF$.

因为 $\angle DFE=120°$，由引理可得 $PQ\geqslant4DE$. 故

$AB+AC=AQ+AP\geqslant PQ\geqslant 4DE.$

证法 2 设 $AF=x,BF=y,CF=z$，由 $S_{\triangle ACF}=S_{\triangle ADF}+S_{\triangle CDF}$，得

$DF=\dfrac{xz}{x+z}.$

同理，$EF=\dfrac{xy}{x+y}.$

于是，只要证明

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geqslant 4\sqrt{\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2+\left(\frac{xz}{x+z}\right)^2+\left(\frac{xy}{x+y}\right)\left(\frac{xz}{x+z}\right)}.$$

因为 $x+y\geqslant\dfrac{4xy}{x+y}$，$x+z\geqslant\dfrac{4xz}{x+z}$，所以，只要证

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geqslant\sqrt{(x+y)^2+(x+z)^2+(x+y)(x+z)}$$

平方化简后得

$$2\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}\geqslant x^2+2(y+z)x+yz,$$

再平方化简后得 $3(x^2-yz)^2\geqslant 0$，即原不等式成立.

7. **证法 1** 令 $\alpha=\angle CAB,\beta=\angle ABC,\gamma=\angle BCA,\delta=\angle COP.$

设 K、Q 为点 A、P 关于 BC 的垂直平分线的对称点，R 为$\triangle ABC$ 的外接圆半径，则

$OA=OB=OC=OK=R.$

由于 $KQPA$ 为矩形，则

$QP=KA,$

及 $\angle AOK=\angle AOB-\angle KOB=\angle AOB-\angle AOC=2\gamma-2\beta\geqslant 60^\circ.$

由此及 $OA=OK=R$，导出

$KA\geqslant R,QP\geqslant R.$

利用三角不等式，

$OP+R=OQ+OC>QC=QP+PC\geqslant R+PC.$

因此，$OP>PC.$

在$\triangle COP$ 中，$\angle PCO>\delta.$

由 $\alpha=\dfrac{1}{2}\angle BOC=\dfrac{1}{2}(180^\circ-2\angle PCO)=90^\circ-\angle PCO$，得 $\alpha+\delta<90^\circ.$

证法 2 延长 CO、AO、AP 分别交$\odot O$ 于 D、E、F，连结 EF、ED. 则

$\angle E=\angle CAP+\angle ABC=90^\circ-\angle ACB+\angle ABP.$

故$\angle OAP=90^\circ-\angle E=\angle ACB-\angle ABP.$

设$\odot O$ 的半径为 R.

由 $CP=2R\sin B\cdot\cos C,AP=2R\sin B\cdot\sin C,$

有
$$\begin{aligned}OP^2&=AP^2+OA^2-2OA\cdot AP\cos\angle OAP\\&=4R^2\sin^2B\cdot\sin^2C+R^2-4R^2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos(C-B)\\&=4R^2\left[\sin^2B\cdot\sin^2C+\frac{1}{4}-\sin^2B\cdot\sin^2C-\sin B\cdot\cos B\cdot\sin C\cdot\cos C\right]\\&=4R^2\left(\frac{1}{4}-\sin B\cdot\cos B\cdot\sin C\cdot\cos C\right).\end{aligned}$$

则 $OP^2-CP^2=4R^2[\frac{1}{4}-\sin B\cdot\cos C\cdot\sin(B+C)]=4R^2[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin^2 A+\frac{1}{2}\sin A\cdot\sin(C-B)]$.

又 $\angle C-\angle B\geqslant 30°$，且 $\angle C$、$\angle B$ 都为锐角，

则上式 $\geqslant 4R^2[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin^2 A+\frac{1}{4}\sin A]=R^2(2\sin A+1)(1-\sin A)>0$.

从而 $OP^2>CP^2\Rightarrow OP>CP$.

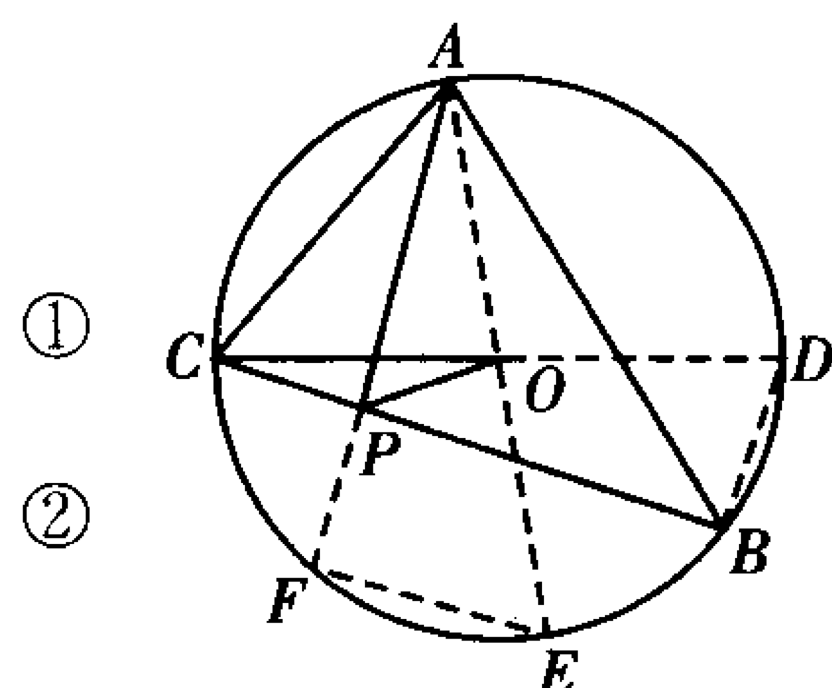
有 $\angle COP<\angle OCP$.

故 $\angle COP+\angle CAB<\angle OCP+\angle D=90°$.

证法 3　如图，据题意有

$\alpha+\beta、\beta+\gamma、\alpha+\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

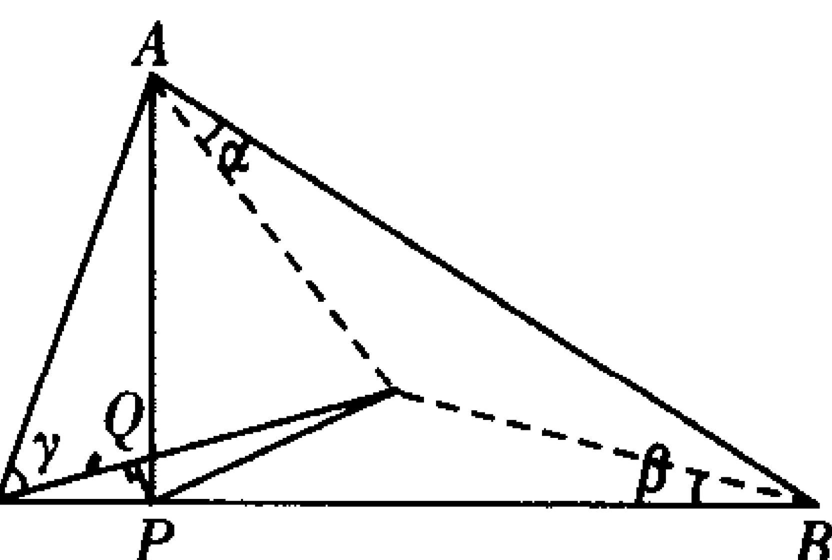
且 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.　①



因 $\angle BCA\geqslant\angle ABC+30°$，则 $\beta+\gamma\geqslant\alpha+\beta+30°\Rightarrow\gamma-\alpha\geqslant\frac{\pi}{6}$.　②

注意到

$\angle CAB+\angle OCB=\frac{1}{2}\angle COB+\frac{1}{2}(\angle OCB+\angle OBC)=\frac{\pi}{2}$.



要证 $\angle CAB+\angle COP<\frac{\pi}{2}$，仅需证 $\angle COP<\angle OCP$（作 $PQ\perp OC$ 于 Q）$\Leftarrow PC<PO\Leftarrow CQ<OQ\Leftarrow CQ<\frac{1}{2}CO$.

设 $\triangle ABC$ 外接圆 $\odot O$ 半径为 R，则有

$AC=2R\sin(\alpha+\beta)$，

$PC=AC\cos(\beta+\gamma)=2R\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)$，

$$\begin{aligned}QC&=PC\cos\beta\\&=2R\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\cos\beta\\&=R[\sin(\alpha+\beta+\gamma+\beta)+\sin(\alpha-\gamma)]\cos\beta\\&=R[\cos\beta-\sin(\gamma-\alpha)]\cos\beta.\end{aligned}$$

由式①、②可知，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，有 $\cos\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，则

$$QC\leqslant R\left[\cos\beta-\sin\frac{\pi}{6}\right]\cos\beta=R\left[\left(\cos\beta-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4^2}\right]$$

$$<R\left[\frac{3^2}{4^2}-\frac{1}{4^2}\right]=\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}OC.$$

证法 4　如图，过点 O 作 BC 的垂线，垂足为 D.

$\because\angle BAC=\frac{1}{2}<BOC=\angle DOC$，

$\therefore\frac{\pi}{2}-\angle BAC=\frac{\pi}{2}-\angle DOC=\angle OCD$.

则只需证 $\angle COP<\angle OCD\Leftarrow PC<OP$.

以 O 作原点、OD 所在直线为 y 轴，以过点 O 且平行于 BC 的直线为 x 轴建立直角坐标系.

设$\angle AOx=\alpha$，$\angle xOC=\beta$，且 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，其外接圆半径为 R.

有 $P(R\cos\alpha,-R\sin\beta)$，$C(R\cos\beta,-R\sin\beta)$.

则　$|PC|=R(\cos\beta-\cos\alpha)$，

$\therefore$　$|PC|^2-|PO|^2=R^2(2\cos^2\beta-2\cos\beta\cdot\cos\alpha-1)$

$|PO|=R\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\beta}$.

$\because$　$\angle ABO=\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\angle ACO=\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}$，且$\angle ACB-\angle ABC=\angle ACO-\angle ABO\geqslant\frac{\pi}{6}$，

$\therefore$　$\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\geqslant\frac{\pi}{6}$，即 $\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$.

$\therefore$　$-\cos\alpha\leqslant-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

则　$|PC|^2-|PO|^2\leqslant R^2(2\cos^2\beta-\cos\beta-1)$

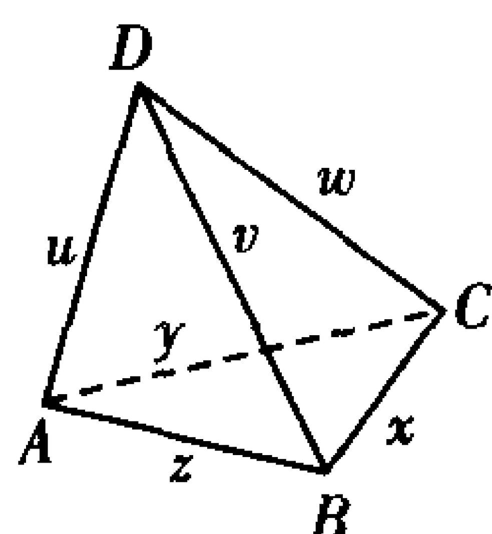
$=R^2(2\cos\beta+1)(\cos\beta-1)$.

$\because 0<\cos\beta<1$，

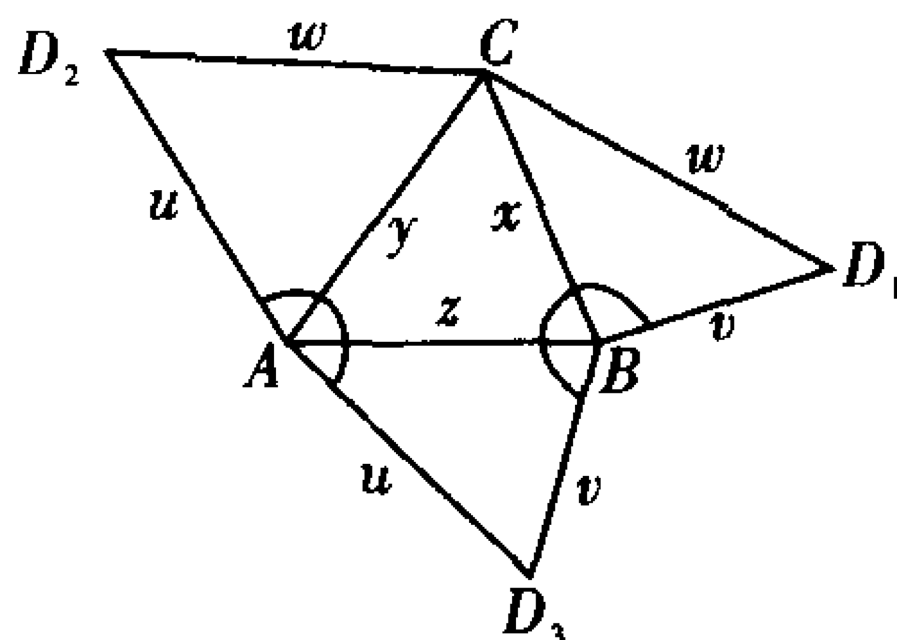
$\therefore 2\cos\beta+1>0$，$\cos\beta-1<0$.

故$|PC|^2-|PO|^2<0$，即$|PC|<|PO|$.

8. 设每条棱长如图(a)所示，分两种情况讨论.

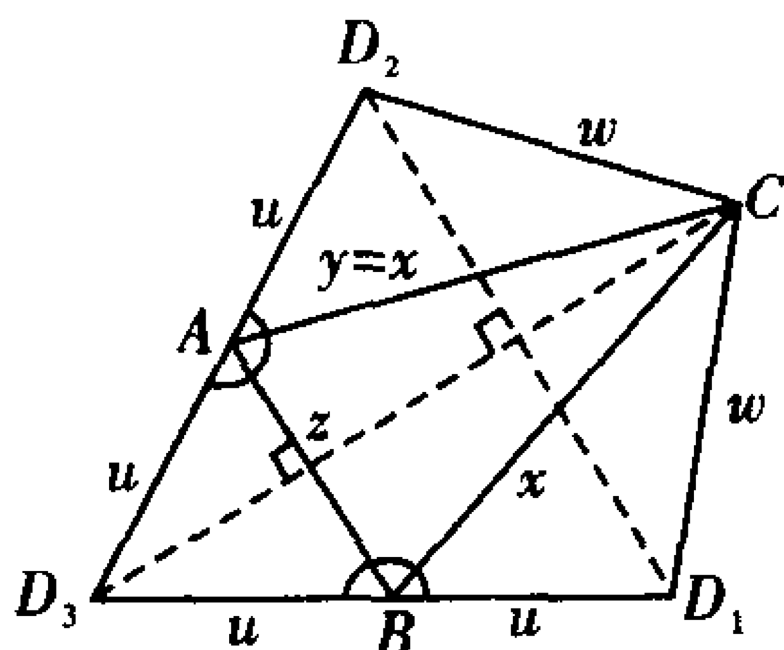


图(a)

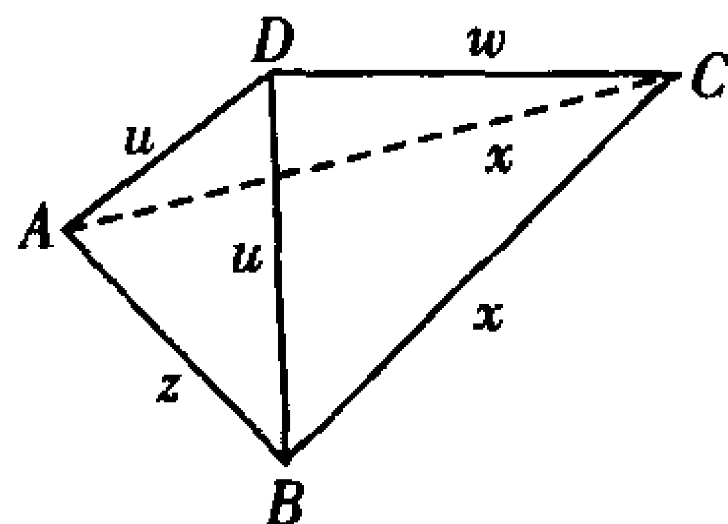


图(b)

(1)若展开图中有一个三角形与其他三个三角形均相邻，如图(b)，由于$\angle D_1$、$\angle D_2$、$\angle D_3$ 不可能是平角，不妨假设$\angle D_2AD_3=\angle D_3BD_1=180°$，故只能是 $u=v$，且 $2u\neq w$，如图(c)，于是有 $y=x$，所得四面体如图(d)，且 $z=\frac{1}{2}D_1D_2<w$.



图(c)



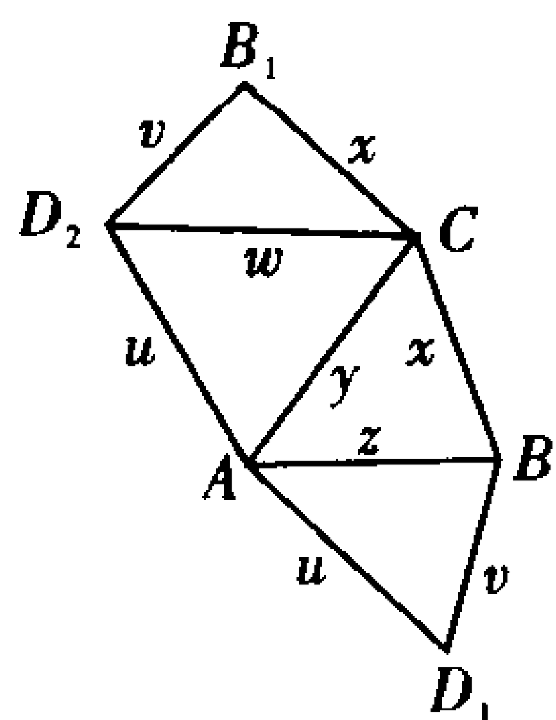
图(d)

(2)若展开图中每一个三角形最多与两个三角形相邻，如图(e)，则$\angle D_1AD_2$、$\angle AD_2B_1$、$\angle D_1BC$、$\angle BCB_1$有可能是平角.

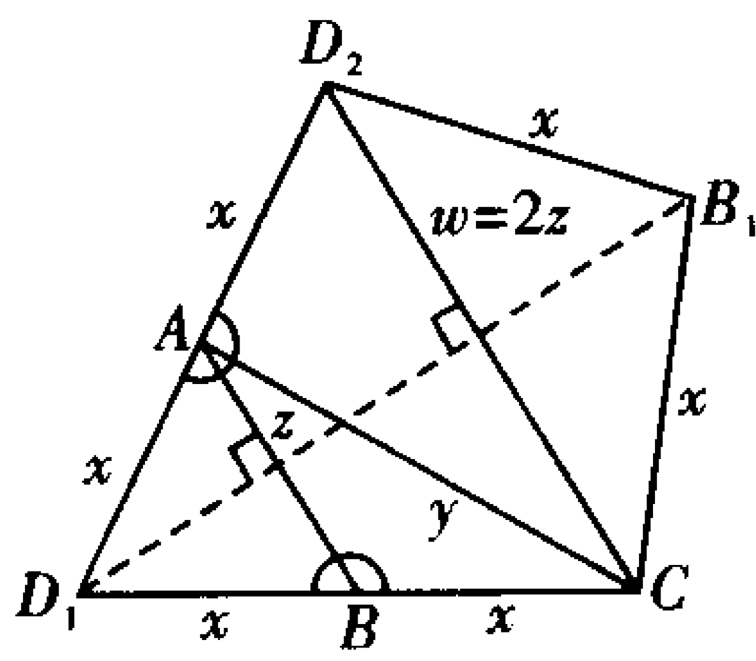
(i)若$\angle D_1AD_2$、$\angle AD_2B_1$是平角，则$2u+v=v$，矛盾.

(ii)若$\angle D_1AD_2$、$\angle BCB_1$是平角，则不可能是满足条件的筝形.

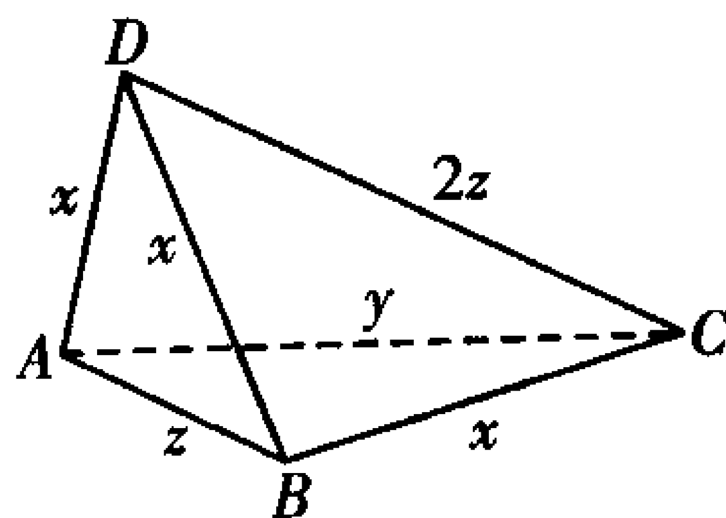
(iii)若$\angle D_1AD_2$、$\angle D_1BC$是平角，由于$x+v>x$，则一定有$2u=x+v$，$x=v$，所以，$x=u=v$，如图(f)，且$w=2z$. 所对应的四面体如图(g).



图(e)



图(f)



图(g)

对于图(d)，六条棱分别为x、x、z、u、u、w，则一定有$x=a$(否则$z=u=w=a$，与$z<w$矛盾). 若$z=u=a$或$u=w=a$，与只有四条棱矛盾，所以只能是$u=a$. 当$x=u$时，四边形AD_3BC是菱形，且$AC/\!/D_3B$，$\angle CAD_2=\angle BD_3A$，则等腰$\triangle CAD_2\cong\triangle BD_3A$. 所以$CD_2=BA$，即$z=w$. 矛盾. 故情况(1)无解.

对于图(g)，只能是$x=a$. 由图(f)，在$\triangle B_1D_2C$中，知$x+x>2z$，即$x>z$. 由于$\triangle ABD_1$是等腰三角形，所以$\angle ABC$是钝角，$y>\max\{x,z\}$，故$y>x>z$. 要使结论成立只能是$2z=a$. 在$\triangle CD_1D_2$中，边D_1D_2上的中线$y=\frac{\sqrt{6}}{2}a$.

因此，有惟一的一个四面体$ABCD$，其中$AD=BD=CD=BC=a$，$AB=\frac{a}{2}$，$AC=\frac{\sqrt{6}}{2}a$.

9. 为了方便起见，我们采用图论的语言，将集会上的每个人用一个点来表示，如果两个人互相认识，则在两个顶点之间连一条边. 于是，一个"$m-$团"对应着一个m个点的集合，每两个顶点之间连一条边. 换句话说，这样一个"$m-$团"存在，就意味着所给图中包含一个有m个点的子图为完全图K_m. 特别地，一个"3－团"对应着一个三角形(K_3). 我们需要证明：

在任意一个图G中，任意两个三角形至少有一个顶点是公共点，且不存在K_5，则存在两个(或更少的)点，移去这些点之后，不再有三角形出现.

设G是满足上述条件的一个图，如果在G中最多有一个三角形，结论显然成立.

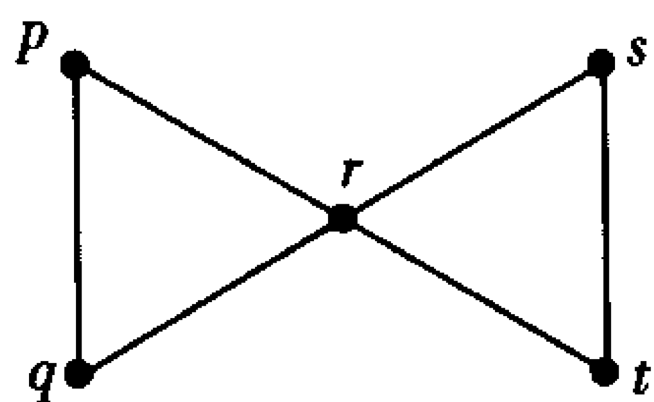
我们分两种情况讨论如图(a)、(b)

(1)设$T_1=\{p,q,r\}$，$T_2=\{r,s,t\}$. 如果删去r，则毁掉了所有的三角形.

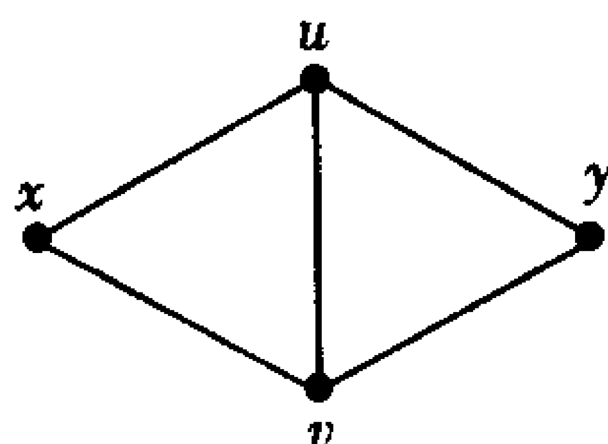
如若不然，有第三个三角形T_3，当删去r后没被毁掉，这个三角形一定与T_1和T_2均有公共点，则这样的三角形转化为情形(2)如图(b1)，且$x=r$，$u\in T_1$，$v\in T_2$.

(2)设$T_1=\{u,v,x\}$，$T_2=\{u,v,y\}$. 如果删去u,v则毁掉了所有的三角形.

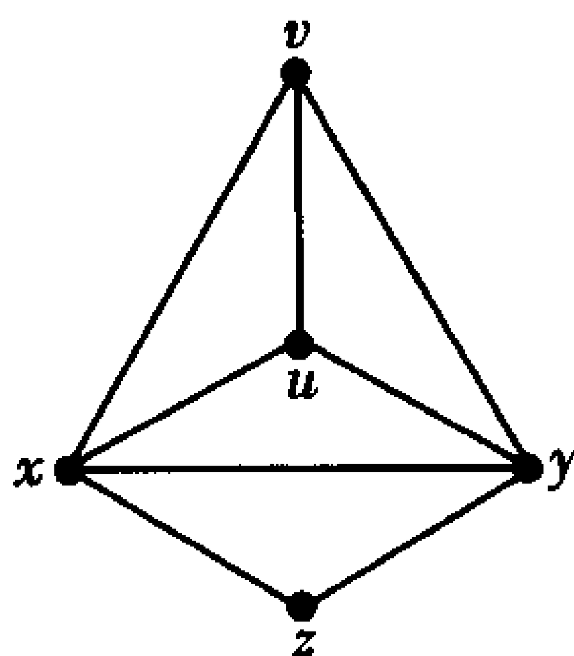
如若不然，则存在某个$z\notin\{u,v,x,y\}$，且三角形$\{x,y,z\}$出现. 特别地，xy是一条边，此时G包含下列子图(如图c). 我们证明删去x,y后，毁掉了所有的三角形.



图(a)



图(b)



图(c)

假设没有全毁掉，则存在一个三角形 T 与 $\{x,y\}$ 无公共点. 因为 T 与 $\{x,y,z\}$ 有一个公共点，则 T 包含 z. 同理 T 也包含 u 和 v. 于是 $T=\{z,u,v\}$. 又因为 G 中没有 K_5，矛盾. 所以，存在两个(或更少的)点，移去之后不再有三角形出现.

第6章　设想法

A组

1. 填 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 理由：

设三边按递增顺序排列为 a,aq,aq^2，其中 $a>0,q\geqslant 1$. 则 $a+aq>aq^2$，即 $q^2-q-1<0$. 解得 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 由 $q\geqslant 1$ 知 q 的取值范围是 $1\leqslant q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

设三边按递减顺序排列为 a,aq,aq^2，其中 $a>0,0<q<1$，则 $aq^2+aq>a$，即 $q^2+q-1>0$. 解得 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<1$.

综上所述，$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

2. (1)不妨设 $a=\max\{a,b,c\}$. 由题设知

$a>0,b+c=2-a,bc=\frac{4}{a}$.

因此，b、c 是一元二次方程 $x^2-(2-a)x+\frac{4}{a}=0$ 的两实根，于是，

$\Delta=(2-a)^2-4\times\frac{4}{a}\geqslant 0\Leftrightarrow a^3-4a^2+4a-16\geqslant 0$

$\Leftrightarrow(a^2+4)(a-4)\geqslant 0\Leftrightarrow a\geqslant 4$.

又 $a=4,b=c=-1$ 时满足题意，故所求的最小值为 4.

(2)由 $abc=4>0$ 知 a、b、c 均大于 0 或一正二负.

若 a、b、c 均大于 0，则 a、b、c 都属于区间 $(0,2)$，这与(1)的结论矛盾. 故 a、b、c 只能一正二负.

由对称性，不妨设 $a>0,b<0,c<0$. 于是，

$|a|+|b|+|c|=a-(b+c)=a-(2-a)=2a-2\geqslant 2\times 4-2=6$.

当 $a=4,b=c=-1$ 时，等号成立.

所以，$|a|+|b|+|c|$ 的最小值为 6.

3. 设 $B(y_1^2-4,y_1)$，$C(y^2-4,y)$. 显然，$y_1^2-4\neq 0$. 故 $k_{AB}=\dfrac{y_1-2}{y_1^2-4}=\dfrac{1}{y_1+2}$.

由于 $AB\perp BC$，所以 $k_{BC}=-(y_1+2)$.

从而，$\begin{cases}y-y_1=-(y_1+2)[x-(y_1^2-4)],\\ y^2=x+4.\end{cases}$

消去 x，注意到 $y\neq y_1$ 得

$(2+y_1)(y+y_1)+1=0\Rightarrow y_1^2+(2+y)y_1+(2y+1)=0$.

由 $\Delta\geqslant 0$ 解得 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 4$.

当 $y=0$ 时，点 B 的坐标为 $(-3,-1)$；当 $y=4$ 时，点 B 的坐标为 $(5,-3)$，均满足题意. 故点 C 的纵坐标的取值范围是 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 4$.

4. 记 $f(x)=y$，令 $x=\dfrac{1-t}{1+t}(0\leqslant t<1)$，　①

代入 $f(x)$，可得 $y=\dfrac{t(1-t^2)}{9-t^2}$.　②

假设有正常数 α，则

$$y=\frac{\alpha t(1-t^2)}{\alpha(9-t^2)}\leqslant\frac{(\alpha^2+t^2)(1-t^2)}{2\alpha(9-t^2)}$$

$$=\frac{\alpha^2+(1-\alpha^2)t^2-t^4}{2\alpha(9-t^2)}$$

$$=-\frac{1}{2\alpha}\left[(9-t^2)+\frac{8(9+\alpha^2)}{9-t^2}\right]+\frac{17+\alpha^2}{2\alpha}$$

$$\leqslant-\frac{1}{2\alpha}\cdot 2\sqrt{8(9+\alpha^2)}+\frac{17+\alpha^2}{2\alpha}$$

$$=\frac{17+\alpha^2-4\sqrt{2(9+\alpha^2)}}{2\alpha}\text{(定值)}.\quad ③$$

以上 y 取最大值的条件是：

$$\begin{cases}t=\alpha,\\ 9-t^2=\dfrac{8(9+\alpha^2)}{9-t^2}\end{cases}(\alpha>0,t\in[0,1)).$$

解出 $t=\alpha=2\sqrt{2}-\sqrt{5}$，代入①与③(或②)得：

当 $x=\dfrac{1+\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$ 时，函数 $y=f(x)$ 取最大值 $\dfrac{1}{3}(8\sqrt{2}-5\sqrt{5})$.

5. 若 $x_1>1$，设 $x_1'=1$，$x'_n=x_n+x_1-1$，其余的 x_i 值不变，则有

$x'_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x'_n=2003$

$f(n)=n(x_1+x_n)=n(1+x'_n)$

因此，不妨设 $x_1=1$.

当 $n=2$ 时，$f(n)=2\times 2003=4006$.

当 $n\geqslant 3$ 时，由于 $x_2<x_3<\cdots<x_n$，

所以 $x_{n-1}\leqslant x_n-1,\cdots,x_2\leqslant x_n-(n-2)$.

所以 $(n-1)x_n-[1+2+\cdots+(n-2)]\geqslant x_2+\cdots+x_n=2002$.

即$(n-1)x_n-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\geqslant 2002$.

所以 $x_n\geqslant\frac{1}{2}(n-2)+\frac{2002}{n-1}$

所以 $f(n)=n(1+x_n)=n+nx_n$

$$\geqslant n+\frac{1}{2}n(n-2)+\frac{2002n}{n-1}.$$

$$=\frac{1}{2}n^2+\frac{2002n}{n-1}.$$

记 $g(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{2002n}{n-1}$,考察 $g(n)$的增减性,则有

$$g(n+1)-g(n)=\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{2002(n+1)}{n}-\frac{1}{2}n^2-\frac{2002n}{n-1}=\frac{1}{2}(2n+1)-\frac{2002}{n(n-1)}.$$

若 $g(n+1)\geqslant g(n)$,即有

$(2n+1)n(n-1)\geqslant 4004$.

因为当 $n=12$ 时,$25\times 12\times 11=3300<4004$.

当 $n=13$ 时,$27\times 13\times 12=4212>4004$.

所以当 $n\leqslant 12$ 时,$g(n)$单调递减,当 $n=13$ 时,$g(n)$单调上升.

又 $g(12)=2256$,$g(13)=2253+\frac{1}{3}$,

所以 $f(n)\geqslant g(n)\geqslant 2253+\frac{1}{3}$.

所以 $f(n)\geqslant 2254$.

又因为当 $n=12$ 时,取 $x_1=1,x_2=177,x_3=178,\cdots,x_{12}=187,n(x_1+x_2)=2256$.

当 $n=13$ 时,取 $x_1=1,x_2=161,x_3=162,\cdots,x_{12}=171,x_{13}=174,n(x_1+x_n)=2275$.

当 $n=14$ 时,取 $x_1=1,x_2=148,x_3=149,\cdots,x_{14}=160,n(x_1+x_n)=14\times 161=2254$.

所以 $f(n)=n(x_1+x_n)$的最小值是 2254,此时 $n=14,x_1=1,x_2=148,x_3=149,\cdots,x_{14}=160$.

6.(1)假设存在正整数数列$\{a_n\}$满足条件.

因为 $a_{n+1}^2\geqslant 2a_na_{n+2}$,$a_n>0$,所以

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{a_n-2}\leqslant\frac{1}{2^2}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{a^2}{a_1}(n=3,4,\cdots).$$

又$\frac{a_2}{a_1}\leqslant\frac{1}{2^{2-2}}\cdot\frac{a_2}{a_1}$,所以有$\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{a_2}{a_1}$对 $n=2,3,4,\cdots$成立.于是

$$a_n\leqslant\left(\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{a_2}{a_1}\right)a_{n-1}\leqslant\frac{1}{2^{(n-2)+(n-3)}}\cdot\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\cdot a_{n-2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^{(n-2)+(n-3)+\cdots+1}}\cdot\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{n-2}\cdot a_2,$$

所以 $a_n\leqslant\left(\frac{a_2^2}{2^{n-2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{1}{a_1^{n-2}}$.

设 $a_2^2\in[2^k,2^{k+1})$,$k\in\mathbf{N}_+$,取 $N=k+3$,则有

$$a_N\leqslant\left(\frac{a_2^2}{2^{N-2}}\right)^{\frac{N-1}{2}}\cdot\frac{1}{a_1^{N-2}}<\left(\frac{2^{k+1}}{2^{k+1}}\right)^{\frac{k+2}{2}}\cdot\frac{1}{a_1^{k+1}}\leqslant 1.$$

这与 a_N 是正整数矛盾.

所以不存在正整数数列$\{a_n\}$满足条件.

(2)$a_n=\frac{\pi}{2^{(n-1)(n-2)}}$就是满足条件一个无理数数列，此时有 $a_{n+1}^2=4a_na_{n+2}\geqslant 2a_na_{n+2}$.

7. 假设$\{x_i\}$满足条件，那么，

$\sum_{k=1}^{n}kx_k=a,\sum_{k=1}^{n}k^3x_k=a^2,\sum_{k=1}^{n}k^5x_k=a^3$.

由柯西不等式得

$aa^3=(\sum_{k=1}^{n}kx_k)(\sum_{k=1}^{n}k^5x_k)\geqslant(\sum_{k=1}^{n}k^3x_k)^2=(a^2)^2=a^4$.

因此，上述不等式等号成立. 故应有：

(1)若 x_k 均不为 0，那么，$\frac{1}{k^4}=\frac{kx_k}{k^5x_k}$为常数. 由于 k 是变化的，这显然不可能.

(2)若 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$中有 0，不妨记 $x_1=0$. 那么，

$\sum_{k=2}^{n}kx_k=a,\sum_{k=2}^{n}k^3x_k=a^2,\sum_{k=2}^{n}k^5x_k=a^3$.

对于上述三个条件，再次利用柯西不等式，同样地分析得知 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 中有 0.

重复上述步骤，递归地得到结论：$\{x_k\}$中至多有一个非零. 设其为 x_i($x_i\neq 0$，i 可以取 $1,2,\cdots,n$). 那么，

$ix_i=a,i^3x_i=a^2,i^5x_i=a^3$.

从而，$i^3=a$.

可见，a 的所有可能的值是 $1,2^2,3^2,\cdots,n^2$.

8. 不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，则

$x_2-x_1\geqslant m,x_3-x_2\geqslant m,\cdots,x_n-x_{n-1}\geqslant m$.

于是，$x_j-x_i\geqslant(j-i)m(1\leqslant i<j\leqslant n)$.

故 $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2\geqslant m^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i-j)^2=m^2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$=\frac{m^2}{6}\sum_{k=1}^{n-1}[2k(k+1)(k+2)-3k(k+1)]=\frac{m^2}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(12C_{k+2}^3-6C_{k+1}^2)$

$=m^2(2\sum_{k=1}^{n-1}C_{k+2}^3-\sum_{k=1}^{n-1}C_{k+1}^2)=m^2(2C_{n+2}^4-C_{n+1}^3)$

$=\frac{1}{12}m^2n^2(n^2-1)$.

另一方面，由 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，得

$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}(x_i-x_j)^2=n-1-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=n-(\sum_{k=1}^{n}x_k)^2\leqslant n$.

所以，$\frac{1}{12}m^2n^2(n^2-1)\leqslant n$.

故 $m\leqslant\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}$.

当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 成等差数列，且$\sum_{k=1}^{n}x_k=0$ 时，上式等号成立.

因此，$m_{\max}=\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}$.

9. 易知点 $A(1,1),B(1,-1)$均在曲线上.

设椭圆的对称中心为(a,b)，则点$A'(2a-1,2b-1)$，$B'(2a-1,2b+1)$均在曲线上. 故有

$$17(2a-1)^2-16(2a-1)(2b-1)+4(2b-1)^2-34(2a-1)+16(2b-1)+13=0, \quad ①$$

$$17(2a-1)^2-16(2a-1)(2b+1)+4(2b+1)^2-34(2a-1)+16(2b+1)+13=0. \quad ②$$

①－②化简得，$b=2a-2$. 代入①并化简得

$4a^2-8x+4=0$.

解得$a=1$，从而，$b=0$.

故对称中心为$(1,0)$.

又对称轴经过对称中心，故可设对称轴方程为$y=k(x-1)$. 设点$A(1,1)$关于直线$y=k(x-1)$的对称点为$A_0(x_0,y_0)$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{y_0+1}{2}=k\left(\dfrac{x_0+1}{2}-1\right)\\ \dfrac{y_0-1}{x_0-1}=-\dfrac{1}{k}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{1+2k+k^2}{1+k^2},\\ y_0=\dfrac{k^2-1}{1+k^2}.\end{cases} \quad ③$$

又A_0在曲线上，则有

$17x_0^2-16x_0y_0+4y_0^2-34x_0+16y_0+13=0$.

将③代入上式并化简得

$k(8k^2-13k-8)=0$.

$k=0$不合题意，故

$$8k^2-13k-8=0\Rightarrow k=\frac{13\pm5\sqrt{17}}{16}.$$

因此，对称轴方程为$y=\dfrac{13\pm5\sqrt{17}}{16}(x-1)$.

10. 设$T(x_0,y_0)$为椭圆上的任一点，则$|BT|^2=x_0^2+(y_0+b)^2=a^2-\dfrac{a^2}{b^2}y_0^2+(y_0+b)^2=-\dfrac{c^2}{b^2}\left(y_0-\dfrac{b^3}{c^2}\right)^2+\dfrac{a^4}{c^2}(|y_0|\leqslant b)$.

当$\dfrac{b^3}{c^2}\geqslant b$，即$b\geqslant c$，亦即$0<e\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$|BT|^2$（从而$|BT|$）随$y_0$的增大而增大. 此时$M$、$N$必然关于$y$轴对称，其中点$P$的轨迹为椭圆的短轴（端点除外）.

当$\dfrac{b^3}{c^2}<b$，即$b<c$，亦即$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<e<1$时，由$|BT|^2$的表达式知，$|BM|=|BN|$当且仅当M、N的纵坐标y_1、y_2满足

$$y_1=y_2(-b<y_1=y_2<b)\text{或}\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{b^3}{c^2}\left(\frac{2b^3}{c^2}-b\leqslant y_1、y_2\leqslant b\right).$$

故点P的轨迹是两条互相垂直的线段（除去端点），其方程为$x=0(|y|<b)$或$y=\dfrac{b^3}{c^2}\left(|x|<\dfrac{a^2}{c^2}\sqrt{c^2-b^2}\right)$.

11. 设这12个点分别为$P_1,P_2,\cdots,P_{12}$，这12个点确定的三角形共有C_{12}^3个. 设以$P_i(i=1,2,\cdots,12)$为始点的向量数为x_i，$0\leqslant x_i\leqslant 11$. 若以某3点为顶点的三角形为“非零三角形”，则有且仅有1点是此三角形两边向量的始点，所以，以P_i为顶点之一且为两边始点的“非零三角形”有$C_{x_i}^2$个

(规定 $C_1^2=C_0^2=0$). 从而,以这些点为顶点的三角形中,"非零三角形"的总数为$\sum_{i=1}^{12}C_{x_i}^2$. 因此,"零三角形"的个数为

$$C_{12}^3-\sum_{i=1}^{12}C_{x_i}^2.$$

先求$\sum_{i=1}^{12}C_{x_i}^2$ 的最小值.

因为$\sum_{i=1}^{12}x_i=C_{12}^2=66$,所以,

$$\sum_{i=1}^{12}C_{x_i}^2=\sum_{i=1}^{12}\frac{x_i(x_i-1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{12}(x_i^2-x_i)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{12}x_i^2-33.$$

因非负整数 x_i 不超过 11,故$\sum_{i=1}^{12}x_i^2$ 有最小值.

若存在 $1\leqslant i、j\leqslant 12(i\neq j)$,使得 $x_i-x_j\geqslant 2$,可记

$x'_i=x_i-1,x'_j=x_j'+1$.

显然 $x_i>x_i'\geqslant x_j'>x_j$,则

$x_i^2+x_j^2-(x_i'^2+x_j'^2)=x_i^2+x_j^2-(x_i-1)^2-(x_j+1)^2=2(x_i-x_j-1)>0$,

又 $x_i\in\mathbf{N}$,则对于所有的 $1\leqslant i、j\leqslant 12$,只有当$|x_i-x_j|=0$ 或 1 时,$\sum_{i=1}^{12}x_i^2$ 才取最小值,即当

$\{x_1,x_2,\cdots,x_{12}\}=\{5,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6\}$时,$\sum_{i=1}^{12}x_i^2$ 取最小值 $5^2\times6+6^2\times6=366$.

所以,$\sum_{i=1}^{12}C_{x_i}^2$ 的最小值为$\frac{1}{2}\times366-33=150$.

因此,"零三角形"个数的最大值为

$C_{12}^3-150=70$.

注 此题中,因为 $x_i\in\mathbf{N}$,所以,不能用均值不等式求$\sum_{i=1}^{12}x_i^2$ 的最小值,故此最小值不为$\frac{6^2}{12}=363$.

B组

1. (1)对于 $n\geqslant2$,设 $f(n)=k$,则 S 中有 k 个元素,且 $1=a_1<a_2<\cdots<a_k=n$,故 $a_2=a_1+a_1=2$, $a_3=a_1+a_2$ 或 a_2+a_2. 于是,$a_3=3$ 或 4,即 $a_3\leqslant2^2$.

假设 $a_i\leqslant2^{i-1}$,则 $a_{i+1}=a_r+a_s\leqslant2a_i\leqslant2^i$.

所以,$n=a_k\leqslant2^{k-1}$. 故 $k\geqslant1+\log_2n\geqslant1+[\log_2n]$.

(2)由(1)可知,若 S 中有 k 个元素,则 $n\leqslant2^{k-1}$.

所以,$f(2^{k-1}+1)\geqslant k+1,f(2^{k-1}+2)\geqslant k+1$.

当 $k\geqslant3$ 时,对于集合 $S_1=\{1,2,2^2,\cdots,2^{k-1},2^{k-1}+1\}$和集合 $S_2=\{1,2,2^2,\cdots,2^{k-1}2^{k-1}+2\}$均有 $k+1$ 个元素,且满足条件,所以,

$f(2^{k-1}+1)=f(2^{k-1}+2)=k+1$.

2. 设 $g(x)=f(x)-x$,则原函数方程化为 $xg\left(x+\frac{1}{y}\right)+yg(y)=yg\left(y+\frac{1}{x}\right)+xg(x)$.

令 $y=1$,可得 $xg(x+1)+g(1)=g\left(1+\frac{1}{x}\right)+xg(x)$.

用$\frac{1}{x}$代替x，得$\frac{1}{x}g\left(1+\frac{1}{x}\right)+g(1)=g(x+1)+\frac{1}{x}g\left(\frac{1}{x}\right)$.

故$g\left(1+\frac{1}{x}\right)=xg(x+1)+g\left(\frac{1}{x}\right)-xg(1)$.

消去$g\left(1+\frac{1}{x}\right)$，得$xg(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)=(x+1)g(1)$.

同理，令$y=-1$，可得

$xg(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)=g(-1)(x-1)$.

于是，有

$2xg(x)=[g(1)+g(-1)]x+[g(1)-g(-1)]$.

则$f(x)=A+\frac{B}{x}+x$，其中A、B为任意常数.

经验证，$f(x)$满足原函方程.

3. 令$y_i=\frac{1}{1+x_i}$，$i=1,2,\cdots,5$，则$x_i=\frac{1-y_i}{y_i}$，$i=1,2,\cdots,5$，且$\sum_{i=1}^{5}y_i=1$. 于是，

$$\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i}{4+x_i^2}\leqslant 1\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{5}\frac{-y_i^2+y_i}{5y_i^2-2y_i+1}\leqslant 1\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{5}\frac{-5y_i^2+5y_i}{5y_i^2-2y_i+1}\leqslant 5$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{5}\left(-1+\frac{3y_i+1}{5y_i^2-2y_i+1}\right)\leqslant 5\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{5}\frac{3y_i+1}{5\left(y_i-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}\leqslant 10.$$

而$\sum_{i=1}^{5}\frac{3y_i+1}{5\left(y_i-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}\leqslant\sum_{i=1}^{5}\frac{3y_i+1}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}\sum_{i=1}^{5}(3y_i+1)=\frac{5}{4}\times(3+5)=10$，

故命题成立.

4. 设这三根木棒的长度分别为a_1，a_2和a_3，不妨假设$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$，又设$a_1=n+p$，$a_2=n+q$，$a_3=n+r$，则$p\leqslant q\leqslant r$. 如果$r\geqslant n-1$，可以将$a_3$切成长度分别为$n$和$r$的2段，则对于长度为$a_1$、$a_2$及$r$的3段木棒继续以上过程，若一直是这种情况，则可以得到满足条件的切法. 因此，不妨假设$r<n-1$，于是，$p\leqslant q\leqslant r<n-1$.

将a_3切成长度为n和r的2段，a_1切成长度为$n-1$和$p+1$的2段，则$p+1\neq n$，$r\neq n$，$r\neq n-1$，$n\neq n-1$. 若$p+1=n-1$，则$n-2=p\leqslant q\leqslant r<n-1$，即$p=q=r=n-2$. 但是，$3(2n-2)=\frac{n(n+1)}{2}$无正整数解，矛盾. 若$r\neq p+1$，则将$a_1$和$a_3$各切成2段，这4段互不相等，于是可将$a_2$切成满足条件的$n-4$段. 若$r=p+1$，将$r$切成2段其长度分别为1、$p$. 若$p\neq 1$，则将$a_1$和$a_3$共切为5段，长度分别为$n$、$n-1$、$p+1$、$p$、1，且互不相等，于是可将$a_2$切成满足条件的$n-5$段；若$p=1$，则$a_1=n+1$，$a_2=n+1$和$a_3=n+2$或$a_1=n+1$，$a_2=n+2$和$a_3=n+2$. 于是，有$3n+4=\frac{n(n+1)}{2}$或$3n+5=\frac{n(n+1)}{2}$，这两个方程均无整数解，故原命题成立.

5. 假设集合A中包含m个元素，设为$a_1,a_2,\cdots,a_m$，且满足$0<a_1<a_2<\cdots<a_m$，$m>n$. 设$S=a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}$，

$P=(S-a_1)(S-a_2)\cdots(S-a_{n+1})$，则$S-a_k(k=1,2,\cdots,n+1)$属于$B$. 再设

$$\alpha_1=\frac{P}{S-a_1},\alpha_2=\frac{P}{S-a_2},\cdots,\alpha_{n+1}=\frac{P}{S-a_{n+1}},$$

$$\alpha_k=\frac{P(S-a_1-a_{n+1}+a_k)}{(S-a_n)(S-a_{n+1})},k=n+2,\cdots,m,$$

$$\alpha_{m+1}=\frac{P(S-a_1-a_n+a_m)}{(S-a_n)(S-a_{n+1})}.$$

则 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,m+1)$ 均为 B 中的 n 个不同元素的积. 因此,α_i 均属于 A,且满足

$$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{n+1}<\alpha_{n+2}<\cdots<\alpha_m<\alpha_{m+1},$$

与 A 中有 m 个元素矛盾. 所以,A 中最多有 n 个元素. 从而,可知 A 中有 n 个元素.

若 $b_1,b_2,\cdots,b_{n+1}\in B$,且满足 $0<b_1<b_2<\cdots<b_{n+1}$,设 $\Pi=b_1b_2\cdots b_{n+1}$,则 $\frac{\Pi}{b_k}(k=1,2,\cdots,n+1)$ 属于 A,且满足 $0<\frac{\Pi}{b_{n+1}}<\frac{\Pi}{b_n}<\cdots<\frac{\Pi}{b_1}$,矛盾.

因此,A 和 B 中均有 n 个元素,所求最大值为 $2n$.

取 $A=\{1,2,\cdots,n\}$,

$B=\left\{1,2,\cdots,n-2,\frac{n(n+1)}{2},\frac{2(n-1)}{(n+1)!}\right\}$,可知 $2n$ 是可以得到的.

6. 不妨设 $a<b<c$,于是,7 个数中 $a+b-c$ 最小,而 $a+b+c$ 最大. 从而有

$d=(a+b+c)-(a+b-c)=2c$.

问题化为求 c 的最大可能值.

$\because a+b-c>0$,

$\therefore c<a+b<a+c<b+c$.

又 $\because a+b$、$a+c$、$b+c$ 中有 1 个数为 800,

$\therefore c<800$.

由于 $799=17\times47$ 和 798 都不是质数,而 797 为质数,故有

$c\leqslant797,d\geqslant1594$.

另一方面,当 $a+b=800$ 时,注意到

$a=5,b=795$,

$a=7,b=793=13\times61$,

$a=11,b=789=3\times263$,

都不全是质数,从而不能满足题中要求.

而 $a=13,b=787$ 都是质数,这时 $a+b-c=3$,$a+c-b=23$ 也都是质数. 容易验证,$b+c-a=1571$ 和 $a+b+c=1597$ 也都是质数.

综上可知,d 的最大可能值为 1594.

7. 当 $x^2\geqslant a_1(a_1-1)$ 时,由 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant1$ 可得 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i|x|}\right)^2=\frac{1}{4x^2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2\leqslant\frac{1}{4x^2}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}$.

当 $x^2<a_1(a_1-1)$ 时,由柯西不等式得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}.$$

对于正整数 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，有 $a_{i+1}\geqslant a_i+1$，$i=1,2,\cdots,n-1$，且

$$\frac{2a_i}{(a_i^2+x^2)^2}\leqslant\frac{2a_i}{\left(a_i^2+x^2+\frac{1}{4}\right)^2-a_i^2}=\frac{2a_i}{\left(\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)\left(\left(a_i+\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}-\frac{1}{\left(a_i+\frac{1}{2}\right)^2+x^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}-\frac{1}{\left(a_{i+1}-\frac{1}{2}\right)^2+x^2},$$

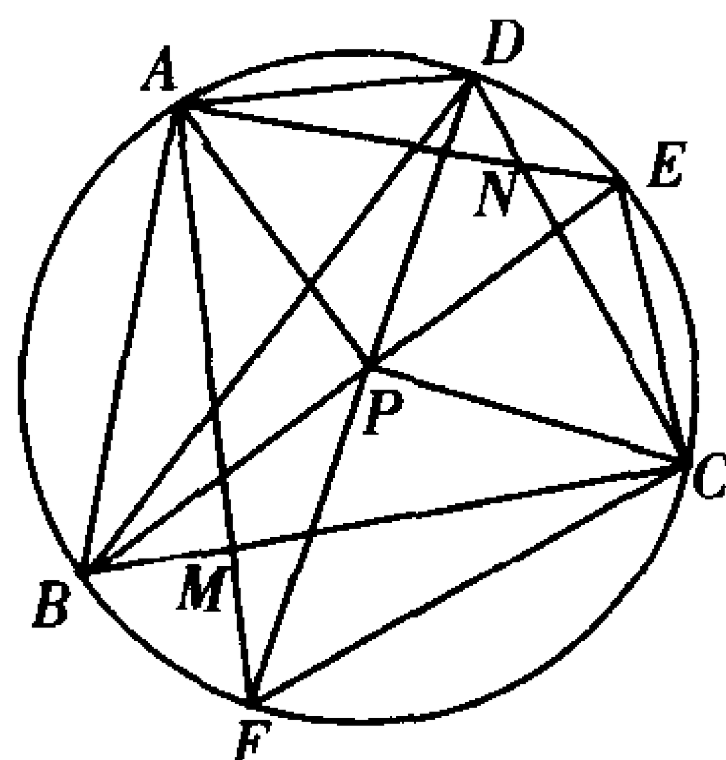
$(i=1,2,\cdots,n-1)$

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}-\frac{1}{\left(a_{i+1}-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\right]\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}.$$

8. 如图(a)，不妨设 P 在$\triangle ABC$ 和$\triangle BCD$ 内部.

如果 $ABCD$ 内接于圆，延长 BP、DP 分别交圆于 E、F，连 AF，CF，AE，CE.



图(a)

易知 $AF=BC$，$AE=CD$，又因为在同一个圆内，所以，整个图形是轴对称图形，对称轴为 M、P、N 三点所在直线，

$\therefore PA=PC$.

反之，如图(b)，设 $AP=CP$. 设$\triangle BCP$ 的外接圆分别交直线 CD、DP 于点 X 和 Y. 因为$\angle ADB=\angle PDX$，$\angle ABD=\angle PBC=\angle PXC$，故

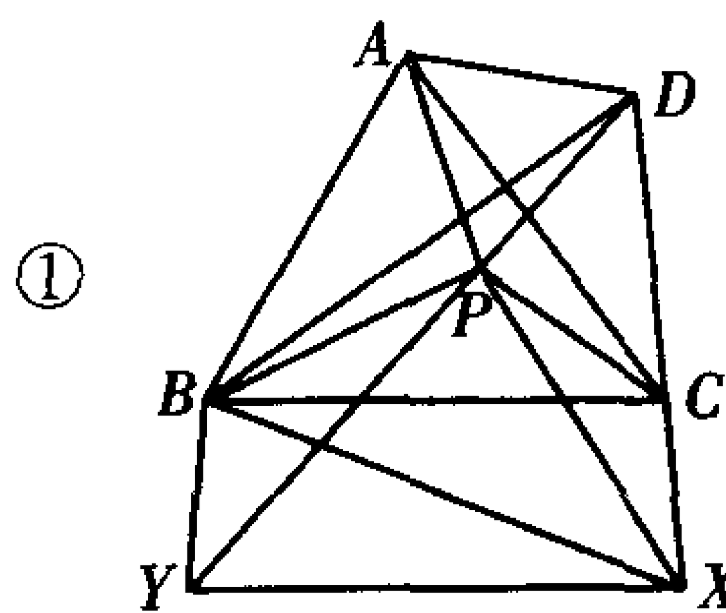
$\triangle ADB\backsim\triangle PDX$.

从而，$\frac{AD}{PD}=\frac{BD}{XD}$.

又因为$\angle ADP=\angle ADB+\angle BDP=\angle PDX+\angle BDP=\angle BDX$，

故$\triangle ADP\backsim\triangle BDX$.

因此，$\frac{BX}{AP}=\frac{BD}{AD}=\frac{XD}{PD}$. ①



图(b)

因为 P、C、X、Y 四点共圆，故

$\angle DPC=\angle DXY$，

$\angle DCP=\angle DYZ$，

从而，$\triangle DPC\backsim\triangle DZY$. 由此，得$\frac{YZ}{CP}=\frac{ZD}{PD}$.

由 $AP=CP$. 由式①和式②得 $BZ=YZ$. 因此，

$\angle DCB=\angle XYB=\angle XBY=\angle XPY=\angle PDX+\angle PXD=\angle ADB+\angle ABD=180^\circ-\angle BAD$.

所以，四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形.

9. 由题意可知，R 和 P、Q 之一为三次多项式，假设 R 和 Q 为三次多项式，P 为二次多项式，如有必要，可以通过改变符号，使得 R 和 Q 的 x^3 项的系数为正. 于是，$R+Q$ 为三次多项式. 由 $P^2=R^2-$

$Q^2=(R+Q)(R-Q)$知$R-Q$为一次多项式，即$R-Q=t(x-x_1)$，$t>0$(因为P^2中的x^4项的系数为正).于是，P^2可被$(x-x_1)^2$整除.

因而$R+Q$可被$x-x_1$整除.又由于$R-Q$可被$x-x_1$整除，

所以，R和Q都被$x-x_1$整除，

即有$R=(x-x_1)R_1$，$Q=(x-x_1)Q_1$，

其中R_1和Q_1都是首项系数为正的二次多项式.

设$P=a(x-x_1)(x-x_2)$，则由等式

$a^2(x-x_2)^2=(R_1+Q_1)(R_1-Q_1)$推知

$R_1-Q_1=t>0$，其中t为常数.

于是，$R_1=Q_1+t$，

故$a^2(x-x_2)^2=(2Q_1+t)t$，

即$Q_1=\frac{a^2}{2t}(x-x_2)^2-\frac{t}{2}$是具有二实根的二次多项式.所以，$Q$为具有三个实根的三次多项式.

10. 假设$\frac{1}{n}$的十进制小数表达式中开始循环之前的部分A由m位数字构成，而(最小)循环节B由k位数字构成，由等比数列求和公式得

$$\frac{1}{n}=\frac{A}{10^m}+\frac{B}{10^m(10^k-1)}=\frac{A(10^k-1)+B}{10^m(10^k-1)}.$$

于是，有$n\mid 10^m(10^k-1)$.

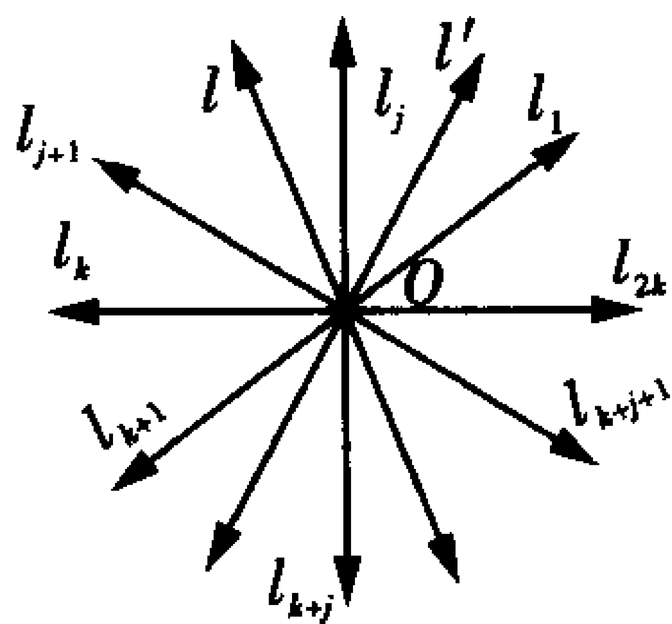
反之，如果m和k是使得关系$n\mid 10^m(10^k-1)$成立的最小正整数(即m是可以整除n的2和5的最大方幂的指数，而k是使得$\frac{n}{(n,10^m)}\mid(10^k-1)$成立的最小的正整数)，记

$$C=\frac{10^m(10^k-1)}{n},A=\left[\frac{C}{10^k-1}\right],$$

$$B=C-A(10^k-1).$$

则有$B<10^k-1$，$A<10^m$，并且$\frac{1}{n}$的十进制小数表达式中开始循环之前的部分就是A(包括在其前面添加一些0，使其达到m位数字)，而(最小)循环节就是B(类似地添加0)，此因m和k都是按照最小原则选取的.

11. 对两条平行且同方向的有向直线，$A_1,A_2,\cdots,A_8$的射影次序一定相同.所以，只要讨论通过一定点O的所有有向直线即可.



若所取的有向直线与某两点的连线垂直，则该两点的射影必重合，所以不产生相应的排列.不然，$A_1,A_2,\cdots,A_8$的射影必两两不重合，因此，对应地有一个排列.

设通过点O且与某两点连线垂直的所有直线的数目为k.显见，$k\leqslant C_8^2=28$.由此产生$2k$条有向直线，依逆时针方向排列，设它们依次是$l_1,l_2,\cdots,l_{2k}$，如图.

对任意一条有向直线l(不同于$l_1,\cdots,l_{2k}$)一定存在两条相邻的有向直线l_j,l_{j+1}，使得l_j,l,l_{j+1}按逆时针方向排列.显见，对取定的j，由这样的l所得到的相应排列必相同.

若对不同地$l_1,\cdots,l_{2k}$的两条有向直线l、l'，不存在j，使得l_j、l、l_{j+1}及l_j、l'、l_{j+1}都满足上一段叙

述中所说的要求，则必有 j，使 l'、l_j、l 按逆时针方向排列，设 l_j 垂直于 A_{j_1} 和 A_{j_2} 的连线，显见点 A_{j_1} 和 A_j 在有向直线 l、l' 上的射影的次序一定不同，相应得到的排列必不同.

如上所述，不同的排列数为 $2k$，注意到，$k=C_8^2$ 是可以取到的，所以，$N_8=56$.

12. 设 (a,b) 为满足条件的解.

因 $k=\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}>0$，有 $2ab^2-b^3+1>0$，即 $a>\dfrac{b}{2}-\dfrac{1}{2b^2}$.

因此，$a\geqslant\dfrac{b}{2}$.

由 $k\geqslant1$，即 $a^2\geqslant b^2(2a-b)+1$，则 $a^2>b^2(2a-b)\geqslant0$.

因此，$a>b$，或 $2a=b$. ①

假设 a_1、a_2 为 $a^2-2kb^2a+k(b^3-1)=0$ 的两个解，对固定的正整数 k 和 b，假设其中之一为整数. 由于 $a_1+a_2=2kb^2$，则另一个也为整数.

不妨设 $a_1\geqslant a_2$，则 $a_1\geqslant kb^2>0$.

又由 $a_1a_2=k(b^3-1)$，则 $0\leqslant a_2=\dfrac{k(b^3-1)}{a_1}\leqslant\dfrac{k(b^3-1)}{kb^2}<b$.

结合①得到 $a_2=0$ 或 $a_2=\dfrac{b}{2}$（b 必为偶数）.

如果 $a_2=0$，则 $b^3-1=0$. 因此，$a_1=2k$，$b=1$.

如果 $a_2=\dfrac{b}{2}$，则 $k=\dfrac{b^2}{4}$. $a_1=\dfrac{b^4}{2}-\dfrac{b}{2}$.

从而，所有可能的解为

$(a,b)=(2l,1)$ 或 $(l,2l)$ 或 $(8l^4-l,2l)$，其中 l 为某个正整数.

验证可知，所有这些数对满足题设条件.

13. 由前两个方程得 $x^2-y^2=p(y-x)$，即 $(x-y)(x+y+p)=0$.

同理可得 $(x-z)(x+z+p)=0$.

因此，方程组的解只有两种可能的形式 (u,u,u) 或 $(u,u,-p-u)$.

(1)若 (u,u,u) 是原方程组的解，则 $u^2-1=2pu$. 从而，$u=p\pm\sqrt{p^2+1}$，原方程有 2 组解.

(2)若 $(u,u,-p-u)$ 是原方程组的解，则有 $u^2-1=-p^2$，当 $|p|=1$ 时，$u=0$；当 $|p|<1$ 时，有 $u=\pm\sqrt{1-p^2}$.

综上所述，若 $|p|>1$，有 2 组解 $(p\pm\sqrt{p^2+1},p\pm\sqrt{p^2+1},p\pm\sqrt{p^2+1})$；

若 $|p|<1$，且 $|p|\neq\dfrac{2}{\sqrt5}$，有 8 组解，(1)中的 2 组解及 $(\pm\sqrt{1-p^2},\pm\sqrt{1-p^2},-p\mp\sqrt{1-p^2})$ 和其轮换；

若 $|p|=1$，有 5 组解，(1)中的 2 组解及 $(0,0,-p)$ 和其轮换；

若 $p=\dfrac{2}{\sqrt5}$，有 5 组解，(1)中的 2 组解及 $(\sqrt{1-p^2},\sqrt{1-p^2},-p-\sqrt{1-p^2})$ 和其轮换；

若 $p=-\dfrac{2}{\sqrt5}$，有 5 组解，(1)中的 2 组解及 $(-\sqrt{1-p^2},-\sqrt{1-p^2},-p+\sqrt{1-p^2})$ 和其轮换.

14. 因为 $(x_5)^2+(y^4)_5$，可以被 5 整除又因 $2xy^2$ 除以 5 的余数为 4，即 $5|(2xy^2-4)$，则 $y=5k\pm1$ 或 $5k\pm2$，此时 $y_5=5k$.

若 $y=5k\pm1$，由 $5\mid(y^2-1)$，得 $5\mid(2x-4)$，即 $5\mid(x-2)$. 设 $x=5n+2$，得 $x_5=5n$. 由于 $5\mid(y^2-1)$，所以，$5\mid(y^4-1)$，$(y^4)_5=y^4-1$. 于是原方程化为

$(5n)^2+(y^4-1)=2(5n+2)y^2+51$，

$(y^2-5n)^2-4y^2=52$，

$(y^2-5n-2y)(y^2-5n+2y)=52$.

由于左端两式之差为 $4y$，所以，52 只能分解为 2 和 26 或 -2 和 -26. 故 $y=\pm6$. 若 $6^2-5n-12=2$，无解；若 $6^2-5n-12=-26$，则 $n=10$. 此时 $x=52$，$y=\pm6$.

若 $y=5k\pm2$，由 $5\mid(y^2+1)$，得 $5\mid(-2x-4)$，即 $5\mid(x+2)$. 设 $x=5n-2$，得 $x_5=5n$. 由于 $5\mid(y^2+1)$，所以，$5\mid(y^4-1)$，$(y^4)_5=y^4-1$. 于是原方程化为

$(5n)^2+(y^4-1)=2(5n-2)y^2+51$，

$(y^2-5n)^2+4y^2=52$.

由于 $4y^2\leqslant52$，且 $y=5k\pm2$，则 $y=\pm2$ 或 ±3.

若 $y=\pm2$，则 $n=2$，$x=8$；

若 $y=\pm3$，则 $n=1$，$x=3$.

综上所述，共有 6 组解：$(52,6)$、$(52,-6)$、$(8,2)$、$(8,-2)$、$(3,3)$、$(3,-3)$.

15. 假设存在正整数 N，满足 $N=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2$，$2N=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是正整数，且对于所有 α、β、γ、δ，当 $\alpha\neq\beta$、$\gamma\neq\delta$ 时，$\frac{a_\alpha}{a_\beta}$、$\frac{a_\alpha}{b_\delta}$、$\frac{b_\gamma}{a_\beta}$、$\frac{b_\gamma}{b_\delta}$ 都不是 2 的整数次幂(包括 $2^0=1$).

下面证明：对于每一个整数 $p>\sum\limits_{k=0}^{4N-2}(2kN+1)^2$，均能表示为若干个不同的完全平方数之和.

设 $p=4Nq+r$，其中 $0\leqslant r\leqslant4N-1$，因为 $r\equiv\sum\limits_{k=0}^{r-1}(2kN+1)^2\pmod{4N}$，且 $\sum\limits_{k=0}^{r-1}(2kN+1)^2<p$，所以当 $r\geqslant1$ 时，存在正整数 t，使得

$p=\sum\limits_{k=0}^{r-1}(2kN+1)^2+4Nt$.

当 $r=0$ 时，$p=4Nt$，此时 $t=q$. 设 $t=\sum\limits_i 2^{2u_i}+\sum\limits_j 2^{2v_j+1}$，

则 $4Nt=4N\sum\limits_i 2^{2u_i}+4N\sum\limits_j 2^{2v_j+1}=\sum\limits_{i,\alpha}(2^{u_i+1}+a_\alpha)^2+\sum\limits_{i,\gamma}(2^{v_j+1}b_\gamma)^2$，

所以，

$$p=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{r-1}(2kN+1)^2 4Nt, r\geqslant1;\\ 4Nt, r=0.\end{cases}$$

容易验证，上式所有完全平方数互不相同.

最后证明正整数 N 存在. 因为

$29=2^2+5^2$，$58=3^2+7^2$，

所以 $N=29$.

16. (1)存在. 设 $\{c_i\}$ 是任意正数列，且满足 $c_i\geqslant c_{i+1}$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}c_i<+\infty$，又设整数列 $\{k_m\}$ 满足 $1=k_1<k_2<k_3<\cdots$，且 $(k_{m+1}-k_m)c_{k_m}\geqslant1$.

定义数列 $\{a_i\}$、$\{b_i\}$ 如下：

当 n 为奇数，且 $k_n\leqslant i<k_{n+1}$ 时，定义 $a_i=c_{k_n}$，$b_i=c_i$，则

$A_{k_{n+1}}-1=A_{k_n-1}+(k_{n+1}-k_n)c_{k_n}\geqslant A_{k_n-1}+1.$

当 n 为偶数，且 $k_n\leqslant i<k_{n+1}$ 时，定义 $a_i=c_i,b_i=c_{k_n}$，则

$B_{k_{n+1}-1}\geqslant B_{k_n-1}+1.$

于是，数列 $\{A_n\}$、$\{B_n\}$ 无界，且 $c_i=\min\{a_i,b_i\}$.

(2)假设结论不改变.若只有有限个 i 满足 $b_i=c_i$，则存在一个足够大的 I，使得当 $i\geqslant I$ 时，有 $c_i=a_i$，所以，$\sum\limits_{i\geqslant I}c_i=\sum\limits_{i\geqslant I}a_i=+\infty$ 矛盾.

若有无穷多个 i 满足 $b_i=c_i$，设整数列 $\{k_m\}$ 满足 $k_{m+1}\geqslant 2k_m$，且 $b_{k_m}=c_{k_m}$，由于数列 $\{c_i\}$ 也单调下降，所以，有

$$\sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}}c_k\geqslant(k_{i+1}-k_i)c_{k_{i+1}}=(k_{i+1}-k_i)\frac{1}{k_{i+1}}\geqslant\frac{1}{2}.$$

于是，$\sum\limits_{i=1}^{+\infty}c_i=+\infty$. 矛盾.

综上所述，(1)的结论改变.

17. $n=4$ 时，若 P_1,P_2,P_3,P_4 不是凸四边形的顶点，不妨假设 P_4 在 $\triangle P_1P_2P_3$ 的内部，则 $a_1=a_2=a_3=0,a_4=1$，所以 $m(S)=1$.

假设 P_1,P_2,P_3,P_4 是一个凸四边形的顶点，如果 $\angle P_1+\angle P_3>180°$，则 $\angle P_2+\angle P_4<180°$. 所以，

$a_1=a_3=1,a_2=a_4=0,m(S)=2.$

同理，如果 $\angle P_1+\angle P_3<180°$，则 $\angle P_2+P_4>180°$，所以，

$a_1=a_3=0,a_2=a_4=1,m(S)=2.$

下面考虑一般的情形.

数 $m(S)$ 是对所有满足条件的点对 $(P_1,P_iP_jP_k)$ 计数，其中 $(P_t,P_iP_jP_k)$ 表示包含 P_t 的圆 $P_iP_jP_k$ 的数目，$1\leqslant t\leqslant n$. 对于 S 中的由四个点构成的每个集合 $\{P_i,P_j,P_k,P_l\}$ 有四种可能，即 $(P_i,P_jP_kP_l)$，$(P_j,P_kP_lP_i)$，$(P_k,P_lP_iP_j)$ 和 $(P_l,P_iP_jP_k)$ 有可能贡献一个 1 到 $m(S)$ 中. 如果这四个点组成一个凸四边形，则这四个点对中恰有两个点对各贡献一个 1 到 $m(S)$ 中，否则这四个点对中只有一个点对贡献一个 1 到 $m(S)$ 中.

如果记 $a(S)$ 和 $b(S)$ 分别为 S 中凸四边形和不能构成凸四边形的四点组的数目，则

$m(S)=2a(S)+b(S).$

又因 $a(S)+b(S)=C_n^4$，

所以，$m(S)=C_n^4+a(S)$.

下面证明 $f(n)=2C_n^4$ 满足条件.

如果 S 中的点是凸 n 边形的顶点，则 $a(S)=C_n^4$. 所以，

$m(S)=2C_n^4=f(n).$

反之，如果 $m(S)=f(n)$，则 $a(S)=C_n^4$. 所以，由 S 中每四个点所确定的四边形均为凸四边形. 因此，S 中的点是凸 n 边形的顶点.

18. 存在.

如果 $a=b=c=1$，则 $m=12$. 令

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}-\frac{12}{a+b+c}=\frac{p(a,b,c)}{abc(a+b+c)},$$

其中 $p(a,b,c)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+a+b+c-9abc$.

假设(x,a,b)是满足 $p(x,a,b)=0$ 的一组解,且 $x<a<b$. 由于 $p(x,a,b)=0$ 是关于 x 的二次方程,所以,$y=\dfrac{ab+1}{x}>b$ 是其另外的一个解.

设 $a_0=a_1=a_2=1$,定义

$$a_{n+2}=\frac{a_na_{n+1}+1}{a_{n-1}}(n\geqslant 1).$$

我们证明下面的结论:

(1)$a_{n-1}\mid(a_na_{n+1}+1)$;

(2)$a_n\mid(a_{n-1}+a_{n+1})$;

(3)$a_{n+1}\mid(a_{n-1}a_n+1)$.

其中 a_{n-1}、a_n、a_{n+1}均为正整数.

当 $n=1$ 时,以上 3 个结论显然成立.

假设 $n=k$ 时以上 3 个结论也成立.

由(1)得 $a_{k-1}\mid(a_ka_{k+1}+1)$,即 a_{k-1}与 a_k 互素,且 $a_{k-1}\mid[(a_ka_{k+1}+1)a_{k+1}+a_{k-1}]$;

由(2)得 $a_k\mid(a_{k-1}+a_{k+1})$,且 $a_k\mid(a_ka_{k+1}^2+a_{k+1}+a_{k-1})$,所以,

$$a_ka_{k-1}\mid(a_ka_{k+1}^2+a_{k+1}+a_{k-1}),$$

即 $$a_k\left|\left(a_{k+1}\frac{a_ka_{k+1}+1}{a_{k-1}}+1\right)\right.=a_{k+1}a_{k+2}+1.$$

于是,当 $n=k+1$ 时(1)也成立.

同理,由于 a_{k-1}与 a_{k+1}也互素,且 $a_{k-1}\mid(a_ka_{k+1}+1+a_ka_{k-1})$,由(3)得 $a_{k+1}\mid(a_{k-1}a_k+1)$,且 $a_{k+1}\mid(a_{k-1}a_k+1+a_ka_{k+1})$. 所以,

$$a_{k-1}a_{k+1}\mid[a_k(a_{k-1}+a_{k+1})+1],$$

即 $$a_{k+1}\left|\left(a_k+\frac{a_ka_{k+1}+1}{a_{k-1}}\right)\right.=a_k+a_{k+2}.$$

于是,当 $n=k+1$ 时(2)也成立.

由 a_{k+2}的定义及(1)知 a_{k+2}是整数,且 $a_{k+2}\mid(a_ka_{k+1}+1)$.

于是,当 $n=k+1$ 时(3)也成立.

从而可得数列$\{a_n\}$,当 $n\geqslant 2$ 时严格递增,且 $p(a_n,a_{n+1},a_{n+2})=0$,即(a_n,a_{n+1},a_{n+2})是原方程的解,$\{a_n\}=\{1,1,1,2,3,7,11,26,41,97,153\cdots\}$.

第 7 章 反证法

A 组

1. 假设 $a(1-b)>\dfrac{1}{4}$,$b(1-c)>\dfrac{1}{4}$,$c(1-a)>\dfrac{1}{4}$,由条件知,$1-a>0$,$1-b>0$,$1-c>0$. 构造特殊式 $t=a(1-b)\cdot b(1-c)\cdot c(1-a)$. 一方面,

$$t\leqslant\left(\frac{a+1-b+b+1-c+c+1-a}{6}\right)^6=\frac{1}{64},$$

另一方面，$t>(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$，矛盾.

故三个数中至少有一个不大于$\frac{1}{4}$.

2. 假设 p 为奇数，则 $a_1-1,a_2-2,\cdots,a_7-7$ 均为奇数，构造特殊式

$t=(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_7-7)$. 一方面，$t=(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(1+2+\cdots+7)=0$，为偶数.

另一方面，由假设 t 等于 7 个奇数的和，应为奇数，矛盾.

故 p 必为偶数.

3. 假设从空间一点至少可以引出 27 条射线，其两两夹角不小于$\frac{\pi}{4}$，构造特殊几何体：

以每条射线为轴，以该点为顶点作母线与轴的夹角为$\frac{\pi}{8}$的圆锥，由假设这些圆锥是不相重叠的，再以该点为球心作一个单位球.

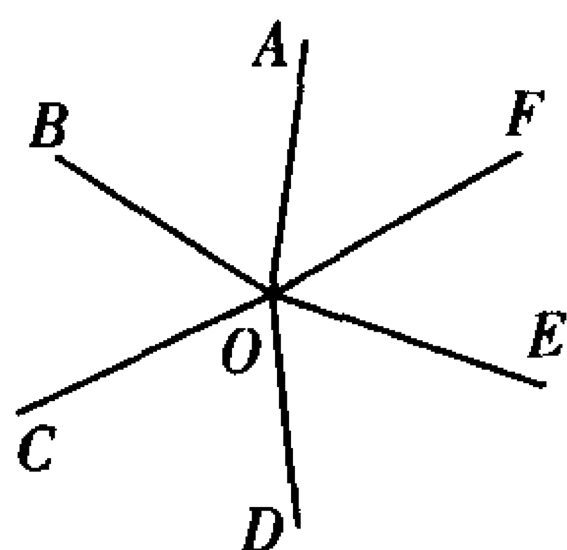
上述圆锥在球面上至少截得 27 个互不重叠的球冠，每一个球冠面积为

$2\pi h=2\pi(1-\cos\frac{\pi}{8})$，

球冠总面积　$S\geqslant 27\cdot 2\pi(1-\cos\frac{\pi}{8})>27\pi(2-1.85)>4\pi$.

另一方面，球面积为 4π，矛盾. 故射线不超过 26 条.

4. 假设有一机场 O 降落的飞机超过 5 架，不妨设为 6 架，它们分别来自 A、B、C、D、E、F 这 6 个机场，构造特殊模型，如图.



∵A 到 O 的距离与 A 到 B 的距离不等，

∴$OA<AB$.

同理　$OB<AB$，

故　在$\triangle ABO$ 中，AB 为最大边，

$\angle AOB$ 大于$\frac{\pi}{3}$.

同理　$\angle BOC,\angle COD,\angle DOE,\angle EOF,\angle FOA$ 都大于$\frac{\pi}{3}$，于是这 6 个角之和大于 2π，这与它们之和为 2π 矛盾，故任一机场降落的飞机都不能超过 5 架.

5. 设完全数等于 $7n(n>4)$，其中 n 不是 7 的倍数. 于是，$7n$ 的所有正约数(包括 $7n$)可以分为形如 d 与 $7d$ 的“数对”，从而 $7n$ 的所有正约数的和(即 $14n$)可被 8 整除，因此 n 是 4 的倍数. 注意到$\frac{7}{2}n,\frac{7}{4}n,n,\frac{n}{2},\frac{n}{4}$和 1 是 $7n$ 的互不相同的正约数，而它们的和等于 $7n+1>7n$，从而 $7n$ 不可能是完全数，导致矛盾.

B组

1. 最少可能有 51 对“好的”邻数.

例如，首先将 1 到 100 按顺时针方向依递增顺序摆放在圆周上，然后分别交换 2 和 3，4 和 5，…，98 和 99 的位置，在所得到的放法 1，3，2，5，4，…，99，98，100 中就恰好含有 51 对"好的"邻数.

(1，3)，(3，2)，(5，4)，(7，6)，…，(97，96)，(99，98)，(98，100).

下面证明"好的"邻数对的个数不少于 51. 为此，先证明：在任意 2 个相交的"对"中，至少有一对是好的.

假设存在相连摆放的 5 个数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，使得 (a_2,a_3) 与 (a_3,a_4) 都不是好的.

不失一般性，可以认为 $a_1>a_2<a_3>a_4>a_5$. 但另一方面，由于数对 (a_3,a_4) 不是好的，所以，必有 $a_1>a_2>a_5$. 又由于 (a_2,a_3) 不是好的，所以，$a_1<a_4<a_5$. 从而，$a_1>a_2>a_5>a_4>a_1$，不可能.

这样一来，好的邻数就至少有 50 对. 若恰好为 50 对，那么，"好的"与"不好的"邻数一定只能是交替出现. 但如果我们考察数 100 两侧的数 $a_{i-2},a_{i-1},100,a_i,a_{i+1}$，那么，易看出数对 (a_i,a_{i+1}) 一定是好的，这是因为 $100(>a_i<a_{i+1})>a_{i+2}<a_{i+3}$. 同理，数对 (a_{i-2},a_{i-1}) 也一定是好的. 这就表明，"好的"与"不好的"邻数对是不会交替出现的.

2. 假设题目的结论不真.

选取 1 条直线 l，使其不与集合 G 中的任何 1 个向量垂直. 于是，G 中至少有 n 个向量在直线 l 上的投影指向同一方向，设它们为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$. 在直线 l 上取定方向，使得这些和向量的投影所指的方向为负. 再在集合 G 中选取 n 个向量 $f_1,f_2,\cdots,f_n$. 使得它们的和在直线 l 上的投影的代数值 s 达到最大. 由题中条件(2)知 $s>0$.

由条件(1)，可以找到 $n-1$ 个向量 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$，使得

$f_1+f_2+\cdots+f_n=-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$.

显然，至少有某一个向量 e_i 不出现在上式右端，不妨设其为 e_1. 从而，$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+e_1$ 的投影为负，且其绝对值大于 s.

再由条件(2)知，又可以找到 N 个向量，使得它们的和等于 $-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+e_1)$，从而，该和的投影代数值大于 s. 此与我们对 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的选取相矛盾.

3. 因为 $2x_{n+1}^2-y_{n+1}^2=2(3x_n+2y_n)^2-(4x_n+3y_n)^2=2x_n^2-y_n^2=\cdots=2x_1^2-y_1^2=2$，即证明方程 $2x^6-y^2=2$ 和 $2x^2-y^6=2$ 均无正整数根.

假设 $2x^6-y^2=2$ 有解，令 $y=2z$，则原方程化为 $(x^3-1)(x^3+1)=2z^2$，其中 $x\geqslant3$，且为奇数. 由于 $x^3=1$ 与 x^3-1 之差为 2，则一定有一项不是 3 的倍数，不妨假设 x^3-1 不是 3 的倍数. 由于 $(x^3-1,x^3+1)=2$，利用 $(x^3-1)(x^3+1)=2z^2$，可得 $x^3-1=at^2$，其中 $a=1$ 或 $a=2$. 由于 $(x-1)(x^2+x+1)=at^2$，且 $(x-1),x^2+x+1)=(x-1,(x+2)(x-1)+3)=(x-1,3)=1$ 及 $x-1$ 是偶数，所以，无论 $a=1$ 或 $a=2$，均存在 t 的因数 t_1，使得 $x^2+x+1=t_1^2$，但是，$x^2<x^2+x+1<(x+1)^2$，矛盾. 假设 x^3+1 不能被 3 整除，同理可得 $x^2-x+1=t_2^2$，当 $x\geqslant3$ 时，$(x-1)^2<x^2-x+1<x^2$，矛盾.

假设 $2x^2-y^6=2$ 有解，令 $y=2z$，则原方程化为 $\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x+1}{2}=(2z^2)^3$，因为 $\left(\frac{x-1}{2},\frac{x+1}{2}\right)=1$，所以有 $\frac{x-1}{2}=z_1^3$，$\frac{x+1}{2}=z_2^3$，于是 $z_2^3-z_1^3=1$，矛盾.

4. 假定存在这样的图，它的每个顶点的度数都大于 2，但该图中的任何一个圈的长度都可被 3 整除. 我们来考察具有这种性质的顶点数目最小的图 G. 显然，该图中存在着长度最小的圈 Z，该圈上的任意两个不相邻的顶点之间没有边相连. 又因每一顶点的度数都大于 2，所以圈 Z 上的每个顶点都有一边与圈外顶点相连. 设圈 Z 依次经过顶点 $A_1,A_2,\cdots,A_{3k}$. 假定存在连结顶点 A_m 和 A_n 的不包

含圈 Z 上的边的路径 S. 我们来分别考察由路么 S 和 Z 的“两半”所组成的圈 Z_1 和 Z_2. 由于这两个圈的长度都可被 3 整除，不难推知路径 S 的长度也可被 3 整除. 特别地，对题目中所给出的图，可知它的任何一个不在 Z 上的顶点 X，都不可能有边与 Z 的两个不同顶点分别相连. 此外，由圈 Z 上的顶点所连出的不在圈上的边，应分别连向各不相同的顶点.

我们来作另外一个图 G_1，把图 G 中圈 Z 上的所有顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_{3k}$ 合并为一个顶点 A，保留所有不在圈 Z 上的顶点及它们之间所连的边，且分别用边将 A 同原来与 Z 上的顶点有边相连的顶点逐一相连，易知 A 的度数 $\geqslant 3k$. 于是，图 G_1 中的顶点数目少于图 G，而每个顶点的度数仍都大于 2. 于是，按照前面所证的结论，图 G_1 中的任何一个圈的长度都可被 3 整除. 这样一来，我们便得出了矛盾：因为如前所言，图 G 是具有这种性质的顶点数目最小的图.

这样一来，在任何所有顶点的度数都大于 2 的图中，必定存在长度不能被 3 整除的圈. 接下来只需把这一断言应用于我们的题目，并以城市作为顶点，以道路作为边即可.

5. 设这 n 个点的集合 $V=\{A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}\}$ 为全集，记 A_i 的所有邻点（与 A_i 有连线段的点）的集合为 B_i，B_i 中点的个数记为 $|B_i|=b_i$，显然. $\sum\limits_{i=0}^{n-1} b_i=2l$ 且 $b_i\leqslant(n-1)$，$i=0,1,2,\cdots,n-1$.

若存在 $b_i=n-1$ 时，只须取

$$l=(n-1)+\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\leqslant\frac{1}{2}(q+1)(n-1)+1=\frac{1}{2}q(q+1)^2+1,$$

则图中必存在四边形. 因此，下面只讨论 $b_i<n-1$，$i=0,1,2,\cdots,n-1$ 的情况.

不妨设 $q+2\leqslant b_0<n-1$.

用反证法，若图中不存在四边形，则当 $i\neq j$ 时，B_i 与 B_j 无公共点对，即 $|B_i\cap B_j|\leqslant 1(0\leqslant i<j\leqslant n-1)$. 因此，

$$|B_i\cap\overline{B_0}|\geqslant b_i-1, i=1,2,\cdots,n-1.$$

故 $V\cap\overline{B_0}$ 中点对的个数 $=C_{n-b_0}^2$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}(B_i\cap\overline{B_0}\text{中点对的个数})=\sum_{i=1}^{n-1}C_{|B_i\cap\overline{B_0}|}^2$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}C_{b_i-1}^2(\text{当 } b_i=1 \text{ 或 } 2 \text{ 时，令 } C_{b_i-1}^2=0)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(b_i^2-3b_i+2)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n-1}b_i)^2}{n-1}-3(\sum_{i=1}^{n-1}b_i)+2(n-1)\right]$$

$$=\frac{1}{2(n-1)}(2l-b_0-n+1)(2l-b_0-2n+2)$$

$$\geqslant\frac{1}{2(n-1)})(nq-q+2-b_0)(nq-q-n+3-b_0).$$

故 $(n-1)(n-b_0)(n-b_0-1)$

$$\geqslant(nq-q+2-b_0)(nq-q-n+3-b_0).$$

即
$$q(q+1)(n-b_0)(n-b_0-1)$$
$$\geqslant(nq-q+2-b_0)(nq-q-n+3-b_0). \quad ①$$

而 $(nq-q-n+3-b_0)-q(n-b_0-1)$

$=(q-1)b_0-n+3$

$$\geqslant (q-1)(q+2)-n+3=0, \quad ②$$

及 $$(nq-q+2-b_0)-(q+1)(n-b_0)$$
$$=qb_0-q-n+2$$
$$\geqslant q(q+2)-q-n+2=1>0. \quad ③$$

由②、③及$(n-b_0(q+1)$，$(n-b_0-1)q$ 皆是正整数，得

$$(nq-q+2-b_0)(nq-q-n+3-b_0)>q(q+1)(n-b_0)(n-b_0-1).$$

而这与所得的式①相矛盾，故原命题成立.

6. 假设存在多项式 $P(x)$、$Q(x)$，使得题目的断言不成立，我们来考察其中的次数最低的 $P(x)$. 分别将 $P(x)$和 $Q(x)$的次数记为 n 和 k. 显然，将多项式乘以非 0 常数后，不影响证明本题，故可设 $P(x)$和 $Q(x)$的首项系数都是 1. 易知 $n\geqslant 1$，因若不然，我们可设 $S(x)=P(x)=1$.

引理 次数 n 能被次数 k 整除.

引理的证明：称$\overline{T(x,y)}$是二元多项式 $T(x,y)$的"老件"，如果$\overline{T(x,y)}$是由 $T(x,y)$中的所有最高次的项构成的多项式(注意：二元多项式中任一项的次数等于 x 的次数与 y 的次数的和). 例如：$T(x,y)=x^3+3x^2y+x-2y^2$，那么，它的"老件"就是$\overline{T(x,y)}=x^3+3x^2y$，易知

$$\overline{T_1(x,y)T_2(x,y)}=\overline{T_1(x,y)}\cdot\overline{T_2(x,y)}.$$

故 $x^n-y^n=\overline{P(x)-P(y)}=\overline{R(x,y)}\cdot\overline{Q(x)-Q(y)}=\overline{R(x,y)}(x^k-y^k)$，

即 x^n-y^n 整除 x^k-y^k.

如果 $n=qk+r$，其中 $0\leqslant r<k$，则有

$$x^n-y^n=x^r(x^{qk}-y^{qk})+y^{qk}(x^r-y^r)$$
$$=x^r(x^k-y^k)(x^{k(q-1)}+x^{k(q-2)}y^k+\cdots+y^{k(q-1)})+y^{qk}(x^r-y^r)$$

从而，$F(x,y)=y^{qk}(x^r-y^r)$整除 x^k-y^k，但是，其 x 的次数小于 k，这当且仅当 $r=0$ 时才有可能.

引理证毕.

下面接着证明原题.

观察多项式 $P_1(x)=P(x)-Q^{\frac{n}{k}}(x)$和 $Q(x)$，它们仍然满足题中条件

$$P_1(x)-P_1(y)=\{R(x,y)-[Q^{\frac{n}{k}-1}(x)+Q^{\frac{n}{k}-2}(x)Q(y)+\cdots+Q^{\frac{n}{k}-1}(y)]\}[Q(x)-Q(y)].$$

然而，$P_1(x)$的次数却低于 $P(x)$的次数，所以，存在某个 $S_1(x)$，使得 $P_1(x)=S_1(Q(x))$. 这样一来，如果令 $S(x)=S_1(x)+x^{\frac{n}{k}}$，那么，就有

$$P(x)=P_1(x)+Q^{\frac{n}{k}}(x)=S(Q(x)).$$

这与我们对 $P(x)$的选取相矛盾.

7. 假设任何两行与任何两列所交成的 4 个方格中都有某两个同色，为方便起见，将 4 种颜色用 1 至 4 编号. 将位于同一列中的两个异色方格称为"对子"，将位于同一列或同一行中的两个同色方格称为"吻合". 将"对子"按所出现的颜色分为 6 种类型：$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{3,4\}$.

观察其中任意两行. 我们来证明在这两行间有不少于 25 个"吻合". 这两行间按同列关系共有 100 对方格，在我们的假设之下，任何两对方格中都有同色的方格，所以在这两行间至多出现 3 种不同类型的"对子". 不难验证，从本质上说，只可能有如下两种情况：或者所有"对子"中都含有 1 号色的方格，或者这 3 种类型为$\{1,2\}$，$\{1,3\}$和$\{2,3\}$. 我们分别考察这两种情况.

在第一种情况下，所有的"对子"都含有 1 号色方格，所以"对子"的数目不多于这两行中 1 号色

方格的总数，即不多于 50. 从而在两行间有不少于 50 个“吻合”.

再看第二种情况，此时所有的“对子”只能为$\{1,2\}$，$\{1,3\}$和$\{2,3\}$这 3 种类型. 此时这两行中的 4 号色方格均与 4 号色方格同列，因此有不少于 25 个“吻合”.

由于上面所说的“两行”是任意选出的，所以我们证得了任何两行间都至少有 25 个“吻合”. 这就表明，在方格表中至少有 $2\cdot C_{100}^2\cdot 25=25\times 99\times 100$“对”同行或同列的同色方格. 但事实上，在每一行、每一列中都恰有每种颜色的方格各 25 个. 因此同行或同列的同色方格对数目应为 $200\cdot C_{25}^2\cdot 4=24\times 100^2$. 由于 $25\times 99>24\times 100$，得出矛盾. 所以，必有某两行、某两列所交成的 4 个方格均两两异色，即分别被染为 4 种不同颜色.

第 8 章　数学归纳法

A 组

1. 当 $n=1$ 时，不等式显然成立. 当 $n=2$ 时，易证不等式成立.

假设 $n=k$ 时，结论成立.

当 $n=k+1$ 时，右边$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k}\cdot\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{1}{4}(a^k+b^k)(a+b)=\frac{1}{4}(a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb)$.

要使上式不大于$\frac{1}{2}(a^{k+1}+b^{k+1})$，中间还有一段距离，经分析如能证明辅助命题：$ab^k+a^kb\leqslant a^{k+1}+b^{k+1}$，则问题可以迅速解决，而这个辅助命题用比较法容易证明，故可证得当 $m=k+1$ 时，命题成立.

2. 当 $n=2$ 时，$a_1\cdot a_2>a_1+a_2-1$ 成立. 假设 $n=k$ 时，$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_k>a_1+a_2+\cdots+a_k+(1-k)$成立. 当 $n=k+1$ 时，则　$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_k\cdot a_{k+1}>[a_1+a_2+\cdots+a_k+(1-k)]\cdot a_{k+1}$.

而$[a_1+a_2+\cdots+a_k+(1-k)]\cdot a_{k+1}-(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}-k)=(a_1+a_2+\cdots+a_k-k)\cdot(a_{k+1}-1)$.

又　$0<a_n<1$，

得　$a_1+a_2+\cdots+a_k-k<0$，

且　$a_{k+1}-1<0$，

即　$(a_1+a_2+\cdots+a_k-k)\cdot(a_{k+1}-1)>0$，

故　$[a_1+a_2+\cdots+a_k+(1-k)]\cdot a_{k+1}>a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}-k$.

由数学归纳法原理可知，命题对 $n\in\mathbf{N}$ 成立.

3. 令 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，则 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ 且 $\cos\theta$、$\sin\theta$ 为有理数.

$z^{2n}=\cos 2n\theta+\mathrm{i}\sin 2n\theta$，从而

$|z^{2n}-1|=\sqrt{(\cos 2n\theta-1)^2+\sin^2 2n\theta}=\sqrt{2-2\cos 2n\theta}=2|\sin n\theta|$.

当 $n=1$ 时，$\cos\theta$、$\sin\theta$ 为有理数，由题设知命题显然成立.

假设 $n=k$ 时，$\cos k\theta$、$\sin k\theta$ 为有理数，

则　$\sin(k+1)\theta=\sin\theta\cos k\theta+\cos\theta\sin k\theta$，

$\cos(k+1)\theta=\cos\theta\cos k\theta-\sin\theta\sin k\theta$.

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时，$\cos(k+1)\theta$、$\sin(k+1)\theta$ 也是有理数，

由数学归纳法原理可 知，对一切 $n\in\mathbf{N}$，$\sin n\theta$ 都是有理数，即 $|z^{2n}-1|$ 是有理数.

4. 由于直接验证 $n=2$ 时比较困难，采用“起点前移”的方法.

考虑 $n=1$ 时，由于三角形没有对角线，且任意两个顶点不同色，从而结论成立.

假设当 $n\leqslant k$ 时，结论成立，考虑 $n=k+1$，对 $2k+3$ 边形的顶点 $A_1,A_2,\cdots,A_{2k+3}$，其中必有一个顶点不妨设为 A_1，使得和它相邻的两个顶点 A_2 和 A_{2k+3} 不同色. 否则，和每一个顶点相邻的两个顶点都同色，但 $2k+3$ 为奇数. 这不可能. 连结 A_2A_{2k+3}，把 $2k+3$ 边形分成 $\triangle A_1A_2A_{2k+3}$ 和 $2k+2$ 边形 $A_2A_3\cdots A_{2k+3}$ 对 $2k+2$ 边形 $A_2A_3\cdots A_{2k+3}$ 有：

①如果在顶点 $A_2,A_3,\cdots,A_{2k+3}$ 中，恒有 a_{i-1} 与 a_{i+1} 同色，则这些顶点被间隔地染上了两种颜色. 且它们和 A_1 不同色，从而连接 $A_1A_3,A_1A_4,\cdots,A_1A_{2k+3}$，就把 $2k+3$ 边形分成了 $2k+1$ 个三角形，且其中的每一条对角线的端点不同色.

②顶点 $A_2,A_3,\cdots,A_{2k+3}$ 中存在一顶点不妨设为 A_3，和它相邻的两个顶点 A_2、A_4 不同色，连接 A_2、A_4，对 $2k+1$ 边形 $A_2A_4\cdots A_{2k+3}$，利用归纳假设，它可分成若干个三角形，其中对角线端点不同色，再加上 $\triangle A_1A_{2A2k+3}$ 和 $\triangle A_2A_3A_4$，便知对 $2k+3$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2k+3}$ 也是如此.

综上由数学归纳法原理，结论对一切自然数成立.

5. 直接由 $n=k$ 证 $n=k+1$ 难！根据题目的结构特征，加大跨度，增加验证起点，然后由假设 $n=k$ 成立，推论 $n=k+2$ 时成立即可.

当 $n=1$ 时，左边 $=x+\dfrac{1}{x}\geqslant\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2=1+1$ 成立.

当 $n=2$ 时，左边 $=x^2+x^0+x^{-2}\geqslant\sqrt{x^2\cdot x^{-2}}+1=2+1$ 成立.

假设 $n=k$ 时，命题成立，而

$x^k+x^{k-2}+\cdots+\dfrac{1}{x^{k-2}}+\dfrac{1}{x^k}\geqslant k+1$，

当 $n=k+2$ 时，

$x^{k+2}+(x^k+x^{k-2}+\cdots+\dfrac{1}{x^{k-2}}+\dfrac{1}{x^k})+\dfrac{1}{x^{k+2}}\geqslant x^{k+2}+\dfrac{1}{x^{k+2}}+k+1\geqslant 2+k+1=(k+2)+1.$

命题成立.

由数学归纳法原理可知，命题对 $n\in\mathbf{N}$ 成立.

6. 因 $a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$，

则 $a_{n+1}\leqslant a_n(1-a_n)$. ①

又 $a_n>0$，

则 $0<a_n<1(n\in\mathbf{N})$. ②

当 $n=1$ 时，由②知命题成立. 假设 $n=k$ 时，命题成立，现要证：

$a_k<\dfrac{1}{k}\Rightarrow a_{k+1}<\dfrac{1}{k+1}$.

由①式只需证 $a_k(1-a_k)<\dfrac{1}{k+1}$.

鉴于 a_k 的不确定性，需分类讨论.

(1)当 $0<a_k\leqslant\dfrac{1}{k+1}$ 时，

$a_{k+1}\leqslant a_k(1-a_k)<a_k<\frac{1}{k+1}$;

(2)当$\frac{1}{k+1}<a_k\leqslant\frac{1}{k}$时,

$a_{k+1}\leqslant a_k(1-a_k)<\frac{1}{k}(1-\frac{1}{k+1})=\frac{1}{k+1}$.

由数学归纳法原理可知:$a_n<\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N})$成立.

7. 由题设知 $a_1>1$,若设 $a_k>1$,则很难由递推公式 $a_{k+1}=\frac{1}{a_k}+a$ 推出 $a_{k+1}>1$. 因为这里 a_k 出现在分母上. 为了得到 $a_{k+1}>1$,应知道 a_k 小于某个数值,而这一点恰恰无法从归纳假设 $a_k>1$ 中得到,为了解决这个困难,我们来证明"对一切 $n\in\mathbf{N}$,有 $1<a_n<\frac{1}{1-a}$",这显然是一个比,"$a_n>1$"还要强的命题,但证明却容易得多!

当 $n=1$ 时,$a_1=1+a=\frac{1-a^2}{1-a}<\frac{1}{1-a}$,命题成立.

假设 $n=k$ 时,有 $1<a_k<\frac{1}{1-a}$,则 $n=k+1$ 时,$a_{k+1}=\frac{1}{a_k}+a>\frac{1}{\frac{1}{1-a}}+a=1-a+a=1$,

同时,

$a_{k+1}=\frac{1}{a_k}+a<1+a=\frac{1-a^2}{1-a}<\frac{1}{1-a}$.

即　$n=k+1$ 时,结论成立.

故对一切 $n\in\mathbf{N}$,有 $1<a_n<\frac{1}{1-a}$.

8. 设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}$,

则

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{n+1-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{1}{2}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{2^{n-2}}\right)+\frac{1}{2n}\left(\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{2^{n-2}}\right)$$

$$=\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2n}a_n=\frac{n+1}{2n}a_n+\frac{n+1}{n}.$$

由　$a_2=2,a_3=3,a_4=\frac{10}{3},a_5=\frac{10}{3}$,猜想:$a_n\leqslant\frac{10}{3}$.

由 $a_2=2,a_3=3,a_4=\frac{10}{3},a_5=\frac{10}{3}$,易知 $a_k\leqslant\frac{10}{3}(2\leqslant k\leqslant5)$成立.

设 $a_k\leqslant\frac{10}{3}(k\geqslant5)$.

则 $a_{k+1}=\frac{k+1}{2k}\cdot a_k+\frac{k+1}{k}\leqslant\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{10}{3}+\frac{k+1}{k}=\frac{8}{3}(1+\frac{1}{k})\leqslant\frac{8}{3}(1+\frac{1}{5})<\frac{10}{3}$.

即　$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}\leqslant\frac{10}{3}<4$.

9. 由 $n=k$ 成立推 $n=k+1$ 成立时很困难,即由 $1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2$,很难得到 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+$

$\frac{1}{(k+1)^2}<2$. 由此考虑加强命题.

求证：$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}(n\geqslant 2)$.　　(*)

事实上，当 $n=2$ 时，命题显然成立.

假设 $n=k\geqslant 2$ 时，$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$ 成立，那么 $1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=2-\frac{1}{k+1}$.

故由数学归纳法原理知不等式(*)成立，从而原不等式成立.

10. $n=1$ 时，$a^{2n+1}+b^{2n+1}=a^3+a^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，结论成立，假设 $n=k$ 时结论成立，即 $(a+b)\mid(a^{2k+1}+b^{2k+1})$，此时不妨设 $a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)M, M\in\mathbf{Z}$，当 $n=k+1$ 时，$a^{2(k+1)+1}+b^{2(k+1)+1}=a^{2k+3}+b^{2k+3}=a^{2k+3}-a^{2k+1}\cdot b^2+a^{2k+1}\cdot b^2+b^{2k+3}=a^{2k+1}(a^2-b^2)+b^2(a^{2k+1}+b^{2k+1})=(a+b)[a^{2k+1}(a-b)+b^2M]$，从而 $(a+b)\mid(a^{2(k+1)+1}+b^{2(2k+1)+1})$. 综上，由数学归纳法原理知结论成立.

11. 由已知易得 $-\frac{1}{2}<a_3-\frac{49}{2}\leqslant\frac{1}{2}, a_3=25$；$-\frac{1}{2}<a_4-\frac{625}{7}\leqslant\frac{1}{2}, a_4=89$；从而 $a_3=3a_2+2a_1$，$a_4=3a_3+2a_2$，于是猜测有 $a_n=3a_{n-1}+2a_{n-2}(n>2)$(*). 显然当 $n=3$ 时，(*)式成立且 $a_3>0$，设 $3\leqslant n\leqslant k$ 时，(*)式成立且 $a_n>0$，则 $k=3$ 时，$\left|\frac{2a_{k-2}}{a_{k-1}}\right|=\left|\frac{2a_1}{a_2}\right|<1$；$k>3$ 时，$a_{k-2}>0, a_{k-3}>0, a_{k-1}=3a_{k-2}+2a_{k-3}>2a_{k-2}$，从而 $\left|\frac{2a_{k-2}}{a_{k-1}}\right|<1$.

又 $\left|\frac{a_k^2}{a_{k-1}}\right|=\frac{a_k(3a_{k-1}+2a_{k-2})}{a_{k-1}}=3a_k+2a_{k-1}-\frac{2(a_{k-1}^2-a_ka_{k-2})}{a_{k-1}}=3a_k+2a_{k-1}-\frac{2a^{k-2}}{a_{k-1}}\cdot\frac{a_{k-1}^2-a_k\cdot a_{k-2}}{a_{k-2}}$，所以 $\left|(3a_k+2a_{k-1})-\frac{a_k^2}{a_{k-1}}\right|=\left|\frac{2a_{k-2}}{a_{k-1}}\right|\cdot\left|a_k-\frac{a_{k-1}^2}{a_{k-2}}\right|<\frac{1}{2}$，根据 a_{k+1} 的定义，$a_{k+1}=3a_k+2a_{k-1}$，因此，由数学归纳法原理对一切 $n\geqslant 3$(*)式成立且 $a_n>0$.

从(*)式可看出，a_n 与 a_{n-1} 的奇偶性相同($n>2$)，因此，一切 $a_n(n>2)$ 都与 $a_2=7$ 的奇偶相同，从而 $a_n(n\geqslant 2)$ 都是奇数.

12. 当 $n=3$ 时，$a_3=\frac{3-1}{3}a_1=-\frac{2}{3}=(-1)^3\cdot\frac{2!!}{3!!}$，命题成立. 当 $n=4$ 时，$a_4=\frac{4-1}{4}a_2=\frac{3}{8}=(-1)^4\cdot\frac{3!!}{4!!}$，命题亦成立. 设 $n=k$ 时，$a_k=(-1)^k\cdot\frac{(k-1)!!}{k!!}$ 成立，则 $n=k+2$ 时，$a_{k+2}=\frac{(k+2)-1}{k+2}a_k=\frac{k+1}{k+2}(-1)^k\cdot\frac{(k-1)!!}{k!!}=(-1)^{k+2}\cdot\frac{(k+1)!!}{(k+2)!!}$ 由此知 $n=k+2$ 时命题成立，由数学归纳法原理，当 $n\geqslant 3$ 时，原命题成立.

13. $a_1=r, a_2=pr+r^2, a_3=p^2r+pr^2+r^3$，由此猜测 $a_n=p^{n-1}\cdot r+p^{n-2}\cdot r^2+\cdots+pr^{n-1}+r^n$. (*)当 $n=1$ 时，$a_1=p^0r=r$，(*)式成立，假设当 $n=k$ 时，(*)式成立，则当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=pa_k+r^{k+1}=p(p^{k-1}\cdot r+p^{k-2}\cdot r^2+\cdots+pr^{k-1}+r^k)+r^{k+1}=p^k\cdot r+p^{k-1}\cdot r^2+\cdots+p^2\cdot r^{k-1}+p\cdot r^k+r^{k+1}$，从而(*)式也成立. 由数学归纳法原理，知对于 $n\in\mathbf{N}$，有 $a_n=p^{n-1}\cdot r+p^{n-2}\cdot r^2+\cdots+pr^{n-1}+r^n=\frac{r(p^n-r^n)}{p-r}$.

14. 设 $N=\overline{x_1x_2\cdots x_k}$，$x_k\in\{1,3,4\}$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$. 假设 $a>4$，删去 x_1 时，则当 x_1 依次取 1，3，4 时，$x_2+x_3+\cdots+x_k$ 分别等于 $n-1,n-3,n-4$，故当 $n>4$ 时，$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}$①，先用数学归纳法证明下式成立：$a_{2n+1}=a_{2n}+a_{2n-1}$②，因 $a_1=a_2=1,a_3=2$，故当 $n=1$ 时②式成立，假设 $n=k$ 时②式成立，即 $a_{2k-1}=a_{2k}+a_{2k-1}$，则据①，$a_{2k+3}=a_{2k+2}+a_{2k}+a_{2k-1}=a_{2(k+1)}+a_{2(k+1)-1}$，可见②对于 $k+1$ 成立，由数学归纳法原理知②对于一切 $n\in\mathbf{N}$ 成立.

再用数学归纳法证明 $a_{2n}\cdot a_{2n+2}=a_{2n+1}^2$③成立. 因 $a_2=1,a_3=2,a_4=4$，故当 $n=1$ 时③式成立，即 $a_{2k}\cdot a_{2k+2}=a_{2k+1}^2$，根据①、②，$a_{2k+2}\cdot a_{2k+4}=a_{2k+2}(a_{2k+3}+a_{2k+1}+a_{2k})=a_{2k+2}\cdot a_{2k+3}+a_{2k+2}\cdot a_{2k+1}+a_{2k+1}^2=a_{2k+2}\cdot a_{2k+3}+a_{2k+1}\cdot a_{2k+3}=a_{2k+3}^2$，可见③对 $k+1$ 成立，由数学归纳法原理，故③对一切 $n\in\mathbf{N}$ 成立.

最后再用数学归纳法证明本题结论：显然 $n=1$ 时结论成立. 设 a_{2k} 是完全平方数，则由③知 a_{2k+2} 是完全平方数，由数学归纳法原理知结论对任意非零自然数 n 成立.

B组

1. 令 $A_n=5^{2n-1},B_n=7^{2n},C_n=9^{2n-1},D_n=11^{2n}(n\in\mathbf{Z}^+)$.

(1)当 $n=1$ 时，有 $A_1=5,B_1=49,C_1=9,D_1=121$，所以

A_1 除以 8 余 5；B_1 除以 8 余 1；C_1 除以 8 余 1；D_1 除以 8 余 1.

(2)假定 $n=k(k\in\mathbf{Z}^+)$时，有

A_k 除以 8 余 5，即 $A_k=5^{2k-1}=8S_1+5(S_1\in\mathbf{Z}^+)$；

$B_k=7^{2k}$除以 8 余 1，即 $B_k=7^{2k}=8S_2+1(S_2\in\mathbf{Z}^+)$；

$C_k=9^{2k-1}$除以 8 余 1，即 $C_k=9^{2k-1}=8S_3+1(S_3\in\mathbf{Z}^+)$；

$D_k=11^{2k}$除以 8 余 1，即 $D_k=11^{2k}=8S_4+1(S_4\in\mathbf{Z}^+)$；

当 $n=k+1$ 时，有

$A_{k+1}=5^{2(k+1)-1}=5^{(2k-1)+2}=25\cdot5^{2k-1}=25(8S_1+5)=8(25S_1+15)+5$；

$B_{k+1}=7^{2(k+1)}=49\cdot7^{2k}=49(8S_2+1)=8(49S_2+6)+1$；

$C_{k+1}=9^{2(k+1)-1}=9^{(2k-1)+2}=81\cdot9^{2k-1}=81(8S_3+1)=8(81S_3+10)+1$；

$D_{k+1}=11^{2(k+1)}=121\cdot11^{2k}=121(8S_4+1)=8(121S_4+15)+1$.

因 $25S_1+15,49S_2+6,81S_3+10,121S_4+15$ 都是正整数，所以 A_{k+1}除以 8 余 5，B_{k+1}除以 8 余 1，C_{k+1}、D_{k+1}除以 8 也分别余 1.

由数学归纳法知，对于任意的 $n\in\mathbf{Z}^+$，有

$A_n=5^{2n-1}$除以 8 余 5，即 $5^{2n-1}=8S_1+5(S_1\in\mathbf{Z}^+)$； ①

$B_n=7^{2n}$除以 8 余 1，即 $7^{2n}=8S_2+1(S_1\in\mathbf{Z}^+)$； ②

$C_n=9^{2n-1}$除以 8 余 1，即 $9^{2n-1}=8S_3+1(S_3\in\mathbf{Z}^+)$； ③

$D_n=11^{2n}$除以 8 余 1，即 $11^{2n}=8S_4+1(S_4\in\mathbf{Z}^+)$. ④

在①、②中取 $n=1001$，有

$5^{2001}=8S_1+5$；$7^{2002}=8S_2+1$；

在③、④中取 $n=1002$，有

$9^{2003}=8S_3+1$；$11^{2004}=8S_4+1$.

所以 $M=5^{2001}+7^{2002}+9^{2003}+11^{2004}$

$=(8S_1+5)+(8S_2+1)+(8S_3+1)+(8S_4+1)$

$=8(S_1+S_2+S_3+S_4+1+1)$.

因为$(S_1+S_2+S_3+S_4+1)\in\mathbf{Z}^+$,

所以M能被8整除.

2. 若$0\in B$,由(3)知对所有$x\in B$,$0+x\in A$,所以,$B\subset A$. 又由(1)知$A=\mathbf{Z}$. 由(2)知对$\forall x\in A$,$x-1\in B$,所有,$B=\mathbf{Z}$.

若$0\notin B$,由(1)知,$0\in A$. 由(2)知,$-1\in B$. 由(3)得$-2=(-1)+(-1)\in A$,进而得$-3\in B$,$-4\in A$,…. 因此,由数学归纳法易证$-2n\in A$,$-2n-1\in B$对所有非负整数n成立.

若$2\in B$,则$1=2+(-1)\in A$,由(2)知,$1-1=0\in B$,矛盾. 所以,$2\notin B$,$2\in A$,$1=2-1\in B$.

下面证明,对所有的n,有$2n\in A$,$2n\notin B$.

若不成立,则存在一个最小的$n(n>1)$满足$2n\in B$. 又因为$-1\in B$,所以,$2n-1\in A$. 由(2)知,$(2n-1)-1=2(n-1)\in B$,与n的最小性矛盾. 所以,当$n\geqslant1$时,$2n\in A$,从而,$2n-1\in B$,即所有正偶数均属于A,所有正奇数均属于B.

若$-2n\in B$,n为正整数,由$2n+1\in B$及(3)得$1\in A$,由(2)得$0\in B$,矛盾. 于是,所有的偶数均属于A,但不属于B.

若有奇数$2n+1\in A$,由(2)得$2n\in B$,矛盾.

于是,$A=2\mathbf{Z}$,$B=2\mathbf{Z}+1$.

3. 对n和集A的元素个数用归纳法.

如果A恰有一个元素,则$D(A)$仅包含一个零向量. 结论成立.

如果$n=1$,设$A=\{a_1<a_2<\cdots<a_m\}$,则

$\{0,a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_m-a_1\}\subseteq D(A)$.

因此,$|D(A)|\geqslant|A|$.

假定$|A|>1$和$n>1$,定义$B=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\mid$存在$x_n$使得$(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)\in A\}$.

由归纳假设$|D(B)|\geqslant|B|$.

对每一个$b\in B$,令$A_b=\{x_n\mid(b,x_n)\in A\}$,$a_b=\max\{x\mid x\in A_b\}$,$C=A\setminus\{(b,a_b)\mid b\in B\}$. 则

$|C|=|A|-|B|$.

因为$|C|<|A|$,由归纳假设$|D(C)|\geqslant|C|$.

另一方面,$D(A)=\bigcup\limits_{D\in D(B)}\{(D,|a-a'|)\mid d(b,b')=D,且\ a\in A_b,a'\in A_{b'}\}$.

类似地,再令$C_b=A_b\setminus\{a_b\}$,有

$D(C)=\bigcup\limits_{D\in D(B)}\{(D,|c-c'|)\mid d(b,b')=D,且\ c\in C_b,c'\in C_{b'}\}$.

注意到,对每一对b、$b'\in B$,最大差$|a-a'|(a\in A_b,a'\in A_{b'})$一定是$a=a_b$或$a'=a_{b'}$. 于是,这个最大差不出现在$\{|c-c'|\mid c\in C_b,c'\in C_{b'}\}$中.

因此,对任何的$D\in D(B)$,集合

$\{|c-c'|\mid d(b,b')=D\ 且\ c\in C_b\ 和\ c'\in C_{b'}\}$并不包含集合

$\{|a-a'|\mid d(b,b')=D\ 且\ a\in A_b\ 和\ a'\in A_{b'}\}$中的最大元,前者是后者的真子集.

由此结论可知

$|D(C)|\leqslant\sum\limits_{D\in D(B)}(|\{|a-a'|\mid d(b,b')=D\ 且\ a\in A_b\ 和\ a'\in A_{b'}\}|-1)\leqslant|D(A)|-|D(B)|$.

故$|D(A)|\geqslant|D(B)|+|D(C)|\geqslant|B|+|C|=|A|$.

4. 我们通过对 k 进行归纳证明题目结论.

当 $k=0$ 时,结论显然成立,因为此时没有任何航空公司.

构筑一个图,其中的顶点为该国的城市,而边则为航线,分别以 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 表示各个航空公司的航线所对应的边的集合. 易看出,对于每个 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$,集合 E_i 或者为三角形,或者为"花",即具有一个公共顶点的若干条边.

如果存在一个集合 E_i 是以某个顶点 A 为公共顶点的"花",那么,就从图中去掉顶点 A 和所有由它所连出的边. 于是,在剩下的图中只有 $k-1$ 家航空公司的航线. 根据归纳假设,我们可以把所有的顶点分成 $k+1$ 组,使得任意 2 个属于同 1 组的顶点之间都没有边联结,再把顶点 A 作为第 $k+2$ 组即可.

下面再考虑所有的 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 都是三角形的情形. 此时图中恰好有 $3k$ 条边. 我们将图中的顶点分为尽可能少的组,使得任意 2 个属于同 1 组的顶点之间都没有边联结.

假设所分出的组为 $B_1,B_2,\cdots,B_n$,且 $n\geqslant k+3$. 注意到,此时在任何 2 个组 B_i 和 B_j 之间,都一定有某条边联结 B_i 和 B_j 中的某 2 个顶点,若不然,就可以把 2 个组并为 1 个组. 从而,该图中至少有 C_n^2 条边. 这样一来,就有

$$C_n^2\geqslant\frac{(k+3)(k+2)}{2}>3k,$$

矛盾. 所以题目的结论成立.

5. 首先证明,若自每个广场有不多于两条驶出的道路,则可把所有广场分别染为 13 种不同颜色,使得从任何广场至少需要经过三条道路才可能到达任何一个同色的广场. 为此,观察如下的辅助有向图:图中的顶点为城市中的各个广场,如果某两个广场之间至多需要经过两条道路即可以由其中一个到达另外一个,则在它们之间连一条有向边(方向为行驶方向). 不难看出,在该图中,自每个顶点至多连出 6 条边. 只需证明,可以把该图中的所有顶点按正确方式分别染为 13 种不同颜色.

对图中的顶点数目 n 进行归纳. 当 $n\leqslant 13$ 时,结论显然成立. 其次,易看出,由于自该有向图的每个顶点至多连出 6 条边,所以必有一个顶点 u,进入它的边不多于 6 条. 去掉顶点 u,所得的图仍然满足我们的条件. 因此,由归纳假设,可以把剩下的顶点分别染为 13 种不同颜色,以满足要求. 由于连出连入顶点 u 的边一共不多于 12 条,所以可以把 u 染色,使得要求被满足.

现在把每种颜色(记为 A)的广场分为 78 种类型. 观察它们所连出的路所通向的广场的颜色,由于一共有 12 种其他颜色,对于 A 种颜色的广场,有 12 种类型使得两条路通向同一种颜色的广场,有 $C_{12}^2=66$ 种类型使得两条路通向不同颜色的广场,所以一共有 78 种类型. 于是,把所有的广场分成了 $1014=13\times 78$ 个小区.

下面证明所作的划分满足要求. 设小区 A 中有广场 a_1 和 a_2,小区 B 中有广场 b_1 和 b_2,并且在它们之间有单向道路 $a_1\rightarrow b_1$ 和 $b_2\rightarrow a_2$. 由于 b_1 和 b_2 同属一个小区,故由它们有道路通向颜色类型相同的广场,这表明,自 b_1 有道路通向与 a_2 颜色相同的广场. 该广场的颜色当然也与 a_1 相同. 这样一来,自 a_1 出发,只需经过两条道路就可以到达一个与之同色的广场,此为矛盾,题中结论得证.

6. 用 p、q 分别替换 2001、2002($m\leqslant p,n\leqslant q$),将问题加强为对 $p+q$ 进行归纳,证明

$$S\geqslant(p-m)(q-n). \quad ①$$

显然,当 $p+q=2,3,4$ 时,不等式①成立.

假设 $p+q=k$ 时,不等式①成立.

当 $p+q=k+1$ 时,考虑(p,q)一棋盘. 若 $m=p$ 或 $n=q$,不等式①显然成立. 下面考虑 $m<p$ 且

$n<q$ 的情况. 如果格内数字小于其所在行(或列)的至少 n 个数(或 m 个数),那么,将棋盘上这样的格叫做坏行格(或坏列格).

在(p,q)—棋盘内,如果每个坏列格也是坏行格,且每个坏行格也是坏列格,那么易得

$S=(p-m)(q-n)$.

因此不等式①成立.

假设在(p,q)—棋盘内存在格仅是坏行格或坏列格. 设 a 是写在这类格中最小的数,不妨设 a 是坏行格. 那么,位于 a 所在列的所有$(p-m)$个坏列格中的数比 a 小,因此一定是棋盘内的坏格. 去掉 a 所在列,则$(p,q-1)$—棋盘的格是坏格,在先前假设的(p,q)—棋盘中也是坏格. 因为 $p+q-1=k$,由归纳假设知,在$(p,q-1)$—棋盘中坏格数不少于$(p-m)(q-1-n)$. 因此,在(p,q)—棋盘中坏格数不少于

$(p-m)(q-1-n)+(p-m)=(p-m)(q-n)$.

由此,不等式①成立.

现在(p,q)—棋盘中给出一种放法,使得坏格数等于$(p-m)(q-n)$:将 $p\times q$ 个数按递增顺序从左向右依次放入格内.

这样,$S_{\min}=(p-m)(q-n)$,故所求最小值为

$(2001-m)(2002-n)$.

7. 将一条从$(0,0)$到(n,n)有 s 步的路称为(n,s)型路. 设 $f(n,s)$表示(n,s)型的路的数目,$g(n,s)=\frac{1}{s}C_{n-1}^{s-1}C_n^{s-1}$,我们对 n 用数学归纳法证明

$f(n,s)=g(n,s),s=1,2,\cdots,n$.

显然有 $f(1,1)=1=g(1,1),f(2,1)=1=g(2,1),f(2,2)=1=g(2,2)$.

$n\geqslant 2$ 时,假设 $f(m,s)=g(m,s)$,其中 $1\leqslant s\leqslant m\leqslant n$,易知 $f(n+1,1)=1=g(n+1,1)$. 下面证明 $f(n+1,s+1)=g(n+1,s+1)$,其中 $1\leqslant s\leqslant n$.

我们称一条(n,s)型路和一条$(n+1,s+1)$型路相关联,如果$(n+1,s+1)$型路可以由(n,s)型路通过将 EN 插在两个形如 EE、NN、NE 的相邻运动之间,或通过将 EN 加在这条路的两端获得;称一条$(n,s+1)$型路和一条$(n+1,s+1)$型路相关联,如果$(n+1,s+1)$型路可以由$(n,s+1)$型路通过将 EN 插在 EN 之间获得.

每条(n,s)型路与 $2n+1-s$ 条不同的$(n+1,s+1)$型路相关联,每条$(n,s+1)$型路与 $s+1$ 条不同的$(n+1,s+1)$型路相关联,每条$(n+1,s+1)$型路恰与 $s+1$ 条(n,s)型路或$(n,s+1)$型路相关联,所以,有

$(s+1)f(n+1,s+1)=(2n+1-s)f(n,s)+(s+1)f(n,s+1)$.

容易验证

$(s+1)g(n+1,s+1)=(2n+1-s)g(n,s)+(s+1)g(n,s+1)$.

所以,$f(n+1,s+1)=g(n+1,s+1)$.

8. $C_{2003}^2+1=2005\ 004$.

考察 $9\times n$ 的方格表,在它的方格里边把正整数 1 到 n 各填 9 次,且在每一列中所填的数之差都不大于 3. 我们用数学归纳法证明:第一行数的和不小于 C_{n-1}^2+1.

当 $n\leqslant 4$ 时,结论显然,因为每个方格中的数都不小于 1,且当 $n\leqslant 4$ 时,有 $n\geqslant C_{n-1}^2+1$.

接下来作归纳过渡. 如有必要,可以通过调整列的顺序,使得第一行中的数按非降顺序排列,故

可假设第一行中的数已经按非降顺序排列.以 S_i 表示第一行中不小于 i 的数的个数,并令 $D_i=n-S_i$,于是,$S_1=n,D_1=0$,且第一行数的和等于

$S=S_1+S_2+\cdots+S_n$.

改写上式,可得

$S=(n-D_1)+(n-D_2)+\cdots+(n-D_n)\geqslant n(n-3)-(D_1+D_2+\cdots+D_{n-3})$.

如果对任意 $i\leqslant n-3$,都有 $D_i\leqslant i+1$,则有 $S\geqslant n(n-3)-[0+3+4+\cdots+(n-2)]=\frac{n^2-3n+4}{2}$.

即为所证.

假设存在某个 $k\leqslant n-3$,使得 $D_k\geqslant k+2$.此时必有 $k\geqslant 2$,则 $k+2\geqslant 4$.由于第一行中至少有 $k+2$ 个数小于 k,则该表中的前 $k+2$ 列中的数都不超过 $k+2$.这表明,所有这样的数全都在前 $k+2$ 列中,因此,后面各列中的数都不小于 $k+3$.现在将整个表分成两部分:前 $k+2$ 列为第一部分,其余的为第二部分.由于 $n-1k+2\geqslant 4$,所以,第一部分中第一行数的和不小于 C_{k+1}^2+1.如果将第二部分中的每个数都减去 $k+2$,则得到一个具有 $n-(k+2)\geqslant 1$ 列的满足题意的方格表.于是,由归纳假设知,它的第一行数的和不小于 $(k+2)(n-k-2)+C_{n-k-3}^2+1$.

将上述两个估计值相加,即得

$S\geqslant C_{k+1}^2+1+(k+2)(n-k-2)+C_{n-k-3}^2+1=C_{n-1}^2+3$.

我们再给出一个可以达到最小可能值的例子.

如下表:

1	1	1	2	3	4	…	k	…	1998	1999	2000	2001	2 001
1	2	3	4	5	6	…	$k+2$	…	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	…	$k+2$	…	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	…	$k+2$	…	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	…	$k+2$	…	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	…	$k+2$	…	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	…	$k+2$	…	2000	2001	2002	2003	2004
2	3	4	5	6	7	…	$k+3$	…	2001	2002	2003	2003	2004
2	3	4	5	6	7	…	$k+3$	…	2001	2002	2003	2004	2004

第9章　图论方法

A组

1.视选手为顶点,比赛为边,如果每人至多赛过2次,那么 n 个选手至多赛过 $2n$ 次(按每人计算之总和),即相应的图的总度数至多是 $2n$,于是其边数至多为 $\frac{2n}{2}=n$ 条,即至多赛完 n 场,与假设矛

盾.

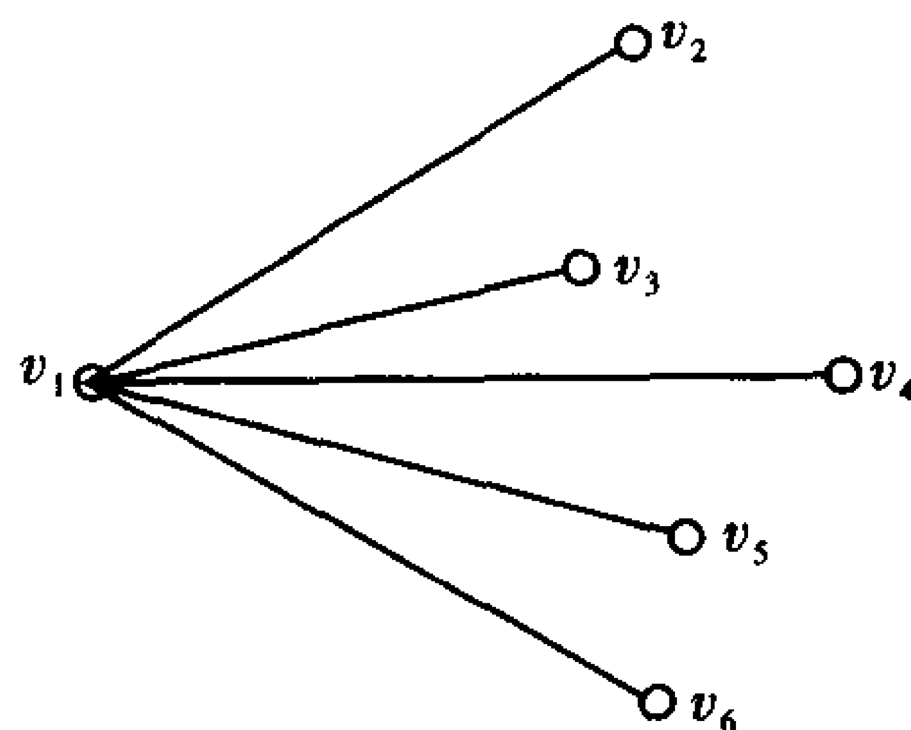
2. 以上为顶点，对于握过手的两个人，在相应的这两顶点之间连一条边，得图 G，因为不是任何两个人都握过手，所以 G 的边最多时为子图 K_N-e，其中 e 是未握过手的两人 A_1 与 A_2 的联线，所以 $N-2$ 即为所求.

3. 我们证明握手问题. 设有 n 个人，那么一个人握手的次数可能是 $0,1,\cdots,n-1$ 这 n 个数中的某一个，如果有人一次手也没有握过，那么就不可能有人与其余 $n-1$ 个人都握过手，这样一来，$0,1,\cdots,n-1$ 这几个数不可能都有，由重叠原理 I 即证，把这个证明翻译成图的语言，即证明了性质 2.

4. 用 $v_1,v_2,\cdots,v_9$ 这九个点表示九个数学家，在两个人不用同一种语言对话时，用边来联结相应的顶点，这样得到一个简单图 G'.

因为每三个人中至少有两个人可以用同一种语言对话，所以 G' 中每三点之间至少有两个点是不相邻的，换句话说，在 G' 中没有三角形.

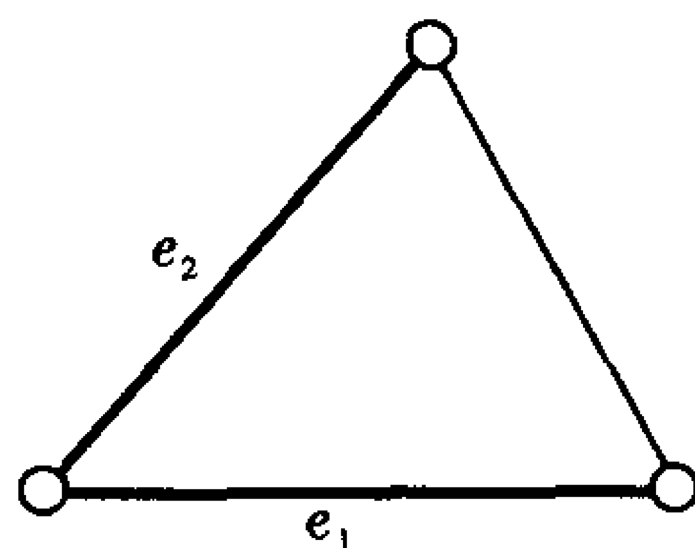
现在来证明 G' 中必有一个点 v_i 的度数不大于 4. 如果 v_1 的度数 $\leqslant 4$，那么 v_1 就是所说的 v_i，如果 v_1 的度数 >4，那么有五个顶点与 v_1 相邻，不妨设 v_2,v_3,v_4,v_5,v_6 相邻，如图所示.

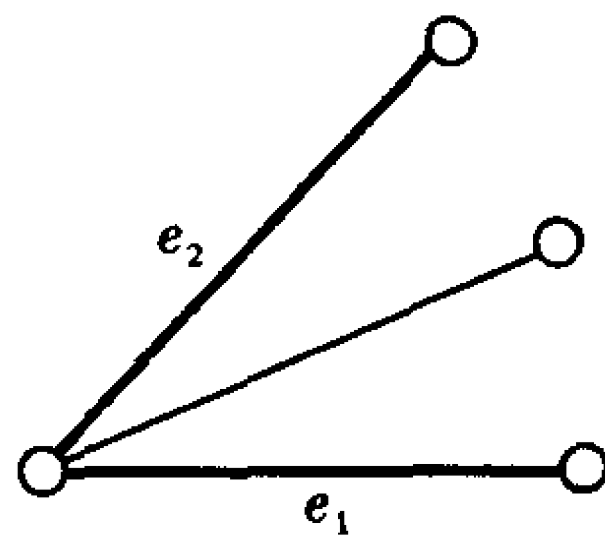


由于 G' 中没有三角形，所以 v_2 与 v_3,v_4,v_5,v_6 均不相邻，从而 v_2 的度数 $\leqslant 4$.

这就证明了 G' 中有一个点的度数不大于 4，也就是说在九名数学家中有一个人至少可以同四个人对话，由于这个人至多会说三种语言，因此至少有两个人与他对话时用的是同一种语言，于是这三个人可以用同一种语言对话.

5. 每一参观团员对应于图的一个且仅仅一个顶点，未曾见过面的两个团员所对应的顶点用边联结起来得到一个有限图. 不失一般性，我们假设在图中至少有两条不同的边 e_1,e_2，因为要不然的话，在所有的顶点(可能除去两个顶点)中，没有引出任何一条边，因而在图的任何四个顶点中，总可以找到这样一个顶点它没有引出任何一边，边 e_1 和 e_2 有一个公共端点，因为要不然的话，它们的端点所构成的四个点不满足本题条件，用类似的论证可以查明：假若不算边 e_1 和 e_2，那么图中只能有一边，而且这条边与边 a 和 b 至少有一个公共端点，这条边或者是由联结边 e_1 和 e_2 的自由端点而得到，或者是由边 e_1 和 e_2 的公共端点发出的，如图所示. 后一种情形是不可能的，因为由一个 点发出三条边是与本题条件相违的，这样一来，只能是和边 e_1 和 e_2 的三个端点相重合的图的顶点才能用边联结，这就证明了在任意四个顶点中，至少可以找到这样一个顶点，它不和图的其他任何一个顶点用边联结起来.



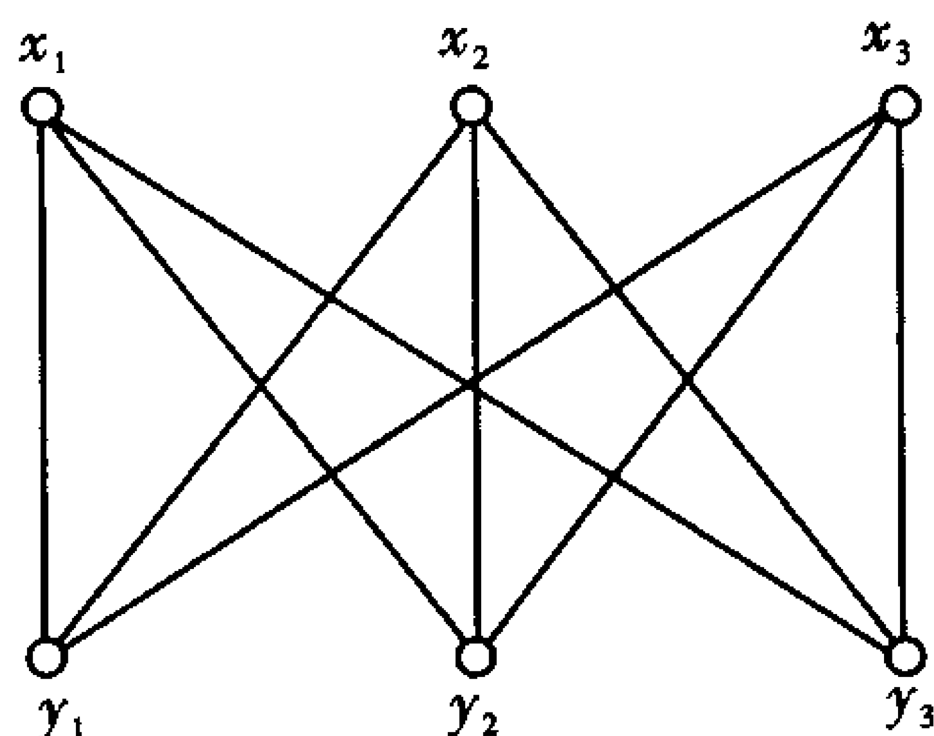


6. 将三个城市与三个旅游区用六个点表示，九条铁路用九条边表示就得右图. 即是 $K_{3,3}$，我们证明它不是平面图.

假设 $K_{3,3}$ 是平面图，那么由于 $n=6,m=9$，由欧拉公式得 $f=2+m-n=5$.

因为 $K_{3,3}$ 是简单图，没有由两条边围成的面，又因为 $K_{3,3}$ 是偶图，也不会有由三条边围成的面，所以每个面至少有四条边，从而 $4f\leqslant 2m$，即 $4\cdot 5=20\leqslant 2\cdot 9=18$. 矛盾.

因此平面上九条铁路必定相交，除非它们不在同一个平面上(地下铁路或空中立交桥).



7. 可证明一般命题：具有几个顶点的连通图至少含有 $n-1$ 条边，对 n 用归纳法证明.

设 n 时成立，设 G 为 $n+1$ 个顶点的连通图，如果其边 $<n+1$，那么必有一度数为 1 的顶点（因为不然的话，总度数 $\geqslant 2(n+1)$，边数 $\geqslant \frac{2(n+1)}{2}=n+1$），将此顶点删去，得到具有 n 个顶点的连通图，它至少有 $n-1$ 条边，再添加删去的边，就至少有 n 条边.

8. 用图的语言来说，这个命题相当于：如果 G 是具有 9 个顶点的简单图，那么 G' 中有一个子图 K_3，或者它的补图 $\bar{G}$ 中有一个子图 K_4.

分两种情况：(i)G 中有一个顶点 v_1 的度数 $\geqslant 4$，这时，设在 G 中，v_2,v_3,v_5 与 v_1 相邻，如果 v_2,v_3,v_4,v_5 中有两个，比如说 v_2 与 v_3 相邻，那么 G 中含有 $\triangle v_1v_2v_3$，如果 v_2,v_3,v_4,v_4,v_5 在 G 中互不相邻，那么 $\bar{G}$ 中含有以 v_2,v_2,v_4,v_5 为顶点的子图 K_4.

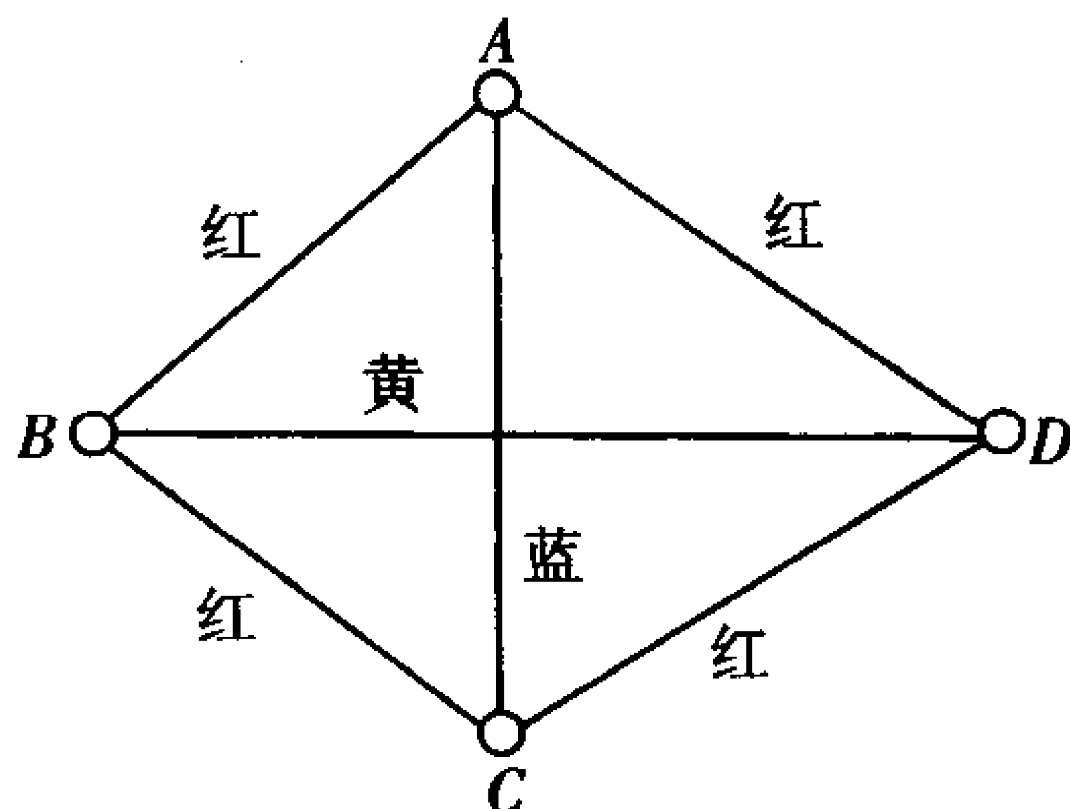
(ii)G 中每个顶点的度数 <4，这时，$\bar{G}$ 中每个顶点的度数 >4，即对所有的顶点 v，$\bar{G}$ 中的顶点的度数 $\geqslant 5$，由于奇顶点的总数是偶数（推论 1），所以 $\bar{G}$ 中的九个顶中一定有一个顶点 v_1 是偶顶点，即 $\bar{G}$ 中 v_1 的顶点度数 $\geqslant 6$，由拉姆赛定理（或例 2 结论），$\bar{G}$ 中与 v_1 相邻的六个顶点中有三个顶点在 $\bar{G}$ 中构成一个三角形（从而 v_1 与这三个顶点在 $\bar{G}$ 中构成完全图 K_4），或者有三个顶点在 G 中构成 K_3.

9. 作一个完全图 K_{17}，它的十七个顶点表示十七位科学家，它的边涂上三种颜色：如果两位科学家讨论的是第 i 个问题，那么就将联结相应的两个顶点的边涂上第 i 种颜色（$i=1,2,3$），要证明的结论是这个 K_{17} 中有一个同色三角形.

任取一点 v_1，自 v_1 引出的边有 16 条，平均每种颜色有 $\frac{16}{3}$ 条. 因而一定有六条边具有同样的颜色（重叠原理Ⅱ）. 不妨设 (v_1,v_2)，(v_1,v_3)，(v_1,v_4)，(v_1,v_5)，(v_1,v_6)，(v_1,v_7) 这六条边是第一种颜色. v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7 这六个顶点形成一个完全图 K_6. 如果这个完全图有一条边. 比如说 (v_2,v_3) 也是第一种颜色，那么 $\triangle v_1v_2v_3$ 就是一个同色三角形. 如果这个完全图的边都是第二种或第三种颜色，那么由拉姆赛定理（或例 2 结论），也有一个同色三角形.

10. 至多有 4 个区.

设顶点表示区，边表示交通方式，红、蓝、黄三色染边，表示三种交通方式，如图所示. 即符合题意，这样，就存在四个区.



如果多于 4 个区，即图有 5 个顶点，将它们分为非红、非蓝、非黄三种组合，这样，至少有一个组合的顶点 $\geqslant 2$，否则，顶点个数最多为 3，分情况讨论：

(i)不妨设非红组合有 3 个顶点以上，那么含有三顶点 A,B,C，它们发出蓝边或黄边. 可设非蓝组合有一顶点 D. 那么 DA 既非红又非蓝，故为黄. 同样，DB,DC 也为黄色. 这样，若 AB 或 AC 中有一黄色，就得同色三角形，矛盾，故其中有一蓝色，不妨设 AB 为蓝色，同样，AC,BC 也为蓝色，这又得 $\triangle ABC$ 为蓝色三角形. 矛盾. 因此情况(i)不存在.

(ii)若每个组合至多有 2 个顶点，那么由于顶点数 5，故有一组合含两顶点，不妨设 A、B 在非红组合中，再不妨设 AB 为蓝色，从而必有点在非蓝组合中（否则会导致只有二色边），设该点为 C，这样

AC,BC只能是黄色,从而还有另一点设为D在非黄组合中,从而导出AD、BD只能是蓝色,而AB为蓝色,又得$\triangle ABD$为同色三角形,又得矛盾,所以情况(ii)也不会发生.

因此,符合题意的图的不能具有5个顶点.

11. 纱的颜色视为顶点$v_i(i=1,2,\cdots,6)$,不妨设图已含边v_1v_2(对应一种双色布).

顶点v_3发出的边至少有3条,故有异于v_1,v_2的顶点,比如说v_4,与v_3联结,即图含有边P_3P_4,如果图还含有边v_5v_6,则问题得证;如果不然,则v_5,v_6间无边联接.

从P_5发出的边至少有3条,在边v_1v_2,v_3v_4的端点中,分别可选一点,比如设为v_2和v_3与v_5有边联接,这样就得到:图有边v_2v_5,v_3v_5.

从v_6发出的至少3条边,与上类似讨论,可知图含边v_1v_6和v_4v_6(可这样设).

若选v_4v_6,则连同v_1v_2,v_3v_5得问题解;若选v_1v_6,则连同v_2v_5,v_3v_4也得问题解.

此题的断言实际上就是:具有6个顶点且其度数不小于3的图是哈密尔顿回路.

B组

1. 视$\{1,2,\cdots,n\}$为顶点集,当两数之和为101时,在相应的两顶点间联边得图G,显然原问题等价于寻求一最大的n,使得任取G中的51个顶点,其中都必有两顶点相邻.易知,从一个顶点出发至多有一条边.

当$51\leqslant n\leqslant 100$时,$G$中恰有$n-50$条边,剩下$n-2(n-50)=100-n$个零度顶点,因$n\geqslant 51$,得$100-n\leqslant 49$.故要取51个顶点,必有两顶点相邻.

当$n>100$时,G中有50条边,$n-100$个零度顶点,由于$n>100$,故$n-100>0$.在50条边中分别任取一顶点,再加上任一个零度顶点所构成的51个顶点之集,必两两不相邻.

综上所述,知合条件的n是100.

2. 视队为顶点,若两队赛过,则在相应的两顶点间联边得图G,设A市甲队顶为V^*,则原问题等价于求A市乙队相应顶的度数.因每队至多赛30场,所以任一点的度数只能取0,12,…,30这31个数之一.由题设可知$V-\{v^*\}$中顶点的度数恰分别取$0,1,2,\cdots,30$.记度为i的顶为$V_i(i=0,1,\cdots,30)$,则$V=\{v_0,v_1,v_2,\cdots,v_{30},v^*\}$.显然,与$v_{30}$不相邻的顶仅为$v_0$,故$v_{30}$,$v_0$为同市的两个队.去掉$v_0$,$v_{30}$,则剩下的点的度各减少1.于是与上面的讨论同理可得v_{29},v_1为同市的两个队,依次类推.一般地可得,v_i与v_{30-i}为同市的队.

从而与v^*同市的队只能是v_{15},故欲求的场次为15,证毕.

3. 作一图G,20个顶点代表20名成员,14条边代表14场比赛.令各顶点的度为$d_i(1\leqslant i\leqslant 20)$,则有$d_i\geqslant 1$,$\sum\limits_{i=1}^{20}d_i=2\cdot 14=28$.今将每个顶点处各抹去$d_i-1$条边,这时一条边可能被抹了两次,因此实际抹去的边数$\leqslant\sum\limits_{i=1}^{20}(d_i-1)=8$,故余下的图$G'$中至少还有6条边,且$G'$中每个顶点的度$\leqslant 1$,故这6场比赛的参赛者各不相同.证毕.

4. 作一有向图G,它的顶点有五个梯子的底端(起点),顶端(终点)及所有"节点"(系绳子的点).它的所有有向边是猴子可通行的路段,于是同一梯子的两个节点之间有一条向上的弧,而一条绳子所连的两个节点之间有两条方向相反的弧.每只猴子的爬行路线是图G中的一条路径,在这条路径中,相连接的两条弧必有一条在梯上,另一条在绳子上.由一个起点出发,不会再次经过任一起点且不会终止于任一"节点".若如一路线$e_1e_2\cdots e_i\cdots e$中出现重复的弧,设$e_i=e_j$,其中$i<j$,则必$e_{i-1}=$

e_{j-1}. 不然,e_{i-1} 及 e_{i-1} 中必有一条为梯子上的弧,另一条为绳子上的弧,这又与 $e_i=e_j$ 矛盾. 由此类推,得 $e_1=e_{j-i}$,由起点的不可复返知这是不可能的,所以任一猴子的路线必是由起点到终点的无重复边的路线. 同理可知任两只猴子的路线终点不同(否则它们必有最后一条边相同;可递推得起点亦相同),于是每只猴子只能各拿到一根香蕉.

5. 记 n 名选手 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为 n 个顶点,如果选手 p_i 胜 p_j,则作弧 (p_i,p_j). 由题设条件则得一有向图 G. 那么 w_i 和 l_r 就分别表示点 p_r 的出度与入度. 于是,对于任一点 p_r,都有

$w_r+l_r=n-1(r=1,2,\cdots,n)$.

又由性质 2 知 $\sum\limits_{i=1}^{n}w_i=\sum\limits_{i=1}^{n}l_i$.

$$\text{故}\sum_{i=1}^{n}w_i^2-\sum_{i=1}^{n}l_i^2=\sum_{i=1}^{n}(w_i^2-l_j^2)=\sum_{i=1}^{n}(w_i+l_i)(w_j-l_j)=(n-1)\sum_{i=1}^{n}(w_i-l_i)$$
$$=(n-1)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}w_i-\sum_{i=1}^{n}l_i\right)=0,$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}w_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}l_i^2$. 证毕.

上例中的图 G 称为竞赛图(每一条边都规定了方向的完全图). 此例说明了竞赛图 G 中出度的平方和等于入度的平方和.

6. 把 1978 个数任意分成六个数集 M_1,M_2,M_3,M_4,M_5,M_6,对应于 1978 个数,在圆周上取点 $A_1,A_2,A_3,\cdots\cdots,A_{1978}$,用 6 种颜色 $C_1,C_2,\cdots,C_6$ 之一染这些点间的两两连线,染色方法规定如下:当仅当 $|i-j|\in M_k$ 时,线段 A_iA_j 染 C_k 色. 由 $R(6)\leqslant1958<1978$,故对此种染色方案一定有一同色三角形 $\triangle A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$,由上规定的染色方法可知 $i_2-i_1\in M_1,i_3-i_2\in M_1,i_3-i_1\in M_1$.

又,显然有 $(i_2-i_1)+(i_3-j_2)=i_3-i_1$,注意到可能会有 $i_2-i_1=i_3-i_2$,讨论如下:

若 $i_2-i_1\neq i_3-i_2$ 时,M_1 中有一数 i_3-i_1,它是 M_1 中另外两数 i_2-i_1,i_3-i_2 之和;

若 $i_2-i_1=i_3-i_2$ 时,M_1 中有数 i_3-i_1,它是 M_1 中数 $i_2-i_1(=i_3-i_2)$ 的 2 倍,因此命题得证.

第 10 章 集合问题的求解思路

A 组

1. 选 D. 理由:因 $P=\{-1,1\}$,$Q\subset P$,则 Q 可能是 $\varnothing,\{-1\},\{1\}$. 当 $Q=\varnothing$ 时,$m=0$;当 $Q=\{-1\}$ 时,$m=-1$;当 $Q=\{1\}$ 时,$m=1$,故 m 有 $0,-1,1$ 共 3 个取值.

2. 选 D. 理由:$N-M=\{x|x\in\mathbf{N}\text{ 且 }x\notin M\}=\{2003\}$.

3. 选 C. 理由:由方程 $x^2-3x-a^2+2=0$ 的根的判别式 $\Delta=1+4a^2>0$,知方程有两个不相等的实数根,则 M 有 2 个元素,得集合 M 有 $2^2=4$ 个子集.

4. 填 8. 理由:X 一定包含 1、2、3 这 3 个元素,而 4、5、6 这 3 个数可属于 X,也可不属于 X,每一个数有 2 种可能,故所求的不同的 X 共有 $2^3=8$ 个.

5. 选 B. 理由:由 $\lg\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y$,

$$\text{得}\begin{cases}x>0,\\y>0,\\x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}=xy.\end{cases}\qquad①$$

因此,点集的元素个数问题就等价于满足①式的有序数对(x,y)的组数问题.

注意到,$x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}=xy=3\sqrt[3]{x^3\cdot\frac{1}{3}y^3\cdot\frac{1}{9}}$,

故利用算术与几何平均不等式,有

$x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\geqslant3\sqrt[3]{x^3\cdot\frac{1}{3}y^3\cdot\frac{1}{9}}=xy$,其中等号当且仅当$x^3=\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9}$时成立.

于是,我们又将问题转化为

求方程组$\begin{cases}x^3=\frac{1}{9},\\\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9}\end{cases}$ ②

实数解的组数.

不难得到②的解为$x=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$,$y=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

故点集仅有一个元素.

6. 设任意的$r\in Q$,$r\neq0$,由(2)知,$r\in S$,或$-r\in S$之一成立.再由(1),若$r\in S$,则$r^2\in S$;若$-r\in S$,则$r^2=(-r)\cdot(-r)\in S$.总之,$r^2\in S$.

取$r=1$,则$1\in S$.于是由(1)得:$2=1+1\in S$,$3=1+2\in S\cdots$可见全体正整数都属于S.

设$p,q\in\mathbf{N}_+$,由(1)知$pq\in S$.又由前面的证明知$\frac{1}{q^2}\in S$,因此,$\frac{p}{q}=pq\cdot\left(\frac{1}{q^2}\right)\in S$.所以$S$含有全体正有理数.

再由(2)知,0及全体负有理数不属于S.即S是由全体正有理数组成的集合.

7. 由(4)知,当$x\in M$,则$kx\in M(k\in\mathbf{N})$.

(Ⅰ)由(1)可设$x,y\in M$,且$x>0,y<0$,则$-yx=|y|x(|y|\in\mathbf{N})$,故$xy,-yx\in M$,于是由(4),$0=(-yx)+xy\in M$.

(Ⅱ)$2\notin M$.若不然,设$2\in M$,则M中的负数全为偶数.否则,当$-2k+1\in M(k\in\mathbf{N})$时,$-1=(-2k+1)+k\cdot2\in M$,与(3)矛盾.于是由(2)知$M$中必有正奇数,设$-2m,2n-1\in M(m,n\in\mathbf{N})$,我们取适当正整数$p$,使$p\cdot|-2m|>2n-1$,则负奇数$-2pm+2n-1$属于$M$,矛盾!

8. 对于集合M的任意一个子集$X=\{b_1,b_2,\cdots,b_k\}$,不妨设$b_1<b_2<\cdots<b_k$,则必存在另一个子集$X'=\{1001-b_1,1001-b_2,\cdots,1001-b_k\}$,这时

$a_x=b_1+b_k$,

$a_{x'}=(1001-b_1)+(1001-b_n)=2002-b_1-b_k$,

a_x与$a_{x'}$的算术平均值为1001.

将M中非空子集进行配对,对每个非空集合$X\subset M$,$X'=1\{1001-x|x\in X\}$,则$X'\subset M$.

如果$X\neq X'$,那么,$a_x+a_{x'}=2002$.

如果$X\neq X'$,则必有$a_x=1001$.

综上所述,所有这样的a_x的算术平均值为1001.

9. 由集合相等可知,两集合的元素相同.这样,M中必有一元素为0,又由对数的定义知$xy\neq0$,因此,x,y不为零,于是只有$\lg xy=0$,即$xy=1$.则$M=\{x,1,0\}$,$N=\{0,|x|,\frac{1}{x}\}$.再由$M=N$,我们

可得

$$\begin{cases}x=|x|,\\1=\dfrac{1}{x}\end{cases}\quad 或\begin{cases}x=\dfrac{1}{x},\\1=|x|.\end{cases}$$

但当 $x=1$ 时，与同一集合元素的相异性矛盾，故只有 $x=-1$，从而 $y=-1$，此时 $M=N=\{-1,1,0\}$，于是

$$x^{2k}+\frac{1}{y^{2k}}=2,x^{2k+1}+\frac{1}{y^{2k+1}}=-2.$$

故 $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\dfrac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2001}+\dfrac{1}{y^{2001}}\right)=-2.$

10. 若 $A\cap B\neq\phi$，则必存在 (x_0,y_0)，使

$$\begin{cases}y_0=-3x_0+2, & ①\\ y_0=m(x_0^2-x_0+1). & ②\end{cases}$$

于是我们只需讨论上述方程组有满足条件的解的条件.

将①代入②，得 $mx_0^2-(m-3)x_0+m-2=0.$

由于 $x_0\in\mathbf{N}$，故必有 $\Delta=(m-3)^2-4m(m-2)0.$

即 $3m^2-2m-9\leqslant0.$

解之得 $\dfrac{1-2\sqrt{7}}{3}\leqslant m\leqslant\dfrac{1+2\sqrt{7}}{3}.$

注意到 m 为非零整数，故 $m=-1,1$ 或 2，于是我们只须将 m 的值分别代入验证即可. 事实上，只有 $m=-1$ 时，使 $x\in\mathbf{N}_+$.

B组

1. 因为含 S 中的一个固定元素的二元子集有 3 个，所以，S 的任一元素在数列中至少出现两次. 由此估算 n 的最小值为 8. 另一方面，8 项数列：3,1,2,3,4,1,2,4 满足条件，故 n 的最小值为 8.

2. 因为 $A\cup B=M,A\cap B=\phi,S(A)=2S(B)$，故 $S(M)=3S(B)=\dfrac{k(k+1)}{2}$ 是 3 的倍数，即 $3|k$ 或 $3|(k+1)$. (1) 当 $k=3m$ 时，$A=\{1,3,4,6,\cdots,3m-2,3m\}$，$B=\{2,5,8,\cdots,3m-1\}$ 符合要求；(2) 当 $k=3m-1$ 时，$A=\{2,3,5,6,8,\cdots,3m-3,3m-1\}$，$B=\{1,4,7,\cdots,3m-2\}$ 符合要求. 因此，$k=3m$ 或 $k=3m-1$.

3. 对于两个不同的自然数 a 与 b，如果 $7\nmid(a+b)$，那么，它们被 7 除所得的余数的和不为 0. 所以，可将集合 $\{1,2,\cdots,50\}$ 按被 7 除所得的余数划分为 7 个子集，其中 A_i 中的每个元素除以 7 后的余数为 $i(i=1,2,\cdots,6)$，则

$A_0=\{7,14,21,28,35,42,49\}$，

$A_1=\{1,8,15,22,29,36,43,50\}$，

$A_2=\{2,9,16,23,30,37,44\}$，

$A_3=\{3,10,17,24,31,38,45\}$，

$A_4=\{4,11,18,25,32,39,46\}$，

$A_5=\{5,12,19,26,33,40,47\}$，

$A_6=\{6,13,20,27,34,41,48\}$.

根据题意得：

(1)S 最多含有 A_0 的一个元素；

(2)S 含 A_i 的一个元素，则可以含有这个集合的所有元素，但不能同时含有 A_{7-i} 的元素；

(3)A_1 含有 8 个元素，而其他子集中只有 7 个元素，故最大的子集 S 必含 A_1 的所有元素.

综上所述，最大的子集 S 有 $1+8+7+7=23$ 个元素.

4. (1)把 $1,2,\cdots,366$ 按被 17 除的余数分为 17 类：$[0],[1],\cdots,[16]$.

因为 $366=17\times21+9$，故$[1],[2],\cdots,[9]$中各有 22 个数；$[10],[11],\cdots,[16]$和$[0]$中各有 21 个数.

(i)当 $a,b\in[0]$时，具有性质 P 的子集数为 $C_{21}^2=210$ 个；

(ii)当 $a\in[k],b\in[17-k],k=1,2,\cdots,7$ 时，具有性质 P 的子集数为 $C_{22}^1\cdot C_{21}^1=462$ 个；

(iii)当 $a\in[8],b\in[9]$时，具有性质 P 的子集数为 $C_{22}^1\cdot C_{22}^1=484$ 个.

所以，A 的具有性质 P 的子集数共有 $210+462\times7+484=3928$ 个.

(2)为了使二元子集不相交，当 $a,b\in[0]$时，可搭配出 10 个子集；

当 $a\in[8],b\in[9]$时，可搭配出 22 个子集.

因此，具有性质 P 的两两不相交的子集共有 $10+21\times7+22=179$ 个.

5. (1)因为 A 有 2^k 个子集(包括空集)，且任意两个子集的元素之和互不相等，所以 A 的元素之和至少有 2^k-1 个.

若 $k\geqslant7$，则 $2^k-1>16k$，不可能.

若 $k=6$，考虑 A 的一、二、三、四元子集，共有 $C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4=56$ 个不同的和，且最小的和是 1，最大的和是 $16+15+14+12=57$(其中 $16+13=15+14$，故这 4 个数不能同在 A 中).

若 $1\in A$，则最大的和是 $16+14+12+9=51$(其中 $16=15+1$，故这 3 个数不能同在 A 中；$14=13+1$，故这 3 个数不能同在 A 中；$12=11+1$，故这 3 个数不能同在 A 中；$16+10=14+12$，故这 4 个数不能同在 A 中)，最多有 51 个不同的和. 矛盾.

若 $2\in A$，则最大的和是 $16+15+12+9=52$，最多有 51 个不同的和，矛盾.

若 $1\notin A,2\notin A$，则在$[3,57]$中至多有 55 个和. 矛盾.

故 $k\leqslant5$.

(2)若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$元素的和小于 16，则集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_k,16\}$中无元素的和相等的子集，与 A 的定义矛盾. $A=\{1,2,4,9\}$满足条件，其元素之和 16 是最小的.

若 $16\notin A$，则 $15+14+13+11+8=61$.

若 $16\in A,15\notin A$，则 $16+14+13+12+8=63$；

若 $15\in A,14\notin A$，则 $16+15+13+11+7=62$.

设$\{14,15,16\}\subset A$，则 $13\notin A$.

若 $12\notin A$，则 $16+15+14+11+8=64$.

若 $12\in A$，由于 $11+16=12+15,10+16=12+14$，故设 $9\in A$，因此，集合 $A=\{9,12,14,15,16\}$满足条件，其元素之和 66 是最大的.

6. 设 $n\geqslant3^5$，则 $3,3^2,3^4,3^5\in S_n$，设集合 S_n 分为两组 A 和 B，$3\in A$，且 A 和 B 不满足题中条件，如果 $3^2\in A$，则 $3,3,3^2\in A$，不可能. 因此 $3^2\in B$；如果 $3^4\in B$，则 $3^2,3^2,3^4\in B$，不可能，因此 $3^4\in A$；如果 $3^3\in A$，则 $3,3^2,3^4=3\cdot3^3\in A$，不可能，因此 $3^3\in B$. 于是，由于 $3,3^4\in A$，所以 $3^5\in B$. 这时 B 中三

元 $3^2,3^3,3^5$ 满足 $ab=c$，矛盾. 这表明，当 $n\geqslant 3^5$ 时，把集合 S_n 任意分为两组，总有某个组，具有题中性质，即所求最小值不超过 $3^5=243$.

另一方面，取 $n=242$，且设 $A=\{k\mid 9\leqslant k\leqslant 80\}$，$B=\{k\mid 3\leqslant k\leqslant 8$ 或 $81\leqslant k\leqslant 242\}$，则 $S_{242}=A\cup B$，而且 A 和 B 都不具题中性质，当 $n<242$ 时，将 S_n 分为两组 $A\cap S_n$ 和 $B\cap S_n$，则 $A\cap S_n$ 和 $B\cap S_n$ 也都不具有题中性质.

综上，使得题中条件成立的最小 n 值为 243.

7. 1,4,6,7,9 这五个数中任何两个的差都不是 4 或 7. 各加 11 得 12,15,17,18,20，显然也是这样的数，而且各与前 5 个数中任一个的差也不是 4 或 7. 这样类推，每次连续十一个数中可取五个，一起组成集合 S(注意 $1989=11\times180+9$，最后只有九个数 1981,1982,…,1989，但仍可取五个数 1981,1984,1986,1987,1989). 那么 S 包含的数的个数是 $5\times181=905$.

再证 S 中不可能包含更多的数. 若不然，则上述 181 组数中至少有一组可从中取六个数，使得两两的差不是 4 或 7. 不妨考虑 1,2,…,11 这组数，把它们划分成五个小组：(4,7,11)，(3,10)，(2,6)，(5,9)，(1,8)，其中至少要求有一个小组要取出两个数，显然后面四对数的每一对都不能同时取出，只能在第一小组中取 4,7，于是(3,10)中只能取 10，(2,6)中只能取 2(5,9)中只能取 5，(1,8)中两个数都不能取，也就是说不可能取得第六个数，从而得证.

8. 因为 X 只有有限个偶子集，所以必有偶子集 U 使得 $f(U)$ 达到最大值. 这样的 U 可能不止一个，取使 f 达到最大值的偶子集中元素最少的一个作为 P(若这样的集合不止一个，则任取其一)，然后取 $Q=X-P$. 显然有 $P\cap Q=\phi$，$P\cup Q=X$. 下面证明 P 与 Q 满足题中的要求(ii)和(iii).

因为 $f(D)>1990$，所以最大值 $f(P)>1990$，再来考察 P 的任何一个非空的真偶子集 S. 因为

$f(P)=f(S\cup(P-S))=f(S)+f(P-S)-1990$，而 $P-S$ 是偶子集且元素数少于 P，所以

$f(P-S)<f(D)$，

$f(S)-1990=f(P)-f(P-S)>0$，即 $f(S)>1990$，(ii)成立.

对于 Q 的任何偶子集 T，显然 $f(T\cup P)$ 不能超过最大值 $f(P)$，于是由

$f(T\cup P)=f(T)+f(P)-1990$，

可得 $f(T)-1990=f(T\cup P)-f(P)\leqslant 0$，即 $f(T)\leqslant 1990$，(iii)成立.

注　本题要满足(i)是要求将 X 表示成 $X=P\cup Q$ 且 $P\cap Q=\phi$，这实质上是对 X 进行划分，不过本题还要求这个划分满足(ii)，(iii)，利用极端原理我们找到了 P，从而确定了这个划分，这是解题的关键所在.

9. 为了证本命题，我们埏 N 的一种特殊的子集，若 N 的子集 P 包含有任意有限长度的相继自然数段，则称 P 为 N 的“长子集”. 我们将证明一个加强的命题(I)：若将 N 的长子集 P 分拆成 r 个两两不相交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_r$，则这些子集中必存在某个子集 A 具有性质(*).

先用数学归纳法证明命题(I)，当 $r=1$ 时，命题(I)显然成立，设 $r=n$ 时，命题(I)成立，考察 $r=n+1$ 时的情形.

设长子集 P 分拆成 $n+1$ 个两两不相交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n,A_{n+1}$，$P=A_1\cup\cdots\cup A_n\cup A_{n+1}$，记 $Q=A_1\cup\cdots\cup A_n$，若 Q 是 N 的长子集，则由归纳假设知，命题(I)已经成立. 若 Q 不是长子集，则存在某正整数 m_1，使得 Q 不包含任何相继的 m_1 个自然数，由于 P 是 N 的长子集，因而对于任意给定的 k，集 P 必定含有长约为 km_1 的自然数段，将这个自然数段分成 k 小段 $P_1,P_2,\cdots,P_k$，每小段恰有相继的 m_1 个自然数，由于 Q 不包含长为 k 的相继自然数段，因此对于每个 $P_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 都至少存在一个 $a_i\in P_i$，但 $a_i\notin Q$，因 $a_i\in P$，故必有 $a_i\in A_{n+1}$ 这样，我们已有 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\subseteq A_{n+1}$，显然这样确定的

$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 必满足 $1\leqslant a_{j+1}-a_j\leqslant 2m_1 j=1,2,\cdots,k$. 这就证明了当 $r=n+1$ 时，命题(I)也成立，由数学归纳法原理即知，命题(I)对任何非零自然数 r 成立.

由于 N 也是它自身的长子集，于是由加强的命题(I)即知原命题成立.

第 11 章　等式问题的求解思路

A 组

1. 令 $x_n=\frac{1}{x_1}-1(n=2004)$，则$\frac{a_{n-1}+a_{n-2}\cdot x}{a_n+a_{n-1}\cdot x_1}=\frac{1}{x_1}-1$，即 $\frac{1}{x_1}=\frac{a_{n+1}+a_n\cdot x_1}{a_n+a_{n-1}\cdot x_1}$，亦即 $a_{n+1}\cdot x_1+a_n\cdot x_1^2=a_n+a_{n-1}\cdot x_1$，从而 $a_n\cdot x_1^2+a_nx_1-a_n=0$，即 $x_1^2+x_1-1=0$，故 $x_1=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$.

2. 易知 $x、y、z\in(0,1)$，$1-x,1-y,1-z\in(0,1)$. 一方面，易得 $a=xy+yz+zx-2xyz>xy>0$，当 $x、y\to0$，$z\to1$ 时，$a\to0$. 另一方面，易得 $a=(1-x)x+(1-2x)yz$. (i)当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$1-2x\geqslant0$. 因 $yz\leqslant\left(\frac{y+z}{z}\right)^2=\left(\frac{1-x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^2(1-2x)\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{x+x+1-2x}{3}\right)^2=\frac{7}{27}$. (ii)当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$1-2x<0$. 因为 $yz>0$，所以 $a<(1-x)x\leqslant\frac{1}{4}$. 综上所述，有 $a\in(0,\frac{7}{27}]$.

3. 令 $y=1$，得 $f(x)+f(1)=f(x+1)-x-1$，即 $f(x+1)=f(x)+x+2$. 令 $x=0$，得 $f(1)=f(0)+2$. 由 $f(1)=1$ 知 $f(0)=-1$，当 $n\in\mathbf{N}$ 时，$f(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]+f(0)=\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)+f(0)=\frac{1}{2}n(n+3)-1$. 同理，$f(-n)=-\frac{1}{2}n(-n+3)-1$. 所以，$f(n)=\frac{1}{2}n(n+3)-1$，$n\in\mathbf{Z}$. 令 $f(n)=n$，解得 $n=-2$ 或 $n=1$，故求 n 为 2 个.

4. 由 $f(x)$的性质，得 $f(x)=x^2-f(x-1)$.

反复使用上述公式，可得

$$\begin{aligned}f(94)&=94^2-f(93)\\&=94^2-93^2+f(92)\\&=94^2-93^2+92^2-f(91)\\&\cdots\\&=94^2-93^2+92^2-91^2+\cdots+20^2-f(19)\\&=187+183+\cdots+43+400-94\\&=\frac{187+43}{2}\cdot\left(\frac{187-43}{4}+1\right)+400-94\\&=4561.\end{aligned}$$

因此，$f(94)$除以 1000 的余数是 561.

5. 由已知，

$(a_i,a_{2i})=(i,2i)=i$，

所以，对于任意自然数 i，a_i 都可以被 i 整除.

如果对某个自然数 i，有 $a_i>i$，那么由已知可得$(a_{a_i},a_i))=(a_i,i)=i$.　　①

由前面的证明可得：a_{a_i} 可被 a_i 整除，

从而有 $(a_{a_i}, a_i) = a_i$. ②

由①和②得

$a_i = i$，矛盾.

故对任意自然数 i，都有 $a_i \leqslant i$，于是我们可得 $a_i = i, i = 1, 2, \cdots$.

6. 用递推关系可得

$$\begin{aligned} a_6 &= a_5(a_4+2a_3) = a_4(a_3+2a_2)(a_4+2a_3) \\ &= a_3(a_2+2a_1)(a_3+2a_2)[a_3(a_2+2a_1)+2a_3] \\ &= a_3^2(a_3+2a_2)(a_2+2a_1)(a_2+2a_1+2). \end{aligned}$$

因为 $a_6 = 2288 = 2^4 \times 11 \times 13$，所以由 a_2+2a_1+2 与 a_2+2a_1 相差 2，且都是 2288 的因子，则只能有

$a_2+2a_1 = 11, a_2+2a_1+2 = 13$.

从而 $a_3^2(a_3+2a_2) = 2^4$，

由此可得 a_3 只能为 1 或 2. 若 $a_3 = 1$，则 $a_2 = \frac{12}{5}$ 不是自然数，矛盾！所以 $a_3 = 2, a_2 = 1$，再由 $a_2 + 2a_1 = 11$，得 $a_1 = 5$.

7. 在所给等式两端同乘 $x - \sqrt{x^2+1}$，得

$-(y+\sqrt{y^2+1}) = x - \sqrt{x^2+1}$. ①

在所给等式两端同乘 $y - \sqrt{y^2+1}$，得

$-(x+\sqrt{x^2+1}) = y - \sqrt{y^2+1}$. ②

①+②得

$-y-x = x+y$，即 $x+y=0$.

8. 我们有

$$\begin{aligned} &\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)} + \frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)} + \cdots + \frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)} \\ &= \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1+a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2+a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n+a_1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1+a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_2+a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n+a_1}\right) \\ &= \frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)} + \frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)} + \cdots + \frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}. \end{aligned}$$

9. 若 $x+y+z+t \neq 0$，则

$$\frac{x}{y+z+t} = \cdots = \frac{t}{x+y+z} = \frac{x+y+z+t}{3(x+y+z+t)} = \frac{1}{3},$$

从而 $x=y=z=t$，

$$\frac{x+y}{z+t} + \cdots + \frac{t+x}{y+z} = 4.$$

若 $x+y+z+t=0$，则 $\frac{x+y}{z+t} = \cdots = \frac{t+x}{y+z} = -1$，

所以 $\frac{x+y}{z+t} + \cdots + \frac{t+x}{y+z} = -4$.

10. 由递推关系得

$a_3=6,a_4=13,a_5=27,a_6=56.$

故猜想:当 $n>3$ 时,$a_n>2a_{n-1}$.

用数学归纳法证明猜想.

显然 $a_4>2a_3,a_5>2a_4$.

设 $a_k>2a_{k-1},a_{k-1}>2a_{k-2}$.则

$$a_{k+1}=3a_k-a_{k-1}-2a_{k-2}=2a_k+(a_k-a_{k-1})-2a_{k-2}$$
$$>2a_k+a_{k-1}-2a_{k-2}>2a_k.$$

由数学归纳法原理知,猜想得证,于是我们有

$$a_n>2a_{n-1}>2^2a_{n-2}>\cdots>2^{n-3}a_3=3\times2^{n-2}.$$

11. 由题设可知,$b_1\notin\{0,5\}$,所以 $b_2\in\{2,4,6,8\}$,从而推知:序列 $b_2,b_3,\cdots$以 4 为周期,且有以下形式:

$\cdots2,4,8,6,2,4,8,6,\cdots$因此,对任何 $n>1$,都有

$$a_{n+4}=a_n+(2+4+8+6)=a_n+20;$$

对任何 $s>1$,都有

$$a_{n+4s}=a_n+20s.$$

在序列的两项 $a_n=10m+2$ 和 $a_{n+1}=10m+4$ 中,至少有一项是 4 的倍数. 即存在 $a_{n_1}=4l,l\in\mathbf{N}$.

于是,我们就有

$$a_{n_1}+4s=4l+20s=4(l+5s),s\in\mathbf{N}.$$

注意到数列

$$2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7,\cdots$$

中的各项被 5 除所得的余数构成一个周期数列

$$1,2,4,3,1,2,4,3\cdots$$

由于 kl 被 5 除所得余数只可能是 1,2,3 或 4. 因此存在无穷多个 k 使得 $2^k=l(\mathrm{mod}5)$,且 $2^k>l$,令

$$s_k=\frac{2^k-l}{5}\in\mathbf{N}.\text{ 则}$$

$$a_{n_1}+4s_k=4(l+5s_k)=4\times2^k=2^{k+2}.$$

从而命题得证.

12. (1)$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{c+a}$等价于

$$\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}.\text{ 即 }\quad\frac{a-b}{(b+c)(c+a)}=\frac{b-c}{(c+a)(a+b)}.$$

它又等价于 $(a-b)(a+b)=(b+c)(b-c)$,即 $2b^2=a^2+c^2$.

(2)由于

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$
$$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

所以,原式$=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$

(3)由于$\frac{p}{q}<\frac{a}{b}$,所以$0<\frac{a}{b}-\frac{p}{q}=\frac{aq-bp}{bq}$,$aq-bp$是一正整数,因而$\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\geq\frac{1}{bq}$.

同样,$\frac{r}{s}-\frac{a}{b}\geq\frac{1}{bs}$.

从而 $\frac{r}{s}-\frac{p}{q}=\left(\frac{r}{s}-\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right)\geq\frac{1}{bq}+\frac{1}{bs}=\frac{q+s}{bqs}$.

另一方面,

$$\frac{r}{s}-\frac{p}{q}=\frac{rq-ps}{sq}=\frac{1}{sq},$$

所以 $\frac{1}{sq}\geq\frac{s+q}{bqs}$,即 $b\geq q+s$.

B组

1. 因为$2+h(1)=2+1=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=2h(2)$,所以$n=2$时,命题成立.

假定命题对某个$n\geq2$成立,即

$$n+h(1)+h(2)+\cdots+h(n-1)=nh(n),$$

那么两边各加$1+h(n)$,得

$$\begin{aligned}&n+1+h(1)+h(2)+\cdots+h(n-1)+h(n)\\&=nh(n)+1+h(n)=(n+1)h(n)+1\\&=(n+1)\left[h(n+1)-\frac{1}{n+1}\right]+1=(n+1)h(n+1).\end{aligned}$$

即命题对$n+1$成立.

根据数学归纳原理,命题得证.

2. 由所给的例子猜想一般规律

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)},n=1,2,3,\cdots, \quad ①$$

因为 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}$,

所以,①式是成立的.

把①式写成等价形式

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},n=1,2,3,\cdots$$

于是,我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\cdots+\frac{1}{j(j+1)}\\&=\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)+\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)\\&=\frac{1}{i}-\frac{1}{j+1}.\end{aligned}$$

设 $\frac{1}{n}=\frac{1}{i}-\frac{1}{j+1}$, ②

于是我们只需证明存在正整数 i 和 j 使②式成立.

将①式中的 n 改为 $n-1$,得

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)n}.$$

因此,当 $i=n-1,j+1=(n-1)n$ 时,②式成立,故原命题得证.

3. 由 $a_1=a_{1+0}=\frac{1}{2}(a_2+a_0)-1$,所以 $a_2=13$. 对于 $n\geqslant 1$ 由假设可知

$$a_{2n}=a_{n+1+n-1}=\frac{1}{2}(a_{2n+2}+a_{2n-2})-4,$$

所以记 $b_n=a_{2n}$,得到

$b_0=11,b_1=13$,且 $b_{n+1}=2b_n-b_{n-1}+8,n\geqslant 1.$

由此可得 $\sum\limits_{k=1}^{n}b_{k+1}=2\sum\limits_{k=1}^{n}b_k-\sum\limits_{k=1}^{n}b_{k-1}+8n,$

即 $b_{n+1}=b_n+b_1-b_0+8n=b_n+8n+2.$

于是得到 $b_{n+1}=b_1+2n+8\sum\limits_{k=1}^{n}k=4n^2+6n+13.$

再由 $b_0=11,b_1=13$,从而

$b_n=4(n-1)^2+6(n-1)+13=4n^2-2n+11,n=0,1,2,\cdots$

即 $a_{2n}=4n^2-2n+11,n=0,1,2,\cdots$

对任何 $n\geqslant 0$,利用假设可得

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n+0}=\frac{1}{2}(a_{2n}+a_0)-n^2\\&=\frac{1}{2}(4n^2-2n+11+11)-n^2\\&=n^2-n+11.\end{aligned}$$

从而 $a_{45}=45\cdot 44+11=1991.$

4. 我们证明更一般的结论:

对任意 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,按题述方法所求的和 $\sum\frac{1}{Q(\sigma)}=S(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}.$

对 n 进行归纳.

当 $n=1$ 时,$S(a_1)=\sum\frac{1}{Q(\sigma)}=\frac{1}{a_1}$,因此 $n=1$ 时结论成立.

假设 $n=k$ 时,结论成立.我们来证明 $n=k+1$ 时结论成立.

事实上,$k+1$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}$ 的 $(k+1)!$ 个排列可分为 $k+1$ 类,每类中的 $k!$ 个排列以同一元素 a_i 为末数.这种排列的 $Q(\sigma)$ 最后一个因子为 $S_{k+1}(\sigma)=a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}$. 前 k 个因子恰是由另外 k 个元素的所有可能排列所给出.

由归纳假设,这 $k!$ 个排列的 $\frac{1}{Q(\sigma)}$ 之和为

$$\frac{a_i}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}S_{k+1}(\sigma)}.$$

对 i 求和即得

$$\sum\frac{1}{Q(\sigma)}=S(a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})$$

$$=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}S_{k+1}(\sigma)}\cdot\sum_{i=1}^{k+1}a_i$$

$$=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}.$$

根据数学归纳原理,要证的一般结论成立.

于是本题的结果为

$$\sum\frac{1}{Q(\sigma)}=\frac{1}{1\cdot2\cdot2^2\cdots2^{n-1}}=2^{-\frac{n(n-1)}{2}}.$$

5. 对任 $k\in\mathbf{N}$,由已知

$$f(f(k))=3k, \quad ①$$

$$f(f(f(k)))=f(3k).$$

又由由知 $f(f(f(k))=3f(k)$,

所以 $f(3k)=3f(k)$. ②

若 $f(1)=1$,则代入①得 $f(1)=3$. 矛盾.

所以 $f(1)=a>1$.

但由①,$f(f(1))=f(a)=3$,

由 $f(x)$的严格递增性得

$$3=f(a)>f(1)>1,$$

所以 $f(1)=2,a=2,f(2)=3$.

再由②得,$f(3)=3f(1)=6,f(6)=3f(2)=9$,

$$f(9)=3f(3)=18,f(18)=3f(6)=27,$$

$$f(27)=3f(9)=54, \quad ③$$

$$f(54)=3f(18)=81. \quad ④$$

由③和④,自变量从 27 到 54,增加 27 个数,对应的函数值从 54 到 81,也增加 27 个数. 由函数 $f(x)$ 的严格递增性可知,当自变量从 27 到 54 之间每增加 1,对应的函数值也增加 1. 因此有

$f(28)=55,f(29)=56,f(30)=57,f(31)=58,f(32)=59$,再由②得

$$f(96)=3f(32)=177.$$

因此

$$f(1)+f(9)+f(96)=2+18+177=197.$$

6. 不妨设 $a_0=2$. 于是当 $n=0$ 时,仍有

$$a_{n+3}=\frac{1993+a_{n+2}\cdot a_{n+1}}{a_n}.$$

由已知,得

$$a_{n+3}\cdot a_n=1993+a_{n+2}\cdot a_{n+1}, \quad ①$$

以 $n+1$ 换 n 得

$$a_{n+4}\cdot a_{n+1}=1993+a_{n+3}\cdot a_{n+2}, \quad ②$$

①-②得

$$a_{n+3}\cdot a_n-a_{n+4}\cdot a_{n+1}=a_{n+2}\cdot a_{n+1}-a_{n+3}\cdot a_{n+2},$$

即 $\dfrac{a_{n+4}+a_{n+2}}{a_{n+2}+a_n}=\dfrac{a_{n+3}}{a_{n+1}}$. ③

在③式中依次令 $n=0,2,\cdots,2m-2$，相乘得 $\frac{a_{2m+2}+a^{2m}}{a_2+a_0}=\frac{a_{2m+1}}{a_1}$，

即 $a_{2m+2}+a_{2m}=3a_{2m+1}$. ④

在③式中依次令 $n=1,3,\cdots,2m-1$，相乘得 $\frac{a_{2m+3}+a_{2m+1}}{a_3+a_1}=\frac{a_{2m+2}}{a_2}$，

即 $a_{2m+3}+a_{2m+1}=998a_{2m}$. ⑤

由已知，当 $n=1,2,3$，时，a_n 为整数.

设 $n=2k,2k+1$ 时，a_n 为整数，于是由④可知

$a_{2k+2}=3a_{2k+1}-a_{2k}$

为整数；由⑤可知

$a_{2k+3}=998a_{2k}-a_{2k+1}$

为整数. 由数学归纳法原理可知，对于任意自然数 n，a_n 均为整数.

7. 设 $a_1,a_2,\cdots$ 的公差为 d_1；$b_1,b_2,\cdots$ 的公差为 d_2. 则

$A_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d_1$，$B_n=nb_1+\frac{n(n-1)}{2}d_2$，

$\frac{A_n}{B_n}=\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2b_1+(n-1)d_2}$.

由已知条件知，对一切 $n\in\mathbf{N}$，有

$$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2b_1+(n-1)d_2}=\frac{2n-1}{3n+1}. \quad ①$$

在①式中，令 $n=1$ 得

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{1}{4},b_1=4a_1. \quad ②$$

在①式中，令 $n\to+\infty$ 得 $\frac{d_1}{d_2}=\frac{2}{3}$，$d_2=\frac{3}{2}d_1$. ③

在①式中，令 $n=2$ 得 $\frac{2a_1+d_1}{2b_1+d_2}=\frac{3}{7}$.

利用②和③将上式化为

$\frac{2a_1+d_1}{8a_1+\frac{3}{2}d_1}=\frac{3}{7}$，化简得 $d_1=4a_1$.

于是 $d_2=\frac{3}{2}d_1=6a_1$，

故 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+(n-1)d_1}{b_1+(n-1)d_2}=\frac{a_1+(n-1)\cdot 4a_1}{4a_1+(n-1)\cdot 6a_1}$

$=\frac{1+4(n-1)}{4+6(n-1)}=\frac{4n-3}{6n-2}$.

8. (1) 记 $\sin\alpha=x$，满足该式的 α 必然具有形式

$k\pi+(-1)^k\arcsin x$，

其中 k 为整数. 于是，相应的 $\frac{\alpha}{2}$ 的值对应于单位圆上的 4 个点：

$\frac{1}{2}\arcsin x$，$\frac{1}{2}\arcsin x+\pi$.



$\frac{1}{2}(\pi-\arcsin x),\frac{1}{2}(3\pi-\arcsin x)$.

从而，$\sin\frac{\alpha}{2}$至多取4个不同值.

另一方面，当$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\alpha=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{3},\frac{8\pi}{3},\cdots\sin\frac{\alpha}{2}$可以取到4个不同的值.

$\sin\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{3},\sin\frac{7\pi}{6},\sin\frac{4\pi}{3}$.

(2)相应的$\frac{\alpha}{3}$的值对应于单位圆上的6个点：

$\frac{1}{3}\arcsin x,\frac{1}{3}(2\pi+\arcsin x),\frac{1}{3}(4\pi+\arcsin x)$,

$\frac{1}{3}(\pi-\arcsin x),\frac{1}{3}(3\pi-\arcsin x),\frac{1}{3}(5\pi-\arcsin x)$.

但后三个点与前三个点有以下关系：

$\frac{1}{3}(\pi-\arcsin x)=\pi-\frac{1}{3}(2\pi+\arcsin x)$,

$\frac{1}{3}(3\pi-\arcsin x)=\pi-\frac{1}{3}\arcsin x)$,

$\frac{1}{3}(5\pi-\arcsin x)=3\pi-\frac{1}{3}(4\pi+\arcsin x)$,

所以$\sin\frac{\alpha}{3}$至多取3个不同的值.

又因为$\sin\alpha=0$时，$\alpha=0,2\pi,4\pi,0,\cdots,\sin\frac{\alpha}{3}$可以取到3个不同的值.

$\sin 0,\sin\frac{2\pi}{3},\sin\frac{4\pi}{3}$.

9. 设$m\in\mathbf{N}$，使得$n^4-4n^3+22n^2-36n+18=m^2$，配方后得

$(n^2-2n+9)^2-63=m^2$. ①

于是，$63=(n^2-2n+9)^2-m^2=(n^2-2n+9-m)(n^2-2n+9+m)$.

注意到，$n^2-2n+9+m=(n-1)2+m+8\in\mathbf{N}$，所以，必有

$\begin{cases}n^2-2n+9-m=1,3,7,\\n^2-2n+9+m=63,31,9.\end{cases}$

而$n^2-2n+9=31,12$或8，分别求解得n只能为1或3(对应的$m=1,9$).

注：在得到式①后，还可用不等式估计来处理.

第12章 方程问题的求解思路

A组

1. 由已知得

$x^3-x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$,

所以

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0,\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\\ \alpha\beta\gamma=1.\end{cases}$$

于是，我们有

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}=2\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}\right)-3$$

$$=2\left(\frac{3-2(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}\right)-3$$

$$=2\left(\frac{3-1}{1-1-1}\right)-3=-7.$$

2. 设 $y=x-1$，则$[y^2]=[y]^2$.

若 $y\geqslant 0$，则 $y^2\geqslant[y]^2>y^2-1$.

所以 $[y]\leqslant y<\sqrt{1+[y]^2}$.

即 $x\in[n+1,1+\sqrt{1+n^2})$，对于任意 $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$，

若 $y<0$，则 $[y]^2\geqslant y^2\geqslant[y^2]$，

所以必须 y 为整数，才能有$[y^2]=[y]^2$，即 x 为负整数或 0.

3. 设 x 是给定方程的根，且$[x]=n$，由原方程得 $x^2+7=8n$.

这表明 $n>0$，利用 $n\leqslant x<n+1$，得

$n^2+7\leqslant x^2+7<(n+1)^2+7=n^2+2n+8$.

用 $8n$ 代 x^2+7，得关于 n 的不等式

$n^2+7\leqslant 8n<n^2+2n+8$，

即 $$\begin{cases}n^2-6n+8>0,\\ n^2-8n+7\leqslant 0.\end{cases}$$

解得 $1\leqslant n<2$ 或 $4<n\leqslant 7$.

所以 $n=1,5,6,7$.

$n=1$ 得 $x=1$，

$n=5$ 得 $x=\sqrt{33}$，

$n=6$ 得 $x=\sqrt{41}$，

$n=7$ 得 $x=7$.

4. 令 $S_n=[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 n]$.

显然，对非负整数 k，有 2^k 个正整数

$2^k,2^k+1,2^k+2,\cdots,2^{k+1}-1$

使得当 x 等于这 2^k 个正整数的任一个时，都有$[\log_2 x]=k$. 因此，对于任意的正整数 r，都有

$$S_{2^r-1}=0+(1+1)+(2+2+2+2)+\cdots+[\underbrace{(r-1)+(r-1)+\cdots+(r-1)}_{2^{r-1}\text{个}}].$$

这个表达式的右边有

2^r-2^1 项不小于 1；

2^r-2^2 项不小于 2；

2^r-2^3　项不小于 3；

…

2^r-2^{r-1}　项不小于 $r-2$；

2^r-2^{r-1}　项不小于 $r-1$.

因此，

$$\begin{aligned}S_{2^r-1}&=(2^r-2^1)+(2^r-2^2)+\cdots+(2^r-2^{r-2})+(2^r-2^{r-1})\\&=(r-1)\cdot 2^r-(2^r-2)\\&=(r-2)\cdot 2^r-2.\end{aligned}$$

当 $r=8$ 时，由上式得　$S_{255}=1539<1994$.

当 $r=9$ 时，由上式得　$S_{511}=3586>1994$.

可见，如果 $S_n=1994$，那么 $255<n<511$.

于是我们有

$$1994=S_n=S_{255}+(n-255)\cdot 8,\text{即}\quad 1994=8n-502.$$

解得　$n=312$.

5. 根据柯西不等式

$$\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt[4]{x^3}\right)^2\leqslant\left[\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2+(\sqrt[4]{x})^2\right]\cdot\left[1^2+(\sqrt{x})^2\right],$$

因　$\sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt[4]{x^3}=\sqrt{x+1}$,

则　$\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt[4]{x^3}\right)^2=\left[\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2+(\sqrt[4]{x})^2\right]\cdot\left[1+(\sqrt{x})^2\right]=x+1$.

又根据柯西不等式取等号的条件，有且仅有

$$\begin{cases}\sqrt{1-\sqrt{x}}=k\cdot 1,\\ \sqrt[4]{x}=k\sqrt{x}\,(k\text{ 为常数}).\end{cases}$$

解之得原方程的根为　$x=0$.

6. 根据柯西不等式

$$\left(x\sqrt{14-3y^2}-y\sqrt{21-3x^2}\right)^2\leqslant\left[x^2+\left(\sqrt{7-x^2}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt{14-3y^2}-y\sqrt{21-3x^2}\right)^2\right],$$

因　$x\sqrt{14-3y^2}-y\sqrt{21-3x^2}=7\sqrt{2}$,

则　$\left(x\sqrt{14-3y^2}-y\sqrt{21-3x^2}\right)^2=\left[x^2+\left(\sqrt{7-x^2}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt{14-3y^2}\right)^2+(-\sqrt{3}y)^2\right]=98$.

又根据柯西不等式取等号的条件，有且仅有

$$\begin{cases}x=k\sqrt{14-3y^2},\\ \sqrt{7-x^2}=k(-\sqrt{3}y).\,(k\text{ 为常数})\end{cases}$$

消去 k，化简整理，得

$2x^2+3y^2=14$ 且 x 与 y 异号（$xy<0$）.

另外由原方程知　$-\sqrt{7}\leqslant x\leqslant\sqrt{7}$,

且　$-\dfrac{\sqrt{42}}{3}\leqslant y\leqslant\dfrac{\sqrt{42}}{3}$,

再解不定方程　$2x^2+3y^2=14$,

得原方程的整数解为　$\begin{cases}x=1,\\ y=-2.\end{cases}$

7. 设 x 是原方程的一个整数解,那么,一定存在整数 n,使得

$$\frac{\pi}{8}(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}=2n\pi,$$

即 $9x^2+160x+800=(3x-16n)^2$,

$x(3n+5)=8n^2-25$,

但 $8n^2-25=\frac{8}{9}(3n+5)(3n-5)-\frac{25}{9}$,

因此 $x(3n+5)=\frac{8}{9}(3n+5)(3n-5)-\frac{25}{9}$,

$8(3n+5)(3n-5)-9x(3n+5)=25$,

$$(3n+5)(24n-40-9x)=25. \quad ①$$

$3n+5\in\{\pm1,\pm5,\pm25\}$.

注意到 n 是整数,得

$n\in\{-2,0,-10\}$.

将 $n=-2$ 代入①得 $x=-7$;

将 $n=0$ 代入①得 $x=-5$;

将 $n=-10$ 代入①得 $x=-31$.

经检验,$x=-5$ 是增根.故原方程的所有整数解为

$x=-7$ 或 $x=-31$.

8. 方程组变形为

$(\alpha-1)^3+2(\alpha-1)-14=0$,

$(\beta-1)^3+2(\beta-1)+14=0$.

两式相加得 $(\alpha-1)^3+(\beta-1)^3+2(\alpha+\beta-2)=0$,

即 $(\alpha+\beta-2)[(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2-(\alpha-1)(\beta-1)+2]=0$.

但当 x,y 都为实数时,等式

$x^2+y^2-xy+2=0$

不成立,否则 $x=\frac{y\pm\sqrt{-3^2-8}}{2}$ 与 x 为实数矛盾.

所以 $\alpha+\beta-2=0$,即 $\alpha+\beta=2$.

9. 如果 $n<20$,那么我们用方程②减去方程①的十倍,得

$$9\sin x_1-8\sin x_2-\cdots-\sin x_9+\sin x_{11}+2\sin x_{12}+\cdots+(n-10)\sin x_n=100. \quad ③$$

③式左端的绝对值不大于 $(9+8+\cdots+1)\times2=90$,因此③式不可能成立.故原方程组当 $n<20$ 时无解.

当 $n=20$ 时,我们可取 $x_1,x_2,\cdots,x_{20}$ 使

$\sin x_i=-1(i=1,2,\cdots,10)$;

$\sin x_j=1(j=11,12,\cdots,20)$.

这样取得的 $x_1,x_2,\cdots,x_{20}$ 显然是 $n=20$ 时原方程组的解.

故要使原方程组有解,n 的最小值是 20.

10. 将方程组中的方程相加,得

$(a+b+c)x^2+(a+b+c)x+(a+b+c)=0$,

由此 $(a+b+c)(x^2+x+1)=0$.

因为对任意实数 x,$x^2+x+1\neq0$,所以方程组有解的必要条件是 $a+b+c=0$.

反过来,如果 $a+b+c=0$,则 $x=1$ 显然是方程组的解.

因此,$a+b+c=0$ 也是方程组有解的充分条件.

11.(1)由韦达定理得

$$\begin{cases}a+b+c=1,\\ ab+bc+ca=-1,\\ abc=1.\end{cases}$$

若 a,b,c 中有两个相等,不妨设 $a=b$. 则代入上式可得

$$\begin{cases}2a+c=1, & ①\\ a^2+2ac=-1, & ②\\ a^2c=1. & ③\end{cases}$$

由③得 $c>0$,再由②得 $a<0$.

由①得

$$c=1-2a,$$

代入②并整理得

$$3a^2-2a-1=0,$$

从而有 $a=1,a=-\frac{1}{3}$,考虑到 $a<0$,故取 $a=-\frac{1}{3}$. 由 $a=b$ 得 $b=-\frac{1}{3}$. 又代入①得 $c=\frac{5}{3}$. 但此时不满足③,出现矛盾. 故 a,b,c,互不相等.

(2)设 $S_n=\frac{a^n-b^n}{a-b}+\frac{b^n-c^n}{b-c}+\frac{c^n-a^n}{c-a}$.

我们来证明一个更一般的命题:对于任何自然数 n,S_n 都是整数.

事实上,$S_0=0,S_1=3$ 都是整数. 另外 $S_2=(a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c)=2$ 也是整数. 假设 $n=k-3,n=k-2,n=k-1$ 时,S_n 都是整数. 则当 $n=k$ 时($k\geqslant3$),我们有

$$S_k=\frac{a^k-b^k}{a-b}+\frac{b^k-c^k}{b-c}+\frac{c^k-a^k}{c-a}.$$

但由 $a^3-a^2-a-1=0$ 即 $a^3=a^2+a+1$ 可得

$$a^k=a^{k-1}+a^{k-2}+a^{k-3}.$$

同理可得

$$b^k=b^{k-1}+b^{k-2}+b^{k-3},$$

$$c^k=c^{k-1}+c^{k-2}+c^{k-3},$$

于是

$$S_k=S_{k-1}+S_{k-2}+S_{k-3},$$

由归纳假设可知 S_k 也是整数.

根据数学归纳原理,对于任何非负整数,n,S_n 都是整数. 从而 $n=1982$ 时,S_{1982} 也是整数.

12. 设 $\alpha=(a+\sqrt{a^2+1})^{\frac{1}{3}}$,$\beta=(a-\sqrt{a^2+1})^{\frac{1}{3}}$,则

$$b^3=(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2a-3b.$$

即 $b^3=2a-3b.$ ①

也就是说，b 是三次方程

$$x^3+3x-2a=0 \quad ②$$

的一个根.

必要性：设 b 是一个正整数，由①有 $a=\frac{1}{2}b(b^2+3)$，b 是偶数时，a 是正整数；b 是奇数时，b^2+3 是偶数，a 也是正整数. 所以 a 是一个形如 $\frac{1}{2}n(n^2+3)$ 的正整数.

充分性：设 $a=\frac{1}{2}n(n^2+3)(n\in\mathbf{N})$，则 $x=n$ 是方程②的一个根，又因为当 $x_1<x_2(x_1,x_2\in\mathbf{R})$ 时，

$$(x_1^3+3x_1-2a)-(x_2^3+3x_2-2a)$$
$$=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+3)$$
$$=(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2+3\right]<0,$$

所以函数 $f(x)=x^3+3x-2a$ 是严格递增的，从而方程②仅有惟一根 $x=n$. 又因为 b 是方程②的一个根，所以 $b=n$，即 b 是一个正整数.

B组

1. 将原方程变形、化简，得

$x^3-ax^2+23x-b=0.$

因为三次方程在实数范围内要么有一个根、要么有三个根，所以这三个根要么有一个根为 1 或 -1，且另外两个根不等；要么没有根是 ±1，但有一个二重根. 由于这两个根的和为 12，则这三个根只能是下列三种情况之一：

$(-1,s,12-s)$、$(1,s,12-s)$、$(s,s,12-s)$，且 $s\notin\{-1,1,6,11,13\}$.

若 $(x_1,x_2,x_3)=(-1,s,12-s)$，由韦达定理得

$a=11,s^2-12s+35=0,b=-s(12-s)$.

所以，$s=5$ 或 7，$b=-35$.

从而，$(a,b)=(11,-35)$.

若 $(x_1,x_2,x_3)=(s,s,12-s)$，同理可得

$a=s+12,s^2-24s+23=0,b=s^2(12-s)$.

所以，$s=1$ 或 23.

将 $s=1$ 舍去，得 $a=35,b=-5819$.

从而，$(a,b)=(35,-5\,819)$.

综上所述，有两组 (a,b) 满足条件，分别为 $(11,-35)$，$(35,-5819)$.

2. 显然 $p\neq0$，且若 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是原方程组的解，则将 p 改为 $-p$ 时 $(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)$ 也是原方程组的解.

不妨假设 $p>0$，且 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是原方程组的解，则 $x_i>0,i=1,2,\cdots,n$. 因为 $x_i^4+\frac{2}{x_i^2}\geqslant2\sqrt{2}x_i$，所以，$p^nx_1x_2\cdots x_n\geqslant(2\sqrt{2})^nx_1x_2\cdots x_n$，即 $p\geqslant2\sqrt{2}$.

当 $p=2\sqrt{2}$时,由 $x_i^4=\frac{2}{x_i^2}$,得 $x_i=\sqrt[6]{2}$,有惟一一组解,不合题意.

当 $p>2\sqrt{2}$时,则原方程组至少有两组解.如令 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$,则 $x=\left(\frac{p\pm\sqrt{p^2-8}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

综上所述,p 的取值范围为

$(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$.

3. 设复数 $\alpha=x(\cos A+i\sin A)$,$\beta=y(\cos B+i\sin B)$,

$\gamma=z(\cos C+i\sin C)$,设 α、β、γ 是三次方程 ①

的三个根,由韦达定理知:

$a=\alpha+\beta+\gamma=x\cos A+y\cos B+z\cos C+iF_1=$实数,

$b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

$=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)]$

$=\frac{1}{2}[a^2-(x^2\cos 2A+y^2\cos 2B+z^2\cos 2C+iF_2)]$

$=\frac{1}{2}[a^2-x^2\cos 2A-y^2\cos 2B-z^2\cos 2C]=$实数;

$c=\alpha\beta\gamma=xyz[\cos(A+B+C)+i\sin(A+B+C)]$

$=\pm xyz=$实数,

可见方程①是以 α、β、γ 为根的系数三次方程.

现设 $S_r=\alpha^r+\beta^r+\gamma^r$($r$ 为正整数),则欲证对一切正整数 r,有 $F_r=0$,只需证对一切正整数 r,S_r 是实数就行了.以下用数学归纳法证明 S_r 是实数.

已知 $F_1=F_2=0$,所以 $S_1=\alpha+\beta+\gamma$,$S_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 均为实数,且 $S_0=\alpha^0+\beta^0+\gamma^0=3$ 也是实数.若 S_{r-2}、S_{r-1}、S_r 均为实数,则对于 S_{r+1},由于 α、β、γ 满足方程①,故有等式

$S_{r+1}-aS_r+bS_{r-1}-cS_{r-2}=0$

成立.即有 $S_{r+1}=aS_r-bS_{r-1}+cS_{r-2}$.

因为 a、b、c 均为实数,S_r,S_{r-1}、S_{r-2}均为实数,由上式知 S_{r+1}也是实数.

因此对一切正整数 r,有 $F_r=0$.

4.(1)由均值不等式得

$1=\frac{1}{3}(a^{f(x)}+a^{g(x)}+a^{h(x)})\geqslant\sqrt[3]{a^{f(x)+g(x)+h(x)}}\geqslant\sqrt[3]{a^0}=1$.

所以,x 若是原方程的解,当且仅当

$a^{f(x)}=a^{g(x)}=a^{h(x)}$,$f(x)+g(x)+h(x)=0$,

即 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

(2)原方程等价于

$2^{(1+\cos\pi x)\log_2 5}+2^{x^2-1}+2^{2(1-|x|)}=3$.

设 $f(x)=(1+\cos\pi x)\log_2 5$,$g(x)=x^2-1$,$h(x)=2(1-|x|)$,则

$f(x)+g(x)+h(x)=(1+\cos\pi x)\log_2 5+(|x|-1)^2\geqslant 0$.

由(1)知函数 f、g、h 有公共根,即 $x=1$ 或 -1.

5. 当 $x=1$ 及 $x=-1$ 时,得

$P(1)=P(0)=P(-1)$.

设 $P(0)=d$, $P(x)=x(x-1)(x+1)Q(x)+d$, 代入原等式并消去 $x(x-1)(x+1)$ 得

$(x-2)Q(x-1)+(x+2)Q(x+1)=2xQ(x)$.

由题设知，当 $x\neq 0,\pm 1$ 时，上式均成立. 故多项式 $(x-2)Q(x-1)+(x+2)Q(x+1)-2xQ(x)$ 的根的个数大于多项式的次数，则该多项式恒为 0.

令 $Q(2)=a$，当 $x=2$ 时，有

$0\cdot Q(1)+4Q(3)=4Q(2)$，即 $Q(3)=a$.

若 $Q(n)=Q(n+1)=a$，则

$$Q(n+2)=\frac{2(n+1)Q(n+1)-(n-1)Q(n)}{n+3}=a.$$

所以，$Q(x)\equiv a$.

因此，$P(x)=ax(x-1)(x+1)+d=ax^3-ax+d$. 其中 a、d 为常数.

6. 用 $f(x)$ 代替原方程中的 x，得

$f(f(x)f(y))=f(f(x)y)+f(x)$.

交换原方程中的 x、y 得

$f(yf(x))=f(yx)+y$,

于是，$f(f(x)f(y))=f(yx)+y+f(x)$.

将 x、y 交换，左端的值不变，从而，有

$f(yx)+y+f(x)=f(xy)+x+f(y)$,

即 $f(x)-x=f(y)-y$.

因此，$f(x)-x$ 为常数.

设 $f(x)=x+c$，其中 c 为实数，代入在方程得

$f(xf(y))=xf(y)+c=x(y+c)+c=xy+cx+c$,

$f(xy)+x=xy+c+x$.

于是，$c=1$. 所求函数为 $f(x)=x+1$.

7. 由条件可知，对一切 $n\in\mathbf{N}$，有

$$1\leqslant 3f(n)(f(2n+1)-f(2n))=f(2n)<6f(n). \quad ①$$

因此

$1\leqslant f(2n+1)-f(2n)<2$,

$$f(2n+1)=f(2n)+1. \quad ②$$

将②代入①得到

$$f(2n)=3f(n). \quad ③$$

利用②和③，通过数学归纳法可以证明

$f(2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_s})=3^{n_1}+3^{n_2}+\cdots+3^{n_s}$,

这里的非负整数 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 适合

$0\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_s$.

记 $k=2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_s}$,

$l=2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_t}$,

其中 $n_1<n_2<\cdots<n_s$, $m_1<m_2<\cdots<m_t$.

当 $k<l$ 时,显然有 $f(k)<f(l)$. 注意到

$293=3^5+3^3+2\times3^2+3+2\times3^0$,

而其中的 $3^5=243$ 必然是 $f(l)$的一个加项,3^2 和 3^0 必然是 $f(k)$和 $f(l)$中每一个的加项,只有 3^3 和 3 不确定. 因此,$f(k)$和 $f(l)$只有以下 4 种情况:

$$\begin{cases}f(k)=3^2+3^0,\\f(l)=3^5+3^3+3^2+3+3^0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(k)=3^3+3^2+3^0,\\f(l)=3^5+3^2+3+3^0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(k)=3^2+3+3^0,\\f(l)=3^5+3^3+3^2+3^0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(k)=3^3+3^2+3+3^0,\\f(l)=3^5+3^2+3^0.\end{cases}$$

相应地,我们得到所给方程的全部解:

$$\begin{cases}k=2^2+2^0=5,\\l=2^5+2^3+2^2+2+1=47;\end{cases}$$

$$\begin{cases}k=2^3+2^2+2^0=13,\\l=2^5+2^2+2+2^0=39;\end{cases}$$

$$\begin{cases}k=2^2+2+2^0=7,\\l=2^5+2^3+2^2+2^0=45;\end{cases}$$

$$\begin{cases}k=2^3+2^2+2+2^0=15,\\l=2^5+2^2+2^0=37.\end{cases}$$

8. 在①中令 $x=y=0$,得到 $f(0)=0$.

在①中令 $y=0$,得到

$$f(x^3)=x\cdot(f(x))^2,x\in\mathbf{R}. \quad ②$$

将上式改写成

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}(f(x^{\frac{1}{3}}))^2,x\in\mathbf{R}. \quad ②'$$

可见,当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)\geqslant0$;当 $x\leqslant0$ 时,$f(x)\leqslant0$.

令 $S=\{a|a>0$ 且 $f(ax)=af(x),x\in\mathbf{R}\}$,显然 $1\in S$.

下面我们先证明若 $a\in S$,则 $a^{\frac{1}{3}}\in S$.

事实上,若 $a\in S$,则由②和 S 的定义有

$$\begin{aligned}ax(f(x))^2&=af(x^3)=f(ax^3)=f((a^{\frac{1}{3}}x)^3)\\&=a^{\frac{1}{3}}x(f(a^{\frac{1}{3}}x))^2,\end{aligned}$$

约去公因式,得到

$$(a^{\frac{1}{3}}f(x))^2=(f(a^{\frac{1}{3}}x))^2,$$

由于 $f(x)$与 x 广义同号,$f(a^{\frac{1}{3}}x)$与 $a^{\frac{1}{3}}x$ 广义同号,即与 x 广义同号,因此

$$a^{\frac{1}{3}}f(x)=f(a^{\frac{1}{3}}x),x\in\mathbf{R}, \quad ③$$

即 $a^{\frac{1}{3}}\in S$.

我们接着再证若 $a,b\in S$,则 $a+b\in S$.

事实上,若 $a,b\in S$,则利用①～③,可得

$$f((a+b)x)$$
$$=f((a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3)$$
$$=(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})\{(f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}))^2-f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})\cdot f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})+(f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}))^2\}$$
$$=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})\cdot(f(x^{\frac{1}{3}}))^2$$
$$=(a+b)\cdot f(x),x\in\mathbf{R},$$

所以有 $a+b\in S$.

因为 $1\in S$,所以 $1+1=2\in S$,依此类推,可知任意自然数 $n\in S$. 特别地,有 $1996\in S$,即 $f(1996x)=1996f(x)$.

9. 由条件(3)和(2)有

$$f(x,y)=y^kf\left(\frac{x}{y},1\right)=y^{k-1}x,0\leqslant x\leqslant y,0<y, \quad ①$$

$$f(x,y)=x^kf\left(1,\frac{y}{x}\right)=x^{k-1}y,0\leqslant y\leqslant x,0<x, \quad ②$$

取 $0<x<y$ 且 x 充分小,使得 $y^{k-1}x<z,x<z^{k-1}y$,由条件(1)和①式又有

$$z^{k-1}y^{k-1}x=f(y^{k-1}x,z)=f(f(x,y),z)$$
$$=f(x,f(y,z))$$
$$=f(x,z^{k-1}y)$$
$$=(z^{k-1}y)^{k-1}x.$$

由此得到 $(k-1)(k-2)=0$,解得 $k_1=1,k_2=2$,将 k_1 和 k_2 的值分别代入①和②式,得到

$$f_1(x,y)=\begin{cases}x,当\ 0\leqslant x\leqslant y,y>0;\\ y,当\ 0\leqslant y\leqslant x,x>0.\end{cases} \quad ③$$

$$f_2(x,y)=xy,当(x,y)\neq(0,0). \quad ④$$

当 $x=y=0$ 时,由条件(3)直接得到

$$f(0,0)=f(z\cdot 0,z\cdot 0)=z^kf(0,0).$$

其中 $z\in I$ 是任意的,故必有 $f(0,0)=0$. 这意味着对由③和④式给出的函数 $f_1(x,y)$ 和 $f_2(x,y)$ 应补充定义 $f_1(0,0)=0,f_2(0,0)=0$.

容易验证,这两个函数都满足条件(1)～(3).

10. 若 $a=1$,则由等式得 $b=1$.

若 $b=1$,则由等式得 $a=1$.

若 a、b 都不小于 2,此时,我们令 $t=\dfrac{b^2}{a}$

由由题中等式得

$$a^{at}=(at)^{\frac{a}{2}},即\ a^{2t}=at,t=a^{2t-1}.$$

显然 $t>0$,如果 $2t-1\geqslant 1$,则

$$t=a^{2t-1}\geqslant(1+1)^{2t-1}\geqslant 1+(2t-1)=2t>t,$$

矛盾. 所以 $2t-1<1$,于是有 $0<t<1$.

记 $k=\frac{1}{t}$，则 $k=\frac{a}{b^2}>1$ 为有理数. 由题中等式得

$a^{\frac{a}{k}}=b^a$，即 $a=b^k, b^2k=b^k, k=b^{k-2}$. ①

如果 $k\leqslant 2$，则 $k=b^{k-2}\leqslant 1$，与前面所证 $k>1$ 矛盾. 因此 $k>2$. 设

$k=\frac{p}{q}, p, q\in\mathbf{N}, (p,q)=1, p>2q$.

由①式可得

$\left(\frac{p}{q}\right)^q=k^q=b^{p-2q}$.

因为上式右端是整数，所以 $q=1$，从而 k 是一个大于 2 的自然数，即有

$k\geqslant 3$.

若 $b=2$，则由①式得　$k=2^{k-2}$.

易见，此时 $k\neq 3$，从而有 $k\geqslant 4$. 另一方面，由①式可知

$$k=(1+1)^{k-2}\geqslant C_{k-2}^0+C_{k-2}^1+C_{k-2}^2$$
$$=1+(k-2)+\frac{(k-2)(k-3)}{2}$$
$$=1+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\geqslant 1+(k-1)=k.$$

由于上式中等号当且仅当 $k=4$ 时成立，因此我们有　$k=4$，

$a=b^k=2^4=16$.

若 $b\geqslant 3$，则　$k=b^{k-2}\geqslant(1+2)^{k-2}\geqslant 1+2(k-2)=2k-3$，

即　$k\leqslant 3$.

故此时必有 $k=3$，代入①得　$b=3, a=b^k=3^3=27$.

综上所述，满足题目等式的所有正整数对为 $(a,b)=(1,1),(16,2)(27,3)$.

第 13 章　最小、最大问题的求解思路

A 组

1. 我们设法把 n^3+100 变形，使之出现 $n+10$，为此

$n^3+100=n^3+1000-900=(n+10)(n^2-10n+100)-900$.

如果 $n+10$ 整除 n_3+100，则 $n+10$ 能整除 900，为使 n 最大，可令

$n+10=900$，

所以　$n=890$.

2. 设不能作为总分数的自然数集合为 S. 在前 12 个自然数中，只有 1,2,4,5,8,11 属于 S.

因为　$7=2\times 3+1, 3\times 5=7\times 2+1$，所以当若干 3,7 的和 $n\geqslant 12$ 时，可用一个 7 换两个 3，或者用 5 个 3 换 2 个 7，使组成的和数增加 1，因此大于 12 的自然数都不属于 S. 所以

$S=\{1,2,4,5,8,11\}$.

所求的最大值是 11.

3. 设 $p=10a\pm b(a,b\in\mathbf{Z}, 1\leqslant b\leqslant 5)$，则

$p^2 \equiv 10 \cdot (\pm 2ab) + b^2 \pmod{100}$.

可以验证，当 $b=1,3,4,5$ 时，p^2 的十位数字与个位数字的奇偶性相反；仅当 $b=2$ 时，p^2 的末两位数字奇偶性相同. 因此所求的 P 必须形如 $10a\pm 2$，而 $p=12$，$p^2=144$，末两位数字为 4.

依次计算 $12^2, 18^2, 22^2, 28^2, 32^2, 38^2$，便知末三位数字非零且相同的最小正整数为 38.

4. 如果删去 43 个数：2、3、…、44，那么在剩下的数中，任意一数都不等于另外两数的乘积.

如果删去的数少于 43 个，那么至少有一个 3 数组 $(k, 89-k, k(89-k))$ 由未被删去的数组成，其中 $2\leqslant k\leqslant 43$，$46\leqslant 89-k\leqslant 87$，$k(89-k)\leqslant\left(\frac{89}{2}\right)^2=1980.25$.

5. 因为 $75=5\times5\times3$，n 恰有 75 个因子，又 n 是 75 的倍数，所以

$n=75k=3\times5^2k\geqslant 2^4\times3^4\times5^2$.

由 n 的最小性可知 $\frac{n}{75}=k=2^4\times3^3=432$.

6. 由于 $2<a_i<3(1\leqslant i\leqslant 7)$，因此整数 A_i 应取 2 或 3，因为只有这样才能使 $M<1$，不然的话，就有 $M>1$.

要使 $A_1+A_2+\cdots+A_7=19$，那么 $A_1, A_2, \cdots, A_7$ 中恰有五个 3，两个 2.

要使 M 尽可能小，应把最小的两个数 a_1 和 a_2 的近似值取成 $A_1=A_2=2$，而其他的取成 $A_3=A_4=A_5=A_6=A_7=3$. 此时

$M=a_2-A_2=2.61-2=0.61$，

$100M=61$.

7. 由于 $m^3-m=m(m-1)(m+2)\equiv 0 \pmod 3$，所以

$q_i=(q_{i-1}-1)^3+3\equiv(q_{i-1}-1)^3\equiv 0 \pmod 3$.

因而 q_1, q_2, q_3 中必有一个被 3 整除，它应当为 3 的幂. 但在 $3\mid((q-1)^3+3)$ 时，$3\mid(q-1)^3$. 从而 $3\mid(q-1)$，$3^3\mid(q-1)^3$，$(q-1)^3+3$ 只能被 3 整除，不能被 3^2 整除. 于是只有在 $q_i=1$ 时，$(q_i-1)^3+3$ 才是 3 的幂，这时必须 $i=0$，但 $q_0=1$ 推出

$q_1=3, q_2=11, q_3=1003=17\times59$，

所以 n 的最大值为 2.

8. 12 的倍数能同时被 3 和 4 整除，因为 $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$，能被 3 整除，所以要使组成的数是 12 的倍数只需它的：

如果 k 的个位数字是 8(即 48,58,68,…)，则 $k=33+5n(n=3,5,7,\cdots)$.

于是不能写成两个奇合数之和的偶数一定小于 40.

下面验证 38 是满足题目要求的偶数.

由于 $38=1+37=3+35=5+33=7+31=9+29=1+27=13+25=15+23=17+21=19+19$，所以 38 不能表示成两个奇合数之和，从而 38 是满足题目要求的偶数.

9. 分解因式得

$$4^{27}+4^{500}+4^n=4^{27}(4^{n-27}+4^{473}+1), \quad ①$$

$$4^{n-27}+4^{473}=1=(2^{n-27})^2+2\cdot 2^{945}+1. \quad ②$$

当 $n-27=945$ 时，即 $n=972$ 时，②式是平方数，从而①式是平方数.

当 $n>972$ 时，

$(2^{n-27}+1)^2=(2^{n-27})^2+2\cdot 2^{n-27}+1>(2^{n-27})^2+2\cdot 2^{945}+1>(2^{n-27})^2$.

因此，这时②式不是平方数，从而①式不是平方数.

故所求的 n 的最大值为 972.

10. 先用归纳法证明，由数字 0～9 组成的 n 位车牌证号（任意两个号至少有两处数字不同）最多可以有 10^{n-1} 个.

事实上，当 $n=1$ 时，只能 $1=10^{1-1}$ 个牌号，设 $n=k$ 时命题成立，当 $n=k+1$ 时，考虑以 $i(i=0,1,2,\cdots,9)$ 为首位数字的 $k+1$ 位车牌证号，由归纳假设知，最多可以有 10^{k-1} 个，所以共有

$10\times10^{k-1}=10^k$

个 $k+1$ 位车牌证号. 即当 $n=k+1$ 时命题也成立.

故当 $n=6$ 时满足该州规定的车牌证号最多个数是 10^5.

11. 从 1 考虑起，与它的差为素数的最小自然数是 3；与前两者差均为素数的最小自然数是 6；与前三者的差均为素数的最小自然数是 8. 这就是说，对于集合 $M=\{1,3,6,8\}\subset N$ 中，任意两个元素 $i,j,|i-j|$ 为素数，因此 M 中的元素的象必须两两互异. 于是 $|A|\geqslant4$.

另一方面，我们可以构造函数 f 如下：

$f(x)=i$，其中 $x\in\mathbf{N},i\in A=\{0,1,2,3\}$ 并且 $x\equiv i(\mathrm{mod}4)$.

由上述构造知，若 $f(x)=f(y)$，则 $x-y$ 被 4 整除，$|x-y|$ 便不是素数，这就是说，我们所构造的函数 f 具有本题所要求的性质. 因为在这里 $|A|=4$，所以集合 A 的元素的最少个数是 4.

12. 除 995 外，可将 $1,2,3,\cdots,1989$ 所有数分为 994 对：$(1,1989),(2,1988),\cdots,(994,996)$. 由于每对数中两个数的奇偶性相同，因此在每一对数前无论怎样放置“+”、“−”号，运算结果都是偶数，而 995 为奇数，所以数 $1,2,3,\cdots,1989$ 前无论如何放置“+”、“−”号，其和式的值总是奇数. 于是，所求的最小非负数不小于 1.

另一方面，数 1 可以用下列方式得到：

$1=1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+\cdots+(1986-1987-1988+1989)$.

因此，和式可以得到的最小非负数是 1.

13. 设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，且

$x_1<x_2<\cdots<x_n$.

则

$\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{x_1+x_3}{2}<\cdots<\frac{x_1+x_n}{2}<\frac{x_1+x_n}{2}<\frac{x_3+x_n}{2}<\cdots<\frac{x_{n-1}+x_n}{2}$，因此 A_s 中至少有 $2n-3$ 个元素.

另一方面，若取 $s=\{2,4,6,\cdots,2n\}$，则 $A_s=\{3,4,5,\cdots12n-1\}$ 只有 $2n-3$ 个元素.

综上所述，A_s 的元素个数的最小值为 $2n-3$.

14. 设 $n=a_1+a_2+\cdots+a_{A(n)}$，$a_1<a_2<\cdots<a_{A(n)}$ 均为自然数.

显然，$a_1\geqslant1,a_2\geqslant2,\cdots,a_{A(n)}\geqslant A(n)$，因此，$n\geqslant1+2+\cdots+A(n)=\frac{1}{2}A(n)(A(n)+1)$， (*)

从而，自然数 $A(n)\leqslant\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]$.

又 $n=1+2+\cdots+\left(\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]-1\right)+\left(\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]+a\right)$，

其中 a 为整数.

由(*)可知 $a\geqslant0$，所以

$$A(n)\geqslant\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right].$$

综上所述，$A(n)=\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]$.

15. 由已知条件及算术一几何平均不等式，可得

$$(x+y)(y+z)=(x+y+z)y+xz=\frac{1}{xyz}\cdot y+xz=\frac{1}{xz}+xz\geqslant 2.$$

另一方面，当 $x=1,y=\sqrt{2}-1,z=1$ 时，满足已知等式，而

$$(x+y)(y+z)=2.$$

因此，表达式的最小值是 2.

16. 因为 x、y、$z>0$，由柯西不等式知：

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right)\geqslant\left[\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{y}\cdot\sqrt{\frac{4}{y}}+\sqrt{z}\cdot\sqrt{\frac{9}{2}}\right]^2=36,$$

即 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\geqslant 36$.

当且仅当 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$，即 $x=\frac{1}{6},y=\frac{1}{3},z=\frac{1}{2}$ 时，上式等号成立.

所以 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$ 的最小值为 36.

17. $$|y_k-y_{k+1}|=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}}{k+1}\right|$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}|(x_1-x_{k+1})+(x_2-x_{k+1})+\cdots+(x_k-x_{k+1})|$$

$$\leqslant\frac{1}{k(k+1)}(|x_1-x_2|+2|x_2-x_3|+\cdots+k|x_k-x_{k+1}|)$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}i|x_i-x_{i+1}|,$$

于是 $$|y_1-y_2|+|y_2-y_3|+\cdots+|y_{1992}-y_{1993}|=\sum_{k=1}^{1992}|y_k-y_{k+1}|$$

$$=\sum_{k=1}^{1992}\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k(k+1)}|x_i-x_{i+1}|=\sum_{i=1}^{1992}\sum_{k=1}^{1992}\frac{i}{k(k+1)}|x_i-x_{i+1}|$$

$$=\sum_{i=1}^{1992}i\left[\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\cdots+\frac{1}{1992\cdot 1993)}\right]\cdot|x_i-x_{i+1}|$$

$$=\sum_{i=1}^{1992}i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{1993}\right)\cdot|x_i-x_{i+1}|\leqslant\sum_{i=1}^{1992}\left(1-\frac{1}{1993}\right)\cdot|x_i-x_{i+1}|$$

$$=\left(1-\frac{1}{1993}\right)\cdot\sum_{i=1}^{1992}|x_i-x_{i+1}|=\left(1-\frac{1}{1993}\right)\cdot 1993=1992.$$

另一方面，若令 $x_1=t+1993,x_2=x_3=\cdots=x_{1993}=t$，

则 $|y_k-y_{k+1}|=\frac{i}{k(k+1)}\cdot|x_1-x_2|=\frac{1993}{k(k+1)}$，

$$\sum_{k=1}^{1992}|y_k-y_{k+1}|=1993\cdot\sum_{k=1}^{1992}\frac{1}{k(k+1)}=1992.$$

故 $\sum_{k=1}^{1992}|y_k-y_{k+1}|$ 的最大值为 1992.

18. 考虑 n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 的全排列. 显然，这个全排列的种数是 $n!$ 个. 设 A 中有 f_k 个 k 元子集作为元素，这里 $f_k(k=1,2,\cdots,n)$是非负整数. 用$|A|$表示 A 的元素个数，则

$$|A|=\sum_{k=1}^{n}f_k.$$

当 $f_k>0$ 时，对于 f_k 个 k 元子集中的任何一个子集$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，在 $1,2,\cdots,n$ 的全排列中，取出前 k 个元素恰组成子集$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$的全排列，共有 $k!\ (n-k)!$ 个.

由于 A 中任意两个元素互不包含，因此对于 A 内的所有元素，用上述方法取出的全排列必然两两不同，于是，我们有

$$\sum_{k=1}^{n}f_k\cdot k!\ (n-k)!\leqslant n!.$$

注意到，若正整数 n 固定，则当 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$时 C_n^k 达到最大值，我们有

$$|A|=\sum_{k=1}^{n}f_k\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k}{C_n^k}$$

$$=C_n^{[\frac{n}{2}]}\cdot\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}f_k\cdot k!\ (n-k)!\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}.$$

当 A 取$\{1,2,\cdots,n\}$中全部$[\frac{n}{2}]f$ 无子集组成的集合时，恰达到$|A|=C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

综上所述，A 的元素个数的最大值为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$(其中$[\frac{n}{2}]$表示不超过$\frac{n}{2}$的最大整数).

19. 当 $x\geqslant0,y\geqslant0$ 时，显然有$|x-y|\leqslant\max\{x,y\}$以及 $\max\{\max\{x,y\}\},z=\max\{x,y,z\}$. 由此可知，当 $n=1,2,\cdots,1990$ 时，有

$|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots-x_n|\leqslant\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，所以在问题的条件中所给出的表达式不会超过

$\max\{x_1,\cdots,x_{1990}\}=1990.$

但是该式不可能等于 1990，这是因为该式之值的奇偶性应当与和数

$$x_1+x_2+\cdots+x_{1990}=1+2+\cdots+1990=\frac{1990\cdot1991}{2}=995\cdot1991$$

的奇偶性相同，即为奇数，而如下的具体例子表明，该式之值可达 1989：$|\cdots|||2-4|-5|-3|-\cdots-(4k+2)|-(4k+4)|-|(4k+5)|-(4k+3)|-\cdots-1986|-1988|-1989|-1987|-1990|-1|=1989.$

综上所述可知，所求的最大值是 1989.

20. 由于 $f(x)=f(x)-f(x_3)=(x-x_3)[x^2+(a+x_3)x+x_3^2+ax_3+b]$,

所以，x_1,x_2 是方程

$x^2+(a+x_3)x+x_3^2+ax_3+b=0$ 的两个根. 由(1)可得

$(a+x_3)^2-4(x_3^2+ax_3+b)=\lambda^2$,

即 $3x_3^2+2ax_3+\lambda^2+4b-a^2=0.$

由(2)可得

$$x_3=\frac{1}{3}(-a+\sqrt{4a^2-12b-3\lambda^2}),\qquad ①$$

且 $4a^2-12b-3\lambda^2\geqslant0.\qquad ②$

易知，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=\left(x+\frac{a}{3}\right)^3-\left(\frac{a^2}{3}-b\right)\left(x+\frac{a}{3}\right)+\frac{2}{27}a^3+c-\frac{1}{3}ab.$

由 $f(x_3)=0$ 可得

$$\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c=\left(x_3+\frac{a}{3}\right)^3-\left(\frac{a^2}{3}-b\right)\left(x_3+\frac{a}{3}\right). \qquad ③$$

由①得

$$x_3+\frac{a}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{4a^2-12b-3\lambda^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{a^2}{3}-b-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

记 $p=\frac{a^2}{3}-b$. 由②和③可知 $p\geqslant\frac{\lambda^2}{4}$ 且

$$\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c=\frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{p-\frac{\lambda^2}{4}}\,(p-\lambda^2).$$

令 $y=\sqrt{p-\frac{\lambda^2}{4}}$，则 $y\geqslant0$ 且

$$\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c=\frac{2\sqrt{3}}{9}y\left(y^2-\frac{3}{4}\lambda^2\right).$$

因 $y^3-\frac{3\lambda^2}{4}y+\frac{\lambda^3}{4}=y^3-\frac{3\lambda^2}{4}y-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3+\frac{3\lambda^2}{4}\cdot\frac{\lambda}{2}=\left(y-\frac{\lambda}{2}\right)^2(y+\lambda)\geqslant0$，

则 $\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c-\frac{\sqrt{3}}{18}\lambda^3.$

于是，$2a^3+27c-9ab\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda^3.$

由此可得 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$

取 $a=2\sqrt{3}, b=2, c=0, \lambda=2$，则 $f(x)=x^3+2\sqrt{3}x^2+2x$ 有根 $-\sqrt{3}-1, -\sqrt{3}+1, 0$. 显然假设条件成立，且

$$\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}=\frac{1}{8}(48\sqrt{3}-36\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

综上可知，$\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

21. 由匀值不等式和题中条件，知

$$u\frac{v+w}{2}+v\frac{w+u}{2}+w\frac{u+v}{2}\geqslant u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}\geqslant1,$$

即 $uv+vw+wu\geqslant1.$

故 $(u+v+w)^2=u^2+v^2+w^2+2uv+2vw+2wu$

$$=\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{v^2+w^2}{1}+\frac{w^2+u^2}{2}+2uv+2vw+2wu$$

$$\geqslant3uv+3vw+3wu\geqslant3.$$

因此，$u+v+w\geqslant\sqrt{3}$.

另一方面，$u=v=w=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 显然满足题中条件，此时 $u+v+w=\sqrt{3}$.

综上所述，知 $u+v+w$ 的最小值为$\sqrt{3}$.

B组

1. 显然只要考虑$(a,b)=1$ 的情况.

设集合 $S=\{n|M-b\leqslant n\leqslant M+a-1,n\in\mathbf{Z}\}$.

则 $f(x)\subseteq S$，并且 $0\in S$.

设 $k\geqslant 1$ 且 $f^k(0)=0$，因为 $f(m)=m+a$ 或 $m-b$，k 可写成 $k=r+s$ 且 $ra-sb=0$. 由于 a,b 互质，从而

$r\geqslant b,s\geqslant a,k\geqslant a+b$.

另一方面，$f^{a+b}(0)=ra-sb$，

这里 $r+s=a+b$，因此

$f^{a+b}(0)=ra-sb=(a+b)(a-s)$.

因为 $f^{a+b}(0)\in S$，

而 S 中$(a+b)$的倍数只有 0，所以

$f^{a+b}(0)=0$.

综上所述，使 $f^k(0)=0$ 的最小自然数 $k=a+b$.

对一般情况，令

$a=a_1(a,b),b=b_1(a,b)$，

$S_1=\{n|M-b_1\leqslant n\leqslant M+a_1-1,n\in\mathbf{Z}\}$，

上述证明稍作修改即可.

2. 显然，当 $0<a\leqslant 1$ 时，所求的最大值为 ka.

当 $a>1$ 时，对于任意 $s,t\in\mathbf{N}$，都有

$a(a^{s-1}-1)a(a^{t-1}-1)\geqslant 0$，

从而有 $a^s+a^t\leqslant a+a^{s+t-1}$.

利用这个不等式可以得到

$$a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}\leqslant(r-1)a+a^{k-(r-1)} \quad ①$$

考虑方程 $a+a^m=a^{m+1}$.

容易解得 $m=\log_a\left(\frac{a}{a-1}\right)$，且可以看出

$$\begin{cases}a+a^m\leqslant a^{m+1}, 当\ m\geqslant\log_a\left(\frac{a}{a-1}\right),\\ a+a^m\geqslant a^{m+1}, 当\ m\leqslant\log_a\left(\frac{a}{a-1}\right).\end{cases} \quad ②$$

利用②式递推可得

$$(r-1)a+a^{k-(r-1)}\leqslant\begin{cases}a^k, 当\ r\leqslant(k+1)-\log_a\left(\frac{a}{a-1}\right)\\ ka, 当\ r\geqslant(k+1)-\log_a\left(\frac{a}{a-1}\right).\end{cases} \quad ③$$

由①和③式即得

$$a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}\leqslant\max\{a^k,ka\}\qquad ④$$

显然，④式右端的括号中的两个值都是可以取得的，所以，所求的最大值为

$$\max\{ka,a^k\}=\begin{cases}ka,a\leqslant\dfrac{1}{k^{k-1}},k\geqslant2,\\ a^k,k=1\text{ 或 }a>k^{\frac{1}{k-1}},k\geqslant2.\end{cases}$$

3. 设 $a_1+a_2+\cdots+a_m+b_1+b_2+\cdots b_n=1987$，其中 $a_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 是互不相同的正偶数，$b_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 是互不相同的正奇数.

显然，n 一定是奇数，且

$a_1+a_2+\cdots+a_m\geqslant2+4+\cdots+2m=m(m+1)$，

$b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.

所以

$m^2+m+n^2\leqslant1987$，其中 n 为奇数.

此式等价于

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2\leqslant1987+\frac{1}{4}.$$

由柯西-施瓦兹不等式

$$3\left(m+\frac{1}{2}\right)+4n\leqslant\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2}\leqslant5\sqrt{1987+\frac{1}{4}},$$

$$3m+4n\leqslant5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}.$$

由 $3m+4n$ 是整数，所以

$$3m+4n\leqslant\left[5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}\right],$$

即 $3m+4n\leqslant221$.

易证，方程 $3m+4n=221$ 的整数解的一般形式是

$$\begin{cases}m=71-4k,\\ n=2+3k,(k\text{ 是整数}).\end{cases}\qquad ①$$

因为 n 是奇数，所以①式中的 k 必须是奇数，设 $k=2t+1$，t 是整数，

则 $$\begin{cases}m=67-8t,\\ n=5+6t(t\text{ 是整数}).\end{cases}\qquad ②$$

因为 $m^2,n^2\leqslant1987$，所以 $m,n\leqslant[\sqrt{1987}]=44$.

代入②式得出 $3\leqslant t\leqslant6$.

用 $t=3,4,5,6$ 分别代入②式可知，(m,n) 只能是 $(43,23)$，$(35,29)$，$(27,35)$ 及 $(19,41)$ 四组值.

不难验证 $(43,23)$，$(35,29)$，$(19,41)$ 三组值不满足关系式

$m(m+1)+n^2\leqslant1987$.

对于 $(27,35)$，由于 $27(27+1)+35^2=1981<1987$，

所以适当选取 27 个正偶数和 35 个正奇数的值，就可使这些数的和恰为 1987.

例如，由

$2+4+\cdots+54+1=3+\cdots+67+69=1981$，

则 $2+4+\cdots+54+1+3+\cdots+67+75=1987$.

综上讨论，$3m+4n$ 的最大值是 221，而且只能在 $m=27,n=35$ 时才能达到最大值.

4. 设有 $a,b\in S$ 满足条件 $(a+b)|ab$. 记 $c=(a,b)$，于是 $a=ca_1,b=cb_1$，其中 $a_1,b_1\in\mathbf{N}$ 且有 $(a_1,b_1)=1,a_1\neq b_1$，不妨设 $a_1>b_1$.

由于 $a+b=c(a_1+b_1),ab=c^2a_1b_1$，

因此 $(a_1+b_1)|ca_1b_1$.

又由于 $(a_1+b_1,a_1)=1,(a_1+b_1,b_1)=1$，

因此 $(a_1+b_1)|c$.

因此 $a,b\in S$，所以 $a+b\leqslant 99$，即 $c(a_1+b_1)\leqslant 99$，所以 $3\leqslant a_1+b_1\leqslant 9$.

由此可知，S 中满足条件 $(a+b)|ab$ 的不同数对 (a,b) 共有 23 对，现列举如下：

$a_1+b_1=3$ 时，c 是 3 的倍数，属于这一类的 (a,b) 有

(6,3),(12,6),(18,9),(24,12),(30,15),(36,18),(42,21),(48,24);

$a_1+b_1=4$ 时，有(12,4),(24,8),(36,12),(48,16);

$a_1+b_1=6$ 时，有(30,6);

$a_1+b_1=7$ 时，有(42,7),(35,14),(28,21);

$a_1+b_1=8$ 时，有(40,24);

$a_1+b_1=9$ 时，有(45,36).

令 $M=\{6,12,15,18,20,21,24,35,40,42,45,48\}$. 则上述 23 个数对中的每一个数对都至少包含 M 中的 1 个元素. 令

$T=S-M$,

则 T 中任何两数都不能成为满足要求的数对 (a,b). 因为 $|M|=2,|T|=50-12=38$，所以所求最小自然数 $K\geqslant 39$.

另一方面，下列 12 个满足题中要求的数对互不相交，它们是：

(6,3),(12,4),(20,5),(42,7),(24,8),(18,9),(40,10),

(35,14),(30,15),(48,16),(28,21),(45,36).

对于 S 中任一 39 元子集 R，它只比 S 少 11 个元素，而这 11 个元素至多属于上述 12 个数对中的 11 个，因此必有 12 对中的 1 对属于 R.

综上所述，所求的最小自然数 $K=39$.

5. 将 10 个自然数按顺时针方向依次写在一个圆周上，于是题中的表达式就是每两个相邻之数的乘积的总和，以下简称为“和值”.

将 10 个两两不同的自然数的和记为 N，则 $N\geqslant 55$. 将和为 N 的任意 10 个两两不同的自然数所对应的“和值”的最小值记为 $S(N)$.

先考察 $N=55$ 的情形.

显然，此时 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}=\{1,2,\cdots,10\}$.

我们来证明，当 10 个数如图 1 或图 2 排列时，“和值”最小.

设这 10 个数任意地排列在圆周上，且不同于图 1 和图 2，不失一般性. 可设 $a_1=10$(如图 3)如果 $a_2\neq 1$ 而 $a_j=1,j\neq 2$，我们就将 $(a_2,a_3,\cdots,a_j)$ 这一段整个地按倒过来的顺序排列，变为 $(a_j,a_{j-1},\cdots,a_2)$，并保持其余各数不动，得到图 4，并把这个过程称为一次操作. 操作前后，“和值”的变化是

$10a_2+a_{j+1}-(10+a_2a_{j+1})=(a_2-1)(10-a_{j+1})>0$,

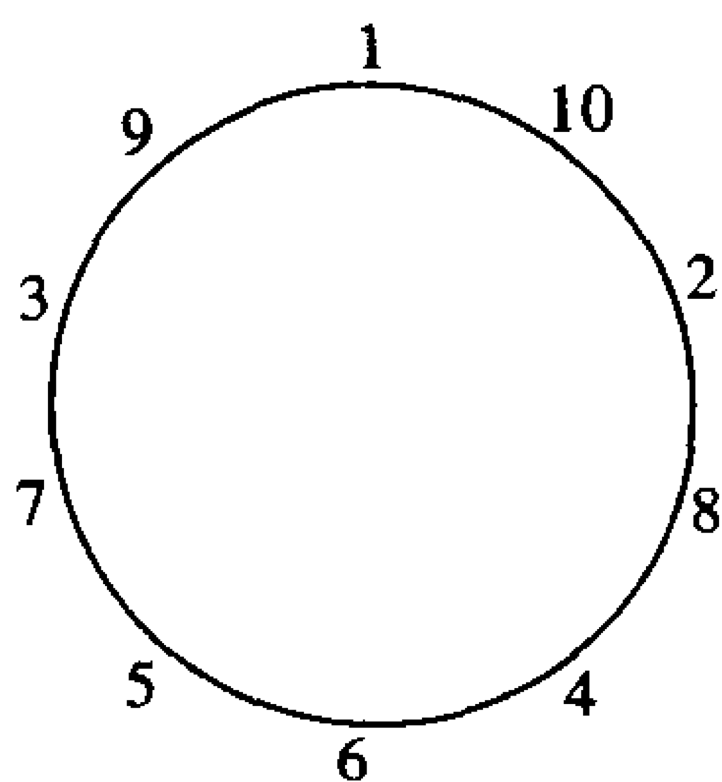


图 1

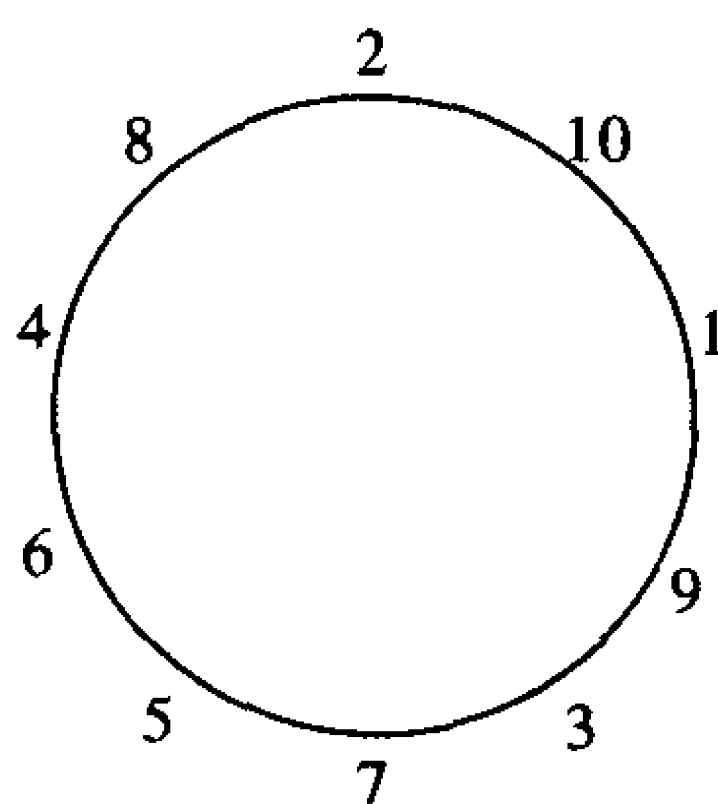


图 2

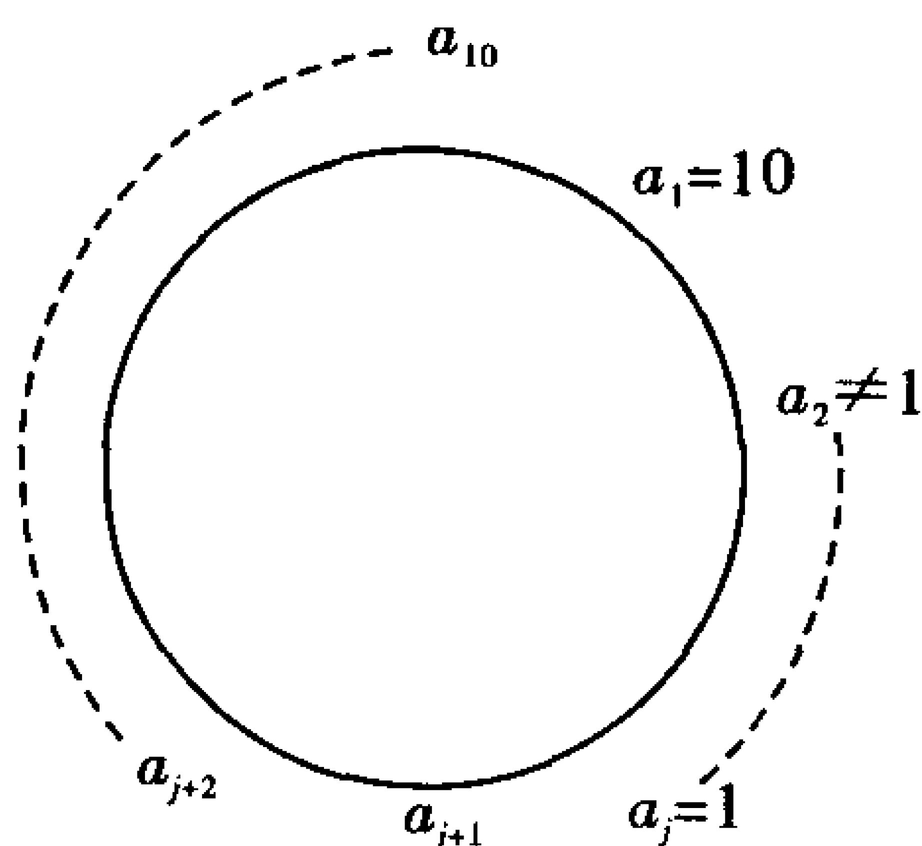


图 3

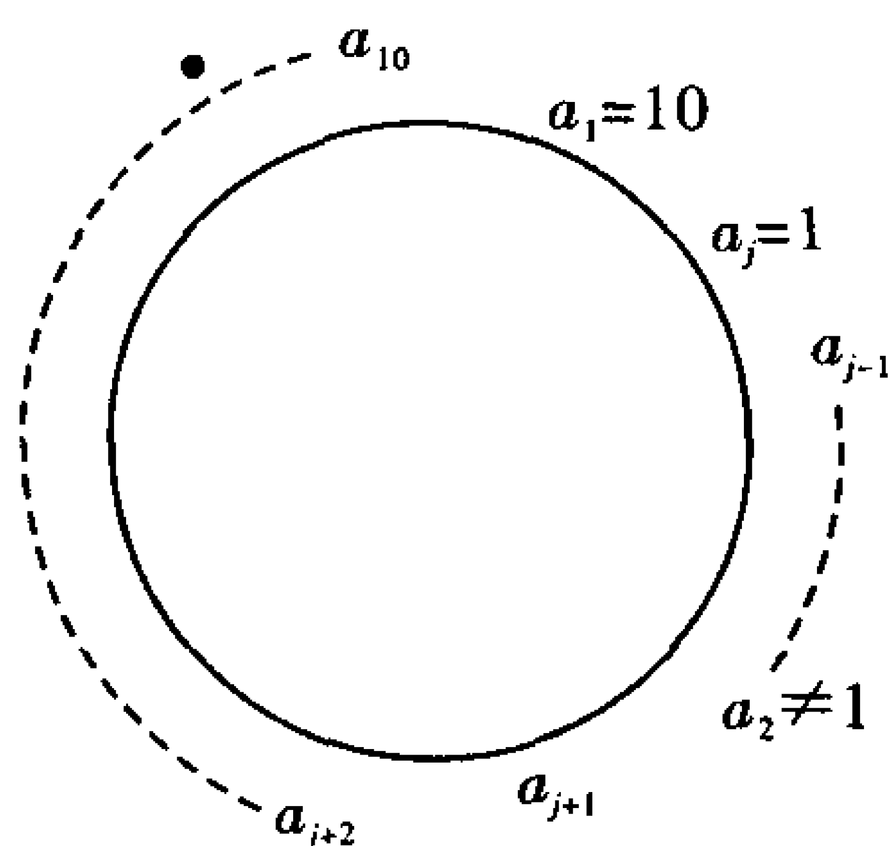


图 4

"和值"仅当 $a_j=a_{10}=1$ 时不变,其他情况都下降了.

将图 4 中的字母按顺时针方向从 a_1 开始,重新标上 $b_1,b_2,\cdots,b_{10}$. 则 $b_1=10,b_2=1$. 如果 $b_{10}\neq2$, $b_j=2,3\leqslant j\leqslant9$(如图 5),我们就将$(b_j,b_{j+1},\cdots,b_{10})$这一段的顺序倒过来,变为$(b_{10},\cdots,b_{j+1},b_j)$,并保持其余各数不动,得到图 6,这次操作前后,"和值"的变化是

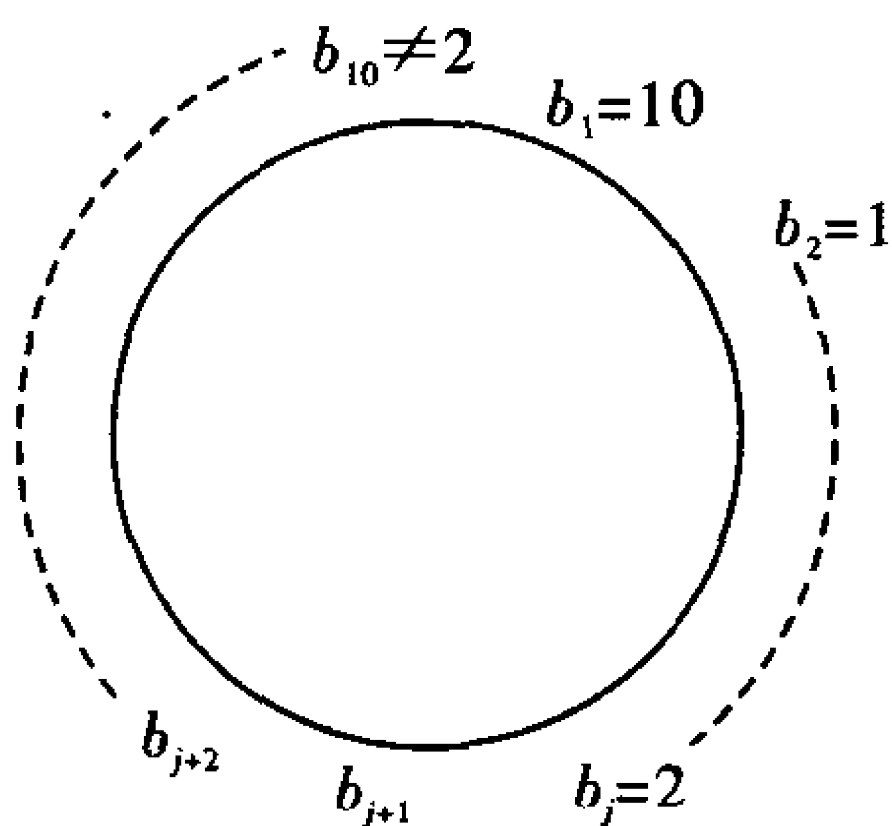


图 5

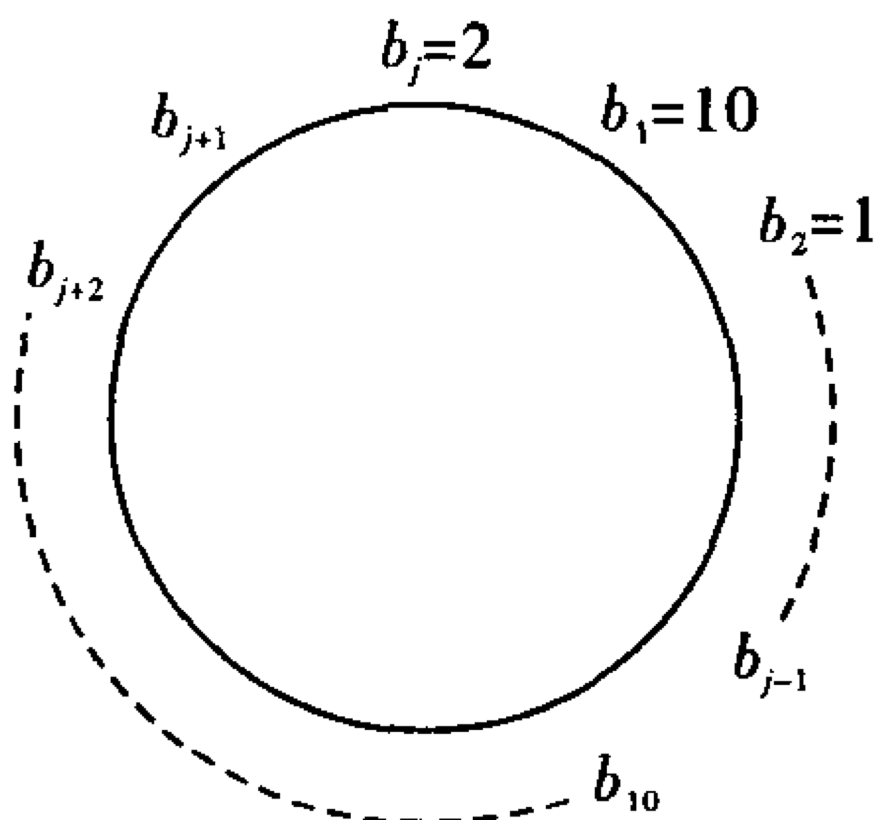


图 6

$$10b_{10}+2b_{j-1}-(2\times10+b_{10}\cdot b_{j-1})=(b_{10}-2)(10-b_{j-1})>0,$$

可见,"和值"下降.

如果图 6 仍不同于图 2,那么可以用类似于上面的操作,使它一步一步地变为图 2,而每一步的变化都使"和值"下降.

注意到图 1 与图 2 的排列所对应的"和值"是相等的,因此,当 $N=55$ 时,仅当 10 个数如图 1 或

图 2 排列时,其"和值"最小,因此

$$S(55)=10\times1+1\times9+9\times3+3\times7+7\times5+5\times6+6\times4+4\times8+8\times2+2\times10=224.$$

接着考察 $N>55$ 的情形.

此时,和为 N 的十个两两不同的自然数不仅在排列顺序上可以不同,而且在 N 的分拆方式上也可以不同. 因此,我们在讨论"和值"的最小值时,就必须对 N 的一切可能的分拆方式的所有不同的排列形式进行考察.

我们对 N 的任何一种分拆后的在圆周上的任何一种排列,都以 a_1 表示十个数中的最大的一个,并按顺时针方向将 10 个数依次记为 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$. 我们用

$$N=a_1+a_2,\cdots+a_{10}, \qquad ①$$

不仅表示相等关系,而且表示右端 10 个两两不同的自然数中以 a_1 为最大,并且在圆周上的排列顺序如上所述.

因为 $N>55$,所以当这 10 个数是连续的 10 个自然数时,其中的最小数 $a_{i_0}>1$;而当这 10 个数不是 10 个连续的自然数时,其中必有某个峰 a_{i_0} 比所有小于它的数都至少大 2. 这样,我们就得到了关于 $N-1$ 的一种分拆和排列方式

$$N-1=a_1+\cdots+a_{i_0-1}+(a_{i_0}-1)+a_{i_0+1}+\cdots+a_{10}, \qquad ②$$

其中 $a_0=a_{10}$. 这就是说,对于每一个①式,都至少有一个②式与之对应,所以

$$S(N)-S(N-1)\geqslant\min(a_{i_0}+a_{i_0+1})\geqslant2+1=3,$$

于是,就有

$$S(N)\geqslant S(55)+3(N-55)=3N+79.$$

另一方面,当 $(a_1,a_2,\cdots,a_{10})=(N-45,1,9,3,7,6,5,4,8,2)$

时,确有"和值"为 $3N+79$.

故 $S(N)=3N+79$.

特别地,就有 $S(1995)=3\times1995+79=6064$.

6. 满足题设条件的任何一组 $x_1,x_2,\cdots,x_{1997}$ 之中,若有这样的 x_i 和 x_j:

$$\sqrt{3}>x_i\geqslant x_j>-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

我们记

$$x_i+x_j=2m,x_i-x_j=2h.$$

则 $x_i=m+h,x_j=m-h$,

$x_i^{12}+x_j^{12}$ 达到最大值.

因此,所求的 12 次方幂的和的最大值只能在以下情形达到:至多只有一个变元取值于 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)$,其余变元取值都是 $\sqrt{3}$ 或 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

设有 u 个变元取值为 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$,v 个变元取值为 $\sqrt{?}$,w 个变元取值于 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)$. 显然 $w=0$ 或 1.

当 $w=1$ 时,设这个变元的取值为 t,于是,我们有

$$\begin{cases}u+v+w=1997, & ①\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot u+\sqrt{3}v+tw=-318\sqrt{3}. & ②\end{cases}$$

②$\times\sqrt{3}+$①得：$4v+(\sqrt{3}t+1)w=1043$.

因为$(\sqrt{3}t+1)w=1043-4v$是整数，并且

$$0\leqslant(\sqrt{3}t+1)w<4,$$

所以$(\sqrt{3}t+1)w$是1043除以4所得的余数. 由此可得　$w=1,t=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

代入①和②，解得　$u=1736,v=260$.

因此，$x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{12}$的最大值为

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{12}\cdot u+(\sqrt{3})^{12}\cdot v+t^{12}=\frac{1736+4096}{729}+729\times260=189548.$$

7. 所求M的最大可能值$M_0=8$.

先证$M_0\geqslant8$.

事实上，可令映射　$f(i)\equiv3i-2(\bmod 17)$,

其中$i\in A,f(i)\in A$.

若$f(i)\equiv f(j)(\bmod 17)$，则　$3i-2\equiv3j-2(\bmod 17)$,

$i\equiv j(\bmod 17)$,

所以　$i=j$.

映射f为从A到A的一一映射.

又由映射f的定义，易知

$f^{[n]}(i)\equiv3^n\cdot i-3^n+1(\bmod 17)$.

若　$f^{[M]}(i+1)-f^{[M]}(i)\equiv1$或$-1(\bmod 17)$,

则　$[3^M(i_1)-3^M+1]-[3^M\cdot i-3^M+1]\equiv1$或$-1(\bmod 17)$,

即　$3^M\equiv1$或$-1(\bmod 17)$.

同时，若$f^{[M]}(-1)-f^{[M]}(17)\equiv1$或$-1(\bmod 17)$,

则　$1-[3^M\times17-3^M+1]\equiv1$或$-1(\bmod 17)$,

即　$3^M\equiv1$或$-1(\bmod 17)$.

但$3^1\equiv3,3^2\equiv9,3^3\equiv10,3^4\equiv13,3^5\equiv5,3^6\equiv15,3^7\equiv11,3^8\equiv-1(\bmod 17)$，故得　$M_0\geqslant8$.

再证$M_0\leqslant8$.

任作一个凸17边形$A_1A_2\cdots A_{17}$，记作G，我们先规定，当$i+1=18$时，取$i+1$为1；当$i-1=0$时，取$i-1$为17. 然后按如下规则连线段：若$1\leqslant m<M_0$，$f^{[m]}(i)=a$，$f^{[m]}=b$时，就连线段A_aA_b.

显然所连线段必为G的对角线. 可以证明：所连的对角线没有重复. 事实上，若有两条连线相同，即存i,j及$M_0>p>q>0$，使

$$\begin{cases}f^{[p]}(i)=f^{[q]}(j),\\ f^{[p]}(j+1)=f^{[q]}(j+1)\text{或}f^{[p]}(i+1)=f^{[q]}(j-1).\end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases}(f^{[p-q]}(i)=j,\\ f^{[p-q]}(i+1)=j+1\text{或}j-1.\end{cases}$$

注意到$M_0>p-q>0$，这显然与M_0的定义矛盾.

故所连对角线没有重复.

但G共有17×7条对角线，所以

$17\times(M_0-1)\leqslant17\times7, M_0\leqslant8.$

综上所述，所求的M的最大可能值$M_0=8$.

8. S'是S的子集，并且S'中的任何两个元素之间的距离为5. 设$A=(a_1,\cdots,a_8)$和$B=(b_1,\cdots,b_8)$是S'中的两个元素. 记

$$\omega(A)=\sum_{i=1}^{8}a_i,\omega(B)=\sum_{i=1}^{8}b_i.$$

显然$\omega(A),\omega(B)$分别表示A,B中的1的个数.

如果 $\omega(A)+\omega(B)\geqslant12$,

那么A和B中至少有4个1的位置相同，从而 $d(A,B)\leqslant8-4=4$,

与S'的定义矛盾. 因此必有 $\omega(A)+\omega(B)11$.

从上式可知，在集合S'的元素中，最多只有一个元素里的1的个数$\geqslant6$.

不妨设$(0,0,0,0,0,0,0,0)\in S'$.（因为可以将S'内的每一个元素的第i个分量同时由1变0或由0变1，不改变S'的性质).

这样，S'中的其他元素中1的个数都$\geqslant5$. 如果S'中有两个1的个数等于5的元素，那么由$5+5-8=2$可知，这两个元素至少有两个相同的分量位置上都是1. 又因为这两个元素的距离$\geqslant5$，所以这两个元素至多有两个相同的分量位置上都是1. 综上所述，S'中任意两个1的个数等于5的元素恰在两个相同的分量位置上都是1. 因此，S'中至多有两个1的个数等于5的元素.

由上面的讨论可知，S'中至多有4个元素，其中一个为全为零的元素，一个是1的个数$\geqslant6$的元素，2个是1的个数$=5$的元素.

另一方面，S'可以由以下4个元素构成：

$(0,0,0,0,0,0,0,0),(1,1,1,0,0,1,1,1)$,

$(1,1,1,1,1,0,0,0),(0,0,01,1,1,1,1,1)$.

故在S中最多能取出4个元素，它们中任何两个的距离$\geqslant5$.

9. 设第i题有a_i个人的答案正确，于是恰有

$b_i=C_{a_i}^2$

个两人组答对该题$(i=1,2,\cdots,15)$.

以下我们着重考察和数$\sum\limits_{i=1}^{15}b_i$.

记$a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{15}\}$，则有

$$15C_n^2\geqslant\sum_{i=1}^{15}b_i\geqslant C_{21}^2,\quad a(a-1)\geqslant\frac{420}{15}=28,\quad a\geqslant6.$$

如果$a=6$，即每题最多只有6个人答对. 此时如果有某一个人只答对了三道题，那么由于$a=6$，即他答对的三道题中的每一题，至多还有另外5个人答对，所以他最多与另外15个人有共同答对的题目，此与题设条件矛盾. 这说明，此时每人至少答对4道题.

因为 $21\times5>6\times15$,

所以不可能每人都至少答对5道题，从而至少有1人恰答对1道题，将该人工编号为1. 由题设条件，该人与其他20人中的每一个都有共同答对的题目，所以该人答对的4道题中的每一题都有另外5人也答对了. 于是，分别答对这4道题的人的编号构成了4个集合：

$S_1=\{1,2,3,4,5,6\},S_2\{1,7,8,9,10,11\}$,

$S_3=\{1,12,13,14,15,16\}$，$S_4=\{1,17,18,19,20,21\}$.

显然，$S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4=\{1,2,\cdots,21\}$，

$S_i\cap S_j=\{1\}$，$1\leqslant i<j\leqslant 4$.

另一方面，如果在 15 道题中，至多 11 道题各有 6 个人答对，那么就有

$$210=C_{21}^2\leqslant\sum_{i=1}^{15}b_i\leqslant 11\cdot C_6^2+4\cdot C_5^2=205,$$

矛盾. 因此，在 15 道题中，至少 12 道题各有 6 个人答对. 除去编号为 1 的人答对的 4 道题以外，至少还有 8 道题各有 6 个人答对. 考察答对这 8 道题中某一道题的 6 个人，他们之中或者有 3 人以上属于同一个 S_j，或者两人属于同一个 S_j，并 有另两人属于同一个 S_k，$j\neq k$，$1\leqslant j\leqslant 4$，$1\leqslant k\leqslant 4$. 总之，在计算 $\sum\limits_{i=1}^{15}b_i$ 时，这 8 道题中的每一道题都至少产生两次重复计数. 因此

$$210=C_{21}^2\leqslant\sum_{i=1}^{15}b_i-8\times 2\leqslant 15C_6^2-16=209,\text{矛盾.}$$

这说明 $a\neq 6$，从而有 $a\geqslant 7$.

下面构造的例子说明，$a=7$ 是可能实现的.

记考试人员的编号为 1～21，并记

$P_i=\{2i-1,2i\}$，$i=1,2,\cdots,6$；

$P_7=\{13,14,15\}$，$P_8=\{16,17,18\}$，　$P_9=\{19,20,21\}$.

若出现下表所示的考试结果，则 $a=7$.

题号	答对该题的人员的集合
1	$P_1\cup P_2\cup P_3$
2	$P_4\cup P_5\cup P_6$
3	$P_1\cup P_4\cup P_7$
4	$P_2\cup P_5\cup P_8$
5	$P_3\cup P_6\cup P_9$
6	$P_1\cup P_5\cup P_9$
7	$P_2\cup P_6\cup P_7$
8	$P_3\cup P_4\cup P_8$
9	$P_1\cup P_6\cup P_8$
10	$P_2\cup P_4\cup P_9$
11	$P_3\cup P_5\cup P_7$
12	$P_7\cup P_8$
13	$P_8\cup P_9$
14	$P_7\cup P_9$
15	$\varnothing$（空集）

10. 首先估计 $|f(n)|$ 的上界.

鉴于 f 的单调性，只需考察 $|f(2^k)|$ 的上界. 由已知条件(1)和(2)得

$$f^{(2k+1)}\leqslant\left(1+\frac{1}{2^k}\right)f(2^k)\leqslant\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{2^{k-1}}\right)f(2^{k-1}),$$

…

$\leqslant 2\lambda_k$,

其中 $\lambda_k=\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{2^{k-1}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{k-1}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)(1+1)$.

通过对前几个 λ_k 的计算,我们猜测

$\lambda_k<5,k=1,2,\cdots$.

为了证明这一猜测,我们来证明一个加强命题:

$\lambda_k\leqslant 5\left(1-\frac{1}{2^k}\right),k=2,3,\cdots$

事实上,$k=2$ 时,加强命题显然成立,因为

$\lambda_2=(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)=5\left(1-\frac{1}{2^2}\right)$.

假设已证得 $\lambda_m\leqslant 5\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$,则

$$\lambda_{m+1}=\lambda_m\cdot\left(1+\frac{1}{2^{m+1}}\right)\leqslant 5\left(1-\frac{1}{2^m}\right)\left(1+\frac{1}{2^{m+1}}\right)=5\left(1-\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^{m+1}}-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)$$

$$=5\left(1-\frac{1}{2^{m+1}}-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)\cdots<5\left(1-\frac{1}{2^{m+1}}\right).$$

至此,我们已证明,对任何 $k\in\mathbf{N}$,必有

$\lambda_k<5$.

对任何 $f\in S$ 和任何 $n\in\mathbf{N}$,存在自然数 k,使 $n<2^{k+1}$.因而

$f(n)\leqslant f(2^{k+1})\leqslant 2\lambda_k<10$.

为了证明题目所求的最小自然数 $M=10$,还需构造一个适合题目条件的函数 f_0,该函数在某处的值大于 9.

注意到 $2\lambda_5>9$,我们定义一个函数 $f_0:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ 如下:

$$\begin{cases}f_0(1)=2,\\ f_0(n)=2\lambda_k,\text{其中 } 2^k<n\leqslant 2^{k+1},k=0,1,2,\cdots\lambda_0=2.\end{cases}$$

对任何自然数 n,显然有

$f_0(n+1)\geqslant f_0(n)$.

尚需验证

$f_0(n)\geqslant\frac{n}{n+1}f_0(2n)$.

设 $k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$,且 $2^k<n\leqslant 2^{k+1}$,则

$2^{k+1}<2n\leqslant 2^{k+2}$.

于是,$f_0(2n)=2\lambda_{k+1}=\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}\right)\cdot 2\lambda_k\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)f_0(n)$

即 $f_0(n)\geqslant\frac{n}{n+1}f_0(2n)$.

因此 $f_0\in S$.

因为 $f_0(2^6)=2\lambda_5>9$,所以题目所求的最小自然数 $M=10$.

11. 注意到 $999=37\times 27$,我们令 $\begin{cases}A=\{3,5,\cdots,37\},\\ B=M-A.\end{cases}$

显然$|A|=18$，$|B|=981$.

下面证明 M 的子集 B 不能同时满足条件(1)～(3).

用反证法.

若 B 存在 3 个互不相交的四元子集 S,T,U.

设 $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$，$s_1<s_2<s_3<s_4$；

$T=\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$，$t_1<t_2<t_3<t_4$.

因此$(s_1,t_4)=1$，所以 s_4 和 t_4 中至少有一个为奇数. 不妨设 s_4 是奇数，于是 s_1,s_2,s_3 都是奇数，从而有

$s_4\geqslant 3s_3\geqslant 9s_2\geqslant 27s_1\geqslant 27\times 39>1000$. 矛盾.

这表明所求的最小自然数 $n\geqslant 982$.

另一方面，令

$\begin{cases}S_1=\{3,9,27,81,243,729\},\\T_1=\{2,4,8,16,32,64\},\\U_1=\{6,12,24,48,96,192\};\end{cases}$ $\begin{cases}S_2=\{5,15,45,135,405\},\\T_2=\{41,82,164,328,656\},\\U_2=\{10,20,40,80,160\};\end{cases}$

$\begin{cases}S_3=\{7,21,63,189,567\},\\T_3=\{43,86,172,344,688\},\\U_3=\{14,28,56,112,224\};\end{cases}$ $\begin{cases}S_4=\{11,33,99,297,891\},\\T_4=\{47,94,188,376,752\},\\U_4=\{22,44,88,176,352\};\end{cases}$

$\begin{cases}S_5=\{13,39,117,351\},\\T_5=\{53,106,212,424\},\\U_5=\{26,52,104,208\};\end{cases}$ $\begin{cases}S_6=\{17,51,153,459\},\\T_6=\{59,118,236,472\},\\U_6=\{34,68,136,272\};\end{cases}$

$\begin{cases}S_7=\{19,57,171,513\},\\T_7=\{61,122,244,488\},\\U_7=\{38,76,152,304\};\end{cases}$ $\begin{cases}S_8=\{23,69,207,621\},\\T_8=\{67,134,268,536\},\\U_8=\{46,92,184,368\};\end{cases}$

$\begin{cases}S_9=\{25,75,225,675\},\\T_9=\{71,142,284,568\},\\U_9=\{50,100,200,400\};\end{cases}$ $\begin{cases}S_{10}=\{29,87,261,783\},\\T_{10}=\{73,146,292,584\},\\U_{10}=\{58,116,232,464\};\end{cases}$

$\begin{cases}S_{11}=\{31,93,279,837\},\\T_{11}=\{79,158,316,632\},\\U_{11}=\{62,124,248,496\};\end{cases}$ $\begin{cases}S_{12}=\{35,105,315,945\},\\T_{12}=\{83,166,332,664\},\\U_{12}=\{70,140,280,560\};\end{cases}$

$\begin{cases}S_{13}=\{37,111,333,999\},\\T_{13}=\{89,178,356,712\},\\U_{13}=\{74,148,296,592\}.\end{cases}$

将 S_i,T_i,U_i 中序号相同的 3 个数组成一个三元数组. 共可得到 57 个三元数组，对于 M 的任一 982 元子集 B，只有 M 中的 17 个数不在 B 中，故至少有上述 57 个三元数组中的 40 个含在 B 中，这 40 个三元数组分属于上述 13 组中，由抽屉原理知，至少有 4 个三元数组属于上述 13 组的同一组中，将这 4 个三元数组写成 3×4 数表，3 行数分别为 S,T,U，即满足题中要求.

综上所述，可知所求的最小自然数 $n=982$.

12. 由(i)得

$$\sqrt{a}>\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}, \qquad ①$$

不妨设 $\frac{a}{\sin^2\theta}+\frac{a}{\cos^2\theta}\leqslant 1.$ ②

(ii)等价于：存在 $x\in\left[1-\frac{\sqrt{a}}{\sin\theta},\frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\right]$，满足

$2(1-x)\sin\theta\sqrt{a-x^2\cos^2\theta}+2x\cos\theta\sqrt{a-(1-x)^2\sin^2\theta}\geqslant a$，即

$$2\sin\theta\cos\theta\left[(1-x)\sqrt{\frac{a}{\cos^2\theta}-x^2}+x\sqrt{\frac{a}{\sin^2\theta}-(1-x)^2}\right]\geqslant a. \qquad ③$$

先证一个引理：设 $o<p<1,o<q<1,p+q>1,p^2+q^2\leqslant 1,f(x)=(1-x)\sqrt{p^2-x^2}+x\sqrt{q^2-(1-x)^2}(1-q\leqslant x\leqslant p)$，则当 $\sqrt{p^2-x^2}=\sqrt{q^2-(1-x)^2}$ 时，即 $x=\frac{p^2-q^2+1}{2}\in[1-q,p]$ 时，$f(x)$ 达到最大值.

引理的证明：由于 $1-q\leqslant x\leqslant p$，因此可令

$x=p\sin\alpha,1-x=q\sin\beta,0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2},\alpha+\beta<\pi.$ 于是，有

$f(x)=pq(\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta)=pq\sin(\alpha+\beta)$，

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{p^2-x^2}\sqrt{q^2-(1-x)^2}-x(1-x)}{pq}.$

由于

$$\begin{aligned}&2[\sqrt{p^2-x^2}\sqrt{q^2-(1-x)^2}-x(1-x)]\\&=-(\sqrt{p^2-x^2}-\sqrt{q^2-(1-x)^2})^2+p^2+q^2-x^2-(1-x)^2-2x(1-x)\\&=p^2+q^2-1-(\sqrt{p^2-x^2}-\sqrt{q^2-(1-x)^2})^2\leqslant 0,\end{aligned}$$

从而，$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha+\beta<\pi.$

同时，当且仅当 $\sqrt{p^2-x^2}=\sqrt{q^2-(1-x)^2}$ 时，即 $x=\frac{1}{2}(p^2-q^2+1)\in[1-q,p]$ 时，$\cos(\alpha+\beta)$ 达到最大值 $\frac{p^2+q^2-1}{2pq}$0.

因为在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上正弦函数单调递减，所以，$f(x)=pq\sin(\alpha+\beta)$ 也当且仅当 $x=\frac{1}{2}(p^2-q^2+1)$ 时达到最大值.

由引理可知，式③左端当且仅当

$\sqrt{\frac{a}{\cos^2\theta}-x^2}=\sqrt{\frac{a}{\sin^2\theta}-(1-x)^2}$，即

$x=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\cos^2\theta}-\frac{a}{\sin^2\theta}+1\right)\in\left[1-\frac{\sqrt{a}}{\sin\theta},\frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\right]$ 时，达到最大值

$$2\sin\theta\cos\theta\sqrt{\frac{a}{\cos^2\theta}-\frac{1}{4}\left(\frac{a}{\cos^2\theta}-\frac{a}{\sin^2\theta}+1\right)^2},$$

即 $\sin\theta\cos\theta\sqrt{\frac{4a}{\cos^2\theta}-\left(\frac{a}{\cos^2\theta}-\frac{a}{\sin^2\theta}+1\right)^2}.$

由③得知，所求的最小的 a 是满足下式且满足①的最小的 a：

$$\sqrt{\frac{4a}{\cos^2\theta}-\left(\frac{a}{\cos^2\theta}-\frac{a}{\sin^2\theta}+1\right)^2}\geqslant\frac{a}{\cos\theta\sin\theta},$$

即 $$a^2\left(\frac{1}{\cos^4\theta}+\frac{1}{\sin^4\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)-2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)a+1\leqslant 0 \quad ④$$

因为 $\dfrac{1}{\cos^4\theta}+\dfrac{1}{\sin^4\theta}-\dfrac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{1-3\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^4\theta\cos^4\theta}>0$，

④的左端的根为

$$\frac{\sin^4\theta\cos^4\theta}{1-3\sin^2\theta\cos^4\theta}\left[\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)^2-\frac{1}{\cos^4\theta}-\frac{1}{\sin^4\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}}\right]$$

$$=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1\mp\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta},$$

所以，由④可得

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}\leqslant a\leqslant\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}.$$

由于 $\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}<\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}$，

因此，当

$a=\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}$时，满足①，故所求的

$$a=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}.$$

13.(A)先求 f 的最小值. 令

$$p=\frac{2am-m^2+n^2}{2n}. \quad ①$$

由条件(1)和(2)可知，p 为正整数且有

$$(2a-m)m=(2p-n)n. \quad ②$$

由(1)有 $2-m>0$，故由式②可知 $2p-n>0$.

由条件(3)可得

$2am-m^2+n^2=2am-2mn+2mn-m^2+n^2\leqslant 2am-2mn+2a(n-m)=2n(a-m)$.

从而由 p 的定义①可得 $p\leqslant a-m$. 于是有

$2p-n<2p\leqslant 2(a-m)=2a-2m<2a-m$.

再由②可知，m 与 n 同奇偶且有 $n>m$. ③

设 $(m,n)\in A$，令 $n'=2p-n=\dfrac{2am-m^2}{n}$.

于是，n' 也是正整数且容易验证

$(m,n)\in A\Leftrightarrow(m,n')\in A$.

事实上，在①中将 p 和 n 同时换成 p' 和 n'，便有

$$p'=\frac{2am-m^2+n'^2}{2n'}=\frac{2am-m^2}{2n'}+\frac{n'}{2}$$

$=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2am-m^2}{n}=\frac{2am-m^2+n^2}{2n}=p.$

这表明 p 为正整数的充要条件是 p' 为正整数，亦即关于 (m,n') 的条件(2)成立的充要条件是关于 (m,n) 的条件(2)成立.

另一方面，对于 (m,n') 的条件(3)，又有

$$n'^2-m^2+2mn'-2a(n'-m)$$
$$=\left(\frac{2am-m^2}{n}\right)^2-m^2+2m\cdot\frac{2am-m^2}{n}-2a\left(\frac{2am-m^2}{n}-m\right)$$
$$=\left(\frac{2am-m^2}{n}\right)^2+(2am-m^2)+\frac{2(2am-m^2)}{n}(m-a)$$
$$=\frac{2am-m^2}{n^2}[(2am-m^2)+n^2+2n(m-a)].$$

再由条件(1)便知，关于 (m,n') 的条件(3)成立的充要条件是关于 (m,n) 的条件(3)成立，这就证明了

$$(m,n')\in A\Leftrightarrow(m,n)\in A.$$

这样一来，由此及 n' 的定义即知，当 $(m,n)\in A$ 时，有

$$f(m,n)=\frac{2am-m^2-mn}{n}=n'-m,\ f(m,n')=\frac{2am-m^2-mn'}{n'}=n-m.$$

由③可知，当 $(m,n)\in A$ 时，有

$$f(m,n)=n'-m\geqslant 2. \qquad ④$$

取 $m=2$，于是，条件(2)化为

$$2n\mid 4a-4+n^2,$$

即 $\frac{4000}{n}+\frac{n}{2}$ 为正整数. 这时条件(3)化为

$$n^2-3998n+8000\leqslant 0.$$

由此解得

$$1999-\sqrt{1999^2-8000}\leqslant n\leqslant 1999+\sqrt{1999^2-8000}.$$

从而有

$$3\leqslant n\leqslant 3995.$$

这表明 $(2,n)\in A$ 等价于 $n\in[3,3995]$ 且为 4000 的偶因子.

取 $n=2000$，于是

$$n'=\frac{2am-m^2}{n}=\frac{8000}{2000}=4.$$

故得 $f(2,2000)=2$.

综上可知，$\min\limits_{(m,n)\in A}f=2$.

(B)再求 f 的最大值.

由(一)知，当 $(m,n)\in A$ 时，m 和 n 同奇偶且 $n>m$，故可令 $n=m+2u$，其中 u 为正整数，于是有

$$f(m,n)=\frac{2am-m^2-mn}{n}=\frac{2(a-u)m-2m^2}{m+2u}$$
$$=\frac{2(a-u)(m+2u)-2(a-u)2u}{m+2u}-\frac{2(m+2u)^2+8(m+2u)u-8u^2}{m+2u}$$

$$=(2a+6u)-2\left[m+2u+\frac{2u(a+u)}{m+2u}\right].\qquad ⑤$$

由条件(3)可知

$(m+2u)^2-m^2+2m(m+2u)\leqslant 4ua$，即 $m^2+4um-2au+2u^2\leqslant 0$.

由此解得

$m\leqslant -2u+\sqrt{2u(a+u)}$，即 $m+2u\leqslant\sqrt{2u(a+u)}$. ⑥

由⑥和⑤知，当 u 固定时，$f(m,m+2u)$ 关于 m 严格递增.

又 $f(m,m+2u)$ 为正偶数，

则 $m+2u$ 必为 $2u(a+u)$ 的因数.

当 $u=1$ 时，$2(a-1)=4004=4\times7\times11\times13$.

由式⑤右端方括号中表达式的对称性知，可设

$m+2\leqslant[\sqrt{4004}]=63$.

于是，$m\in\{2,5,9,11,12,20,24,26,42,50\}$.

易得，当 $m=50,n=52$ 时，$(m,n)\in A$ 且有

$f(50,52)=4002+6-2[52+\frac{4004}{52}]=3750$.

由于 $f(m,m+2u)$ 关于 m 严格递增，所以有 $f(m,m+2)\leqslant 3750$.

以下证明，对任意 $(m,n)\in A$，都有 $f(m,n)\leqslant 3750$. ⑦

上面已证，当 $n=m+2$ 时，式⑦成立. 由于 m 和 n 同奇偶且 $n>m$，故可设 $n\geqslant m+4$，于是

$f(m,n)=\frac{(2a-m)m}{n}-m\leqslant\frac{(2a-m)m}{m+4}-m$.

可见，为证式⑦成立，只须证明，对任意

$1\leqslant m<2a=4002$，都有

$\frac{(2a-m)m}{m+4}-m\leqslant 3750$. ⑧

整理后得到

$m^2-124m+2\times3750\geqslant 0$. ⑧

由于

$\Delta=124^2-8\times3750=4(62^2-7500)<0$，

故知⑧′成立，从而⑧成立，⑦成立.

综上可知 $\max\limits_{(m,n)\in A}f(m,n)=3750$.

14. 当 $n=1$ 时，$\cos\theta_1=(1+\tan^2\theta_1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，有 $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$，当 $n=2$ 时，可以证明

$\cos\theta_1+\cos\theta_2\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$， ①

且当 $\theta_1=\theta_2=\arctan\sqrt{2}$ 时等号成立. 事实上，

式①$\Leftrightarrow\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+2\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\leqslant\frac{4}{3}$，

即 $\frac{1}{1+\tan^2\theta_1}+\frac{1}{1+\tan^2\theta_2}+2\sqrt{\frac{1}{(1+\tan^2\theta_1)(1+\tan^2\theta_2)}}\leqslant\frac{4}{3}$.

由 $\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2=2$ 可得

式②$\Leftrightarrow\dfrac{2+\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2}{5+\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2}+2\sqrt{\dfrac{1}{5+\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2}}\leqslant\dfrac{4}{3}$. ③

记 $x=\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2$，则

式③$\Leftrightarrow 2\sqrt{\dfrac{1}{5+x}}\leqslant\dfrac{14+x}{3(5+x)}$，

即 $36(5+x)\leqslant196+28x+x^2$. ④

显然式④$\Leftrightarrow x^2-8x+16=(x-4)^2\geqslant0$.

于是，$\lambda=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

当 $n\geqslant3$ 时，不妨设 $\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n$，则

$\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2\cdot\tan\theta_3\geqslant2\sqrt{2}$.

由于 $\cos\theta_i=\sqrt{1-\sin^2\theta_i}<1-\dfrac{1}{2}\sin^2\theta_i$，则

$\cos\theta_2+\cos\theta_3<2-\dfrac{1}{2}(\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3)<2-\sin\theta_2\cdot\sin\theta_3$.

由 $\tan^2\theta_1\geqslant\dfrac{8}{\tan^2\theta_2\cdot\tan^2\theta_3}$，有

$\dfrac{1}{\cos^2\theta_1}\geqslant\dfrac{8+\tan^2\theta_2\cdot\tan^2\theta_3}{\tan^2\theta_2\cdot\tan^2\theta_3}$，

即 $\cos\theta_1\leqslant\dfrac{\tan\theta_2\cdot\tan\theta_3}{\sqrt{8+\tan^2\theta_2\cdot\tan^2\theta_3}}=\dfrac{\sin\theta_2\cdot\sin\theta_3}{\sqrt{8\cos^2\theta_2\cdot\cos^2\theta_3+\sin^2\theta_2\cdot\sin^2\theta_3}}$.

于是，

$\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cos\theta_1<2-\sin\theta_2\cdot\sin\theta_3\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{8co^2\theta_2\cdot\cos^2\theta_3+\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3}}\right]$. ⑤

易知 $8\cos^2\theta_2\cdot\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2\cdot\sin^2\theta_3\geqslant1$

$\Leftrightarrow8+\tan^2\theta_2\cdot\tan^2\theta_3\geqslant\dfrac{1}{\cos^2\theta_2\cdot\cos^2\theta_3}=(1+\tan^2\theta_2)(1+\tan^2\theta_3)$

$\Leftrightarrow\tan^2\theta_2+\tan^2\theta_3\leqslant7$. ⑥

由此可得当式⑥成立时，有

$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3<2$. ⑦

若式⑥不成立，则 $\tan^2\theta_2+\tan^2\theta_3\geqslant7$，

有 $\tan^2\theta_1\geqslant\tan^2\theta_2\geqslant\dfrac{7}{2}$.

所以 $\cos\theta_1\leqslant\cos\theta_2\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{7}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

于是 $\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3\leqslant\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+1<2$，

即式⑦成立. 由此可得

$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cdots+\cos\theta_n<n-1$.

另一方面,取 $\theta_2=\theta_3=\cdots=\theta_n=\alpha>0,\alpha\to0$,

$\theta_1=\arctan\dfrac{2^{\frac{n}{2}}}{(\tan\alpha)^{n-1}}$,显然 $\theta_1\to\dfrac{\pi}{2}$,从而

$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cdots+\cos\theta_n\to n-1$.

综上可得 $\lambda=n-1$.

15.(Ⅰ)记 $t_i=\dfrac{x_{i+1}}{x_i}(>1)$,$1\leqslant i\leqslant n+1$.题中的式子可写成

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}t_{i+1}\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{t_it_{i+1}}{t_i+t_{i+1}}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\right)}.$$

我们看到

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_it_{i+1}}{t_i+t_{i+1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}t_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^2}{t_i+t_{i+1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^2}{t_i+t_{i+1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\right)$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{\sqrt{t_i+t_{i+1}}}\sqrt{t_i+t_{i+1}}\right)^2$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}t_{i+1}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}t_{i+1}\right).$$

因此,对符合条件的实数组 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<x_{n+2}$,题中的式子不小于 1.

(Ⅱ)上面推演中用到 Cauchy 不等式,等号成立的充分必要条件是

$$\frac{\sqrt{t_i+t_{i+1}}}{\dfrac{t_i}{\sqrt{t_i+t_{i+1}}}}=d(1\leqslant i\leqslant n)(\text{常数}).$$

也就是 $\dfrac{t_{i+1}}{t_i}=d-1=c$,$1\leqslant i\leqslant n$.

记 $t_1=b$,有 $t_j=bc^{j-1}$,$1\leqslant j\leqslant n+1$.

相应地有 $\dfrac{x_{j+1}}{x_j}=t_j=bc^{j-1}$,$1\leqslant j\leqslant n+1$.

记 $x_1=a>0$,有

$x_k=t_{k-1}t_{k-2}\cdots t_1,a=ab^{k-1}c^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}$,$2\leqslant k\leqslant n+2$.

因 $x_2>x_1$,则 $b=\dfrac{x_2}{x_1}>1$.

又因 $t_j=bc^{j-1}>1$,$1\leqslant j\leqslant n+1$,

则 $c>\sqrt[n]{\dfrac{1}{b}}\left(\geqslant\sqrt[j-1]{\dfrac{1}{b}},1\leqslant j\leqslant n+1\right)$.

(Ⅲ)得到结论:

(i)对于符合条件的实数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1},x_{n+2}$,题中式子的最小值是 1.

(ii)能使该式达到最小值的符合条件 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<x_{n+2}$ 的实数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,x_{n+1},x_{n+2} 应该是

$$x_1=a, x_k=ab^{k-1}c^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}, 2\leqslant k\leqslant n+2,$$

其中 $a>0, b>1, c>\sqrt[n]{\frac{1}{b}}$.

16. 当 $p_1>2$ 时,2 不能表成$(p_1p_2\cdots p_{25})^{2004}$的不同正约数之和,此时 $T=1$.

设 $p_1=2$,我们证明如下更一般的结论:

如果 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 为 k 个互不相同的质数,$p_i<p_{i+1}\leqslant p_i^{2005}(i=1,2,\cdots,k)$,$p_1=2$,则能表成$(p_1p_2\cdots p_k)^{2004}$的不同正约数之和的正整数所成集合为$\{1,2,3,\cdots,T_k\}$,其中

$$T_k=\frac{p_1^{2005}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{2005}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_k^{2005}-1}{p_k-1}.$$

注意到$(p_1p_2\cdots p_k)^{2004}$的所有正约数之和为 T_k. 只要证明,当 $1\leqslant n\leqslant T_k$ 时,n 可表成$(p_1p_2\cdots p_k)^{2004}$的不同正约数之和.

当 $k=1$ 时,设 $1\leqslant n\leqslant T_1=1+2+2^2+\cdots+2^{2004}$.

由 n 可表成二进制知 n 可表成 2^{2004} 的不同正约数之和.

假设结论对 k 成立,设 $1\leqslant n\leqslant T_{k+1}$. 由 $T_{k+1}=T_k(1+p_{k+1}+\cdots+p_{k+1}^{2004})$知存在 $0\leqslant i\leqslant 2004$,使得

$$T_k(p_{k+1}^{i+1}+p_{k+1}^{i+2}+\cdots+p_{k+1}^{2004})<n\leqslant T_k(p_{k+1}^{i}+p_{k+1}^{i+1}+\cdots+p_{k+1}^{2004}).$$

当 $i=2004$ 时,不等式左边为 0. 于是,

$$1\leqslant n-T_k(p_{k+1}^{i+1}+p_{k+1}^{i+2}+\cdots+p_{k+1}^{2004})\leqslant T_kp_{k+1}^{i}.$$

取整数 m_i,使得

$$0\leqslant n-T_k(p_{k+1}^{i+1}+p_{k+1}^{i+2}+\cdots+p_{k+1}^{2004})-m_ip_{k+1}^{i}<p_{k+1}^{i}.$$

所以,$0\leqslant m_i\leqslant T_k$.

将 $n-T_k(p_{k+1}^{i+1}+p_{k+1}^{i+2}+\cdots+p_{k+1}^{2004})-m_ip_{k+1}^{i}=m_0+m_1p_{k+1}+\cdots+m_{i-1}p_{k+1}^{i-1}$.

当 $j\leqslant i-1$ 时,

$$0\leqslant m_j\leqslant p_{k+1}-1\leqslant p_k^{2005}-1\leqslant\frac{p_1^{2005}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{2005}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_k^{2005}-1}{p_k-1}=T_k.$$

(这里用到了 $p_{n+1}-1\leqslant p_n^{2005}-1, p_1-1=1$.)

令 $m_{i+1}=m_{i+2}=\cdots=m_{2004}=T_k$,则 $n=m_0+m_1p_{k+1}+\cdots+m_{2004}p_{k+1}^{2004}(0\leqslant m_i\leqslant T_k, 0\leqslant i\leqslant 2004)$.

由归纳假设知,每一个非零 m_i 均可表成$(p_1p_2\cdots p_k)^{2004}$的不同正约数之和,结论得证.

所以,当 $p_1>2$ 时,$T=1$;当 $p_1=2$ 时,$T=\frac{p_1^{2005}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{2005}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_{25}^{2005}-1}{p_{25}-1}$.

第 14 章 适应性问题的求解思路

A 组

1. 填 240. 理由:当十位数为 0 时,符合条件的凹数有 9×8 个,当十位数为 1 时,符合条件的凹数有 8×7 个……

当十位数为 7 时,符合条件的凹数有 2×1 个. 共有 72+56+42+30+20+12+6+2=240 个.

2. 不可能,因第一步共有三种情况:

(i)(51,49,5)→(100,5)都为 5 的倍数;

(ii)(51,49,5)→(51,54)都为 3 的倍数;

(iii)(51,49,5)→(56,49)都为 7 的倍数.

综上,由题设的两种步骤,任何时候都不会产生块数为 1 的石堆.

3. 按如下法则构造这些子集:在第 i 个子集($1\leqslant i\leqslant 99$)中放入所有被 99 除余 $i-1$ 的偶数而在第 100 个子集中放入所有的奇数. 显然,在任何满足方程 $a-99b=c$ 的数 a、b、c 中,偶数的个数为奇数. 如果它们中有两个为奇数,则此二奇数同属第 100 号子集;否则,它们全为偶数,且 a 和 c 被 99 除同余,故知 a 与 c 属同一子集.

4. 先在 3×4 的棋盘上玩. 先行的人在中间那行的任意地方放第一个棋子就可获胜. 这样,给后行的人留下两列放棋子的地方,而先行的人可以在第一个棋子上面和下面再放两个棋子. 现把 3×1000 的棋盘分成 250 个 3×4 的棋盘,因为后行的人只能在这样的棋盘上放棋子,先行的人在每个 3×4棋盘上采用前面的策略必定取胜.

5. 电脑说的是正确的.

在下午 k:00 时,$1\leqslant k\leqslant 6$,汽车行驶的距离是全程的 $\frac{60k-20}{60k+40}$,汽车至此的平均速度是 $\sqrt{\frac{1}{60k+40}}$. 若仍以同样的速度行驶剩下的 $\frac{60}{60k+40}$ 恰需一小时抵达目的地. 注意到下午($k-1$):00 时到 k:00 时之间,行驶的距离是全程距离的

$$\frac{60k-20}{60k+40}-\frac{60k-80}{60k-20}=\frac{3600}{(60k+40)(60k-20)},$$

且这些数都是确定的. 在下午 6:00 时,走过的距离是 $\frac{340}{400}=\frac{17}{20}$,这意味着汽车已行驶了 85 公里.

6. 考虑集合 $D=\{x-y\mid x,y\in A\}$,D 中至多有 $101\times 100+1=10101$ 个元素. 易知两个集合 A_i 与 A_j 有非空的交集的充要条件为 $t_i-t_j\in D$. 于是,只要选取 S 中的 100 个元素,其差不属于 D.

归纳选取:首先任取一个元素 x,则 $x+D$ 中的元素不能再被选取. 假设已选取 k 个元素,$k\leqslant 99$. 此时至多有 $10101k\leqslant 999999$ 个元素不能选取. 因此,至少还有一个元素可以选取,则选取第 $k+1$ 个元素. 如此下去,直至选取出 100 个满足条件的元素.

7. 一定可以.

构造 1 个图,它的顶点为电话机,它的边为导线. 考察图中这样的顶点的最小集合:在联结它们的导线中包含有所有 4 种颜色. 从中任意去掉 1 个顶点(称为 A),由于原来的集合是具有所述性质的最小的集合,所以,在联结剩下的顶点的导线中已经不会 4 种颜色齐全. 如果此时恰好剩有 3 种颜色,那么,结论已经成立. 否则,在去掉顶点 A 的时候至少去掉了 2 种颜色的导线. 我们来考察由顶点 A 连往其他顶点的 2 条这 2 种颜色的导线(不妨设它们分别连往顶点 B 和顶点 C). 显然,联结顶点 B 和顶点 C 的导线一定不是这 2 种颜色的导线. 从而,顶点 A、B、C 即为所求.

8. (1)由 $C(25)=275$,$C(24)=288$,$C(23)=276$,$C(22)=264$.

有 $C(25)<C(23)<C(24)$.

由 $C(49)=490$,$C(48)=528$,$C(47)=517$,$C(46)=506$,$C(45)=495$,$C(44)=484$,

有 $C(49)<C(45)<C(46)<C(47)<C(48)$.

故共有 6 个 n(即 23,2,4,45,46,47,48)出现买多于 n 本书比恰好买 n 本书所花的钱少.

(2)设两人分别购买 a 本和 b 本,共付钱 s 元. 不妨设 $a\leqslant b$. 由 $a+b=60$ 知 $1\leqslant a\leqslant 30$.

(i)当 $1\leqslant a\leqslant 11$ 时,$49\leqslant b\leqslant 59$,

$s=12a+10b=10(a+b)+2a=600+2a, 602\leqslant s\leqslant 622.$

(ii)当 $12\leqslant a\leqslant 24$ 时，$36\leqslant b\leqslant 48$，

$s=12a+11b=660+a, 672\leqslant s\leqslant 684.$

(iii)当 $25\leqslant a\leqslant 30$ 时，$30\leqslant b\leqslant 35$，

$s=11a+11b=660.$

故出版公司至少赚 $602-60\times 5=302$(元)，至多赚 $684-60\times 5=384$(元).

9. 我们指出，此时任何两个颜色互异的棋子都不会同在一行，也不会同在一列. 事实上，如果开始时，某枚黑色棋子与白色棋子同在一列，则它在第一次时即被取出；而如果第一次取过之后，某枚白色棋子与剩下的某枚黑色棋子同在一行，则它会在第二次时被取出.

假定此时黑色棋子分布在 a 行和 b 列中，则白色棋子至多可分布在 $2n-a$ 行和 $2n-b$ 列中，从而剩下的黑色棋子不多于 ab 枚，白色棋子不多于 $(2n-a)(2n-b)$ 枚. 易见

$ab(2n-a)(2n-b)=a(2n-a)\cdot b(2n-b)\leqslant n^2\cdot n^2=n^4.$

因此，或者黑色棋子不多于 n^2 枚，或者白色棋子不多于 n^2 枚.

10. 为方便计，记 $a_{n+100}=a_n$，其中 $n=1,2,\cdots,100$. 用 (a,b) 表示正整数 a 和 b 的最大公约数.

引理　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 d 为自然数，则存在自然数 k，使得对一切 $i=2,3,\cdots,n$，均有 $(a_1+kd,a_i)\leqslant d$.

引理的证明：存在 $a_1a_2\cdots a_n$ 的某个倍数大于 a_1，设其为 $la_2a_3\cdots a_n$. 在使得 $a_1+kd>la_2a_3\cdots a_n$ 的自然数 k 中存在一个最小的数 k_0，记 $a'_1=a_1+k_0d$，于是 $0<a'_1-la_2a_3\cdots a_n\leqslant d$，从而 a'_1 与每个 a_i 的最大公约数不大于 d. 引理证毕.

考察数组 a_i，$i=1,2,\cdots,n$ 中的两两的最大公约数，设其中最大的一个为 M. 我们来证明，借助于题中所述的操作，可以把原来的数组变为这样的数组，它们中两两的最大公约数都小于 M. 事实上，由于 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 整体互质，所以可以找到两个相邻的数 a_i 和 a_{i+1}，其中前一个数可被 M 整除，而后一个数不可被 M 整除，于是 $d=(a_{i-1},a_{i+1})<M$，我们将引理应用于 a_i，将 a_i 加上 d 这样的一个倍数，使所得到的 a'_i 与其余的每一个数的最大公约数都不大于 d. 这样一来，在所得到的瓣的数组中，任何两个数的最大公约数仍如同原来那样都不大于 M，而可被 M 整除的数的个数则比原来的少. 在需要时，再重复进行这样的操作，直到仅剩下一个可被 M 整除的数为止. 于是，任何两个数的最大公约数都变得小于 M.

这表明，只要两两之最大公约数中有大于 l 者，即可如此地使它减小，由于可以一直把它减小到1，从而可使题中条件满足.

B组

1. 将平面上的整点称为结点. 如果在每1条竖直直线上的所有结点都是同一种颜色的，则任选其中1个结点(设其为1号色). 作2条经过它的相互垂直的直线，使它们与竖直方向都交成45°的角，且在它们上面分别取出1个2号色的点和一个3号色的点(这是可以做到的，因为存在具有这些颜色的点竖直直线)，所得的直角三角形即为所求. 如果每1条水平直线上的所有结点都是同一种颜色的，则可类似地解答.

如果存在1条竖直直线 l，其上的结点分别被染为2种不同颜色(设为1号色和2号色)，那么，我们任取1个3号色的点 C，再取出与点 C 同在1条水平直线上的那个位于直线 l 上的点 A(不妨设

其为 1 号色)，以及位于直线 l 上的具有 2 号色的点 B，所得的直角三角形即为所求.

如果存在一条竖直直线 l，其上的结点分别被染为 3 种不同颜色，那么，我们再取 1 条水平直线 h，使得其上的点不是同一种颜色. 不妨设它们的交点 A 是 1 号色的. 我们在直线 h 上取一点 B 使其与 A 异色(设其为 2 号色)，再在直线 l 上取 1 个 3 号色的点 C 即可.

2. 由奇偶性可知，开始的五个数中一定有一个数是 2.

若 $a_i=a_{i+1}=2$，则 $a_n=2, n\geqslant i$.

若有相邻两数为 2,3 或 3,2，则可得周期序列 2,3,5,2,7,3,2,5,7,2,3…

若 $a_i=2$，a_{i+1} 是一个大于 3 的奇素数，则要么 $a_{i+1}\equiv1(\bmod 6)$，要么 $a_{i+1}\equiv-1(\bmod 6)$. 当 a_{i+1} 为 $6k+1$ 型时，有序列 $2,6k+1,3,2,\cdots$；当 a_{i+1} 为 $6k-1$ 型时，则 $a_{i+2}\mid(6k+1)$. 若 $a_{i+2}\equiv1(\bmod 6)$，则可得序列 $2,6k-1,6l+1,2,3,\cdots$；若 $a_{i+2}\equiv-1(\bmod 6)$，设 $a_{i+2}=6l-1$，由 $6l-1<\dfrac{6k+1}{2}<6k-1$，得 $l<k$，即 $a_{i+2}<a_{i+1}$，且有 $a_{i+3}=2$；若 $a_{i+4}\equiv-1(\bmod 6)$，同理可得 $a_{i+4}<a_{i+2}<a_{i+1}$. 重复以上过程，假设所有奇素数均模 6 余 -1，则可得一严格递减的素数序列，矛盾. 因此，一定存在某个 i，使得 $a_i=2$，$a_{i+2}=6k+1$.

综上所述，x 是有理数.

3. 答案：25 名.

事实上，将比自己的大多数班内朋友的成绩都要好的学生称为“好学生”. 设该班共有 x 名好学生，每个学生在班内都有 k 个朋友.

显然，班上成绩最好的学生在 k 个“朋友对”中都是成绩好的；又由已知，其余每个“好学生”至少在 $\left[\dfrac{k}{2}\right]+1\geqslant\dfrac{k+1}{2}$ 个“朋友对”中都是成绩好的. 因此，“好学生”们至少在

$$k+(x-1)\cdot\frac{k+1}{2}$$

个“朋友对”中是成绩好的，但班内所有“朋友对”的总数为 $\dfrac{30k}{2}=15k$，所以

$$k+(x-1)\frac{k+1}{2}\leqslant15k, x\leqslant28\cdot\frac{k}{k+1}+1. \qquad ①$$

注意到比班内最差的“好学生”成绩还差的学生至多 $30-x$ 个，因此

$$\frac{k+1}{2}\leqslant30-x, k\leqslant59-2x. \qquad ②$$

由①和②可得

$$x\leqslant28\cdot\frac{59-2x}{60-2x}+1, \text{即} \quad x^2-59x+856\geqslant0. \qquad ③$$

注意到 $x\leqslant30$，于是可知满足③式的最大整数 $x=25$. 即“好学生”的总数不超过 25.

另一方面，可将全班学生按成绩从好到差编为 1 至 30 号，并将 1 至 30 号列成一个 6×5 的数表(如图). 如果班内两个学生是朋友当且仅当他们的号码在表中属于以下三种情况之一：

(1)处于相邻的行不同的列中；

(2)处于同一列且其中一位在该列最下端；

(3)同在最上面一行.

这时，班内每人各有 9 个朋友，而 1 至 25 号中的每个人都比他的 5 个朋友的成绩好，此时，“好学生”的总数为 25 人.

综上所述，比自己的大多数朋友的成绩都要好的学生最多是25名.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

4. 设红点个数为m，X－集合数目为t，Y－集合数目为s. 对m，$0\leqslant m\leqslant\frac{n(n+1)}{2}$，进行归纳证明.

(1)当$m=0$时，由乘法原理，$s=t=n!$，命题成立.

(2)假设$m=k(0\leqslant k<\frac{n(n+1)}{2})$时，命题成立.

(3)对于$m=k+1$，设点$P(x_0,y_0)$是使x_0+y_0最大的红点之一. 那么，将P改为蓝点，由于不存在其他红点(x,y)，$x\geqslant x_0$，$y\geqslant y_0$，因此，这仍然是一个满足条件的集合，记为T'，对它类似地定义t'，s'.

对于T'，设它在$x=i(0\leqslant i\leqslant n-1)$列上的蓝点有$a_i$个，在$y=j(0\leqslant j\leqslant n-1)$行上的蓝点有$b_j$个，那么，$t'=\prod\limits_{i=0}^{n-1}a_i$，$s'=\prod\limits_{j=0}^{n-1}b_j$，由归纳假设，有$t'=s'$，即

$$\prod_{i=0}^{n-1}a_i=\prod_{j=0}^{n-1}b_j.$$

对于改变前的T，有

$$t=\Big(\prod_{\substack{i=0\\i\neq x_0}}^{n-1}a_i\Big)(a_{x_0}-1),s=\Big(\prod_{\substack{j=0\\j\neq y_0}}^{n-1}b_j\Big)(b_{y_0}-1).$$

在$x=x_0$列上，纵坐标大于等于y_0的T中的点有$n-x_0-y_0$个，所以，$a_{x_0}=n-x_0-y_0$.

同理，$b_{y_0}=n-x_0-y_0$.　故$a_{x_0}=b_{y_0}$.

于是，$\Big(\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq x_0}}^{n-1}a_i\Big)(a_{x_0}-1)=\Big(\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq y_0}}^{n-1}b_j\Big)(b_{y_0}-1)$，即$t=s$. 故对$m=k+1$时，命题也成立.

因此，对一切$0\leqslant m\leqslant\frac{n(n+1)}{2}$命题成立.

5. 注意到交换后所得的数列$t(A)$同样满足不等式$0\leqslant t(a_i)\leqslant i(i=0,1,2,\cdots,n)$. 我们将所有满足这些不等式的数列称为指标有界数列. 下面证明$a_i\leqslant t(a_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$.

若$a_i=0$，则显然成立. 否则，令$x=a_i>0$，$y=t(a_i)$. 前面连续x项$a_0,a_1,\cdots,a_{x-1}$中没有一项大于$x-1$，则它们都不同于x，且在x之前(如表1)，所以，$y\geqslant x$，即$a_i\leqslant t(a_i)=(i=0,1,2,\cdots,n)$.

表1

指标	0	1…	…	$x-1$	…	~
A	a_0	a_1	…	a_{x-1}	…	x
$t(A)$	$t(a_0)$	$t(a_1)$	…	$t(a_{x-1})$	…	y

这表明，数列经过有限次t变换后达到稳定，因为在指标有界数列中，第i项的值不超过i. 接下

来证明,若对某一个 i,$a_i=t(a_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$,则 t 变换也不会改变第 i 项的值.考虑下面两种情况:

(1)若 $a_i=t(a_i)=0$.这表明 a_i 左侧的每一项都是 0.则 $t(A)$的前 i 项也都是 0,且不断地重复.

(2)若 $a_i=t(a_i)=x>0$,则前面的 x 项都与 x 不同.因为 $t(a_i)=x$,所以,$a_x,a_{x+1},\cdots,a_{i-1}$都等于 x.因此,$t(a_j)=x(j=x,x+1,\cdots,i-1)$.再做变换 t 也不会改变第 i 项的值(如表 2).

表 2

指标	0	1	…	$x-1$	x	$x+1$	…	i
A	a_0	a_1	…	a_{x-1}	x	x	…	x
$t(A)$	$t(a_0)$	$t(a_1)$	…	$t(a_{x-1})$	x	x	…	x

第 $i(0\leqslant i\leqslant n)$项的值具有如下的性质:(i)值为整数;(ii)有上界 i;(iii)在 t 变换过程中值不减;(iv)在 t 变换下,值一旦稳定下来,就不再改变.

这就是说,只要经过不超过 n 次 t 变换,数列就会达到在 t 变换下稳定.

最后要证明,从初始的指标有界数列 $A=\{a_i\}(i=0,1,\cdots,n)$出发,经过不超过 $n-1$ 次 t 变换就可得到一个稳定的数列.对 n 用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时,两个可能的数列为$(a_0,a_1)=(0,0)$和$(a_0,a_1)=(0,1)$.在 t 变换下,它们已经稳定.

假设任何指标有界数列$\{a_i\}$,$i=0,1,2,\cdots,n$ 经过不超过 $n-1$ 次 t 变换,就变为一个在 t 变换下稳定的数列,考虑 $A=\{a_i\}$,$i=0,1,2,\cdots,n+1$,我们证明 A 经过不超过 n 次 t 变换达到稳定.

假设需要 $n+1$ 次 t 变换.这仅当 $a_{n+1}=0$,且每次变换使第 $n+1$ 项的值恰好增加 1 才可能,在 t 变换下,第 i 项的值不受其后项的影响.根据归纳假设,子数列 $A'=\{a_i\}$,$i=0,1,2,\cdots,n$,只要不超过 $n-1$ 次 t 变换就能达到稳定.因为第 n 项在不超过 $\min\{x,n-1\}$次 t 变换下,稳定于 $x(x\leqslant n)$,而第 $n+1$项的值,基于当前的假设,正好在 x 次 t 变换变为 x.因此,可以断言,第 $n+1$ 项在不超过 $n-1$ 次 t 变换后,值等于第 n 项的值.

但是,在一个数列中如果连续两项的值相等,则它们一起保持相等和稳定.因为第 n 项的值经过不超过 $n-1$ 次 t 变换就达到稳定,所以,A 在不超过 $n-1$ 次 t 变换就稳定了.这与假设需要 $n+1$ 次 t 变换矛盾.因此,最多只需要 n 次 t 变换就可使 $n+1$ 项的指标有界数列稳定.

第 15 章　运算性技能

A 组

1. 选 B.理由:进行估算,取水深 $h=\dfrac{H}{2}$,由 $h-V$ 图象(如图-10(2)可以看出,这时注水量 $V>\dfrac{1}{2}V_0$,水瓶的形状为 A、C、D 时都不会出现这种现象,故选 B(该题是取事件的特殊状态).

2. 选 A.理由:进行估算,取正四棱锥的侧棱长和底面边长相等,则 $Q=1,S=\sqrt{3}$,由此计算得正四棱锥的高 $h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,则 $V=\dfrac{1}{3}Qh=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$,将 $Q=1,S=\sqrt{3}$,代入四个选择支中,只有 A 符合要求.

3. 选 D.理由:显然如果先求球的半径 R,再求表面积,必是小题大作,由于 $S_{球}=4\pi R^2$,结合选择

支，发现只须估算球的半径 R 即可.

因为球的半径 R 不小于 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $S_{球}=4\pi R^2\geqslant 4\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{16\pi}{3}>5\pi$，故应选 D.

4. 填 $-\frac{3}{4}$. 理由：本题若平方后得到 $\sin 2\alpha$ 的值，再用万能公式求 $\tan\alpha$ 有点计算量，且求出的 $\tan\alpha$ 的值有 2 个，还要舍去一个，可估算如下：

由 $0<\alpha<\pi$ 知 $\sin\alpha>0$，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5}$，故 $\cos\alpha<0$，考虑到 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 及结果为 $-\frac{1}{5}$，可算出 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，故 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

5. 填 $(0,\frac{7}{27}]$. 理由：易知 x、y、$z\in(0,1)$，$1-x$、$1-y$、$1-z\in(0,1)$. 一方面，易得 $a=xy+yz+zx-2xyz>xy>0$. 当 x、$y\to 0$，$z\to 1$ 时，$a\to 0$. 另一方面，易得 $a=(1-x)x+(1-2x)yz$.

当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$1-2x\geqslant 0$.

因为 $yz\leqslant\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\left(\frac{1-x}{2}\right)^2$，所以，

$$a\leqslant(1-x)x+\frac{1}{4}(1-2x)(1-x)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^2(1-2x)$$
$$\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{x+x+1-2x}{3}\right)^3=\frac{7}{27}.$$

当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$1-2x<0$.

因为 $yz>0$，所以，$a<(1-x)x\leqslant\frac{1}{4}$.

综上所述，有 $a\in\left(0,\frac{7}{27}\right]$.

6. 显然 $b<0$，当 $x=0$ 时，a 取任意实数不等式恒成立. 故只考虑 $x\in(0,1]$，此时原不等式变为 $|x-a|<\frac{-b}{x}$，即 $x+\frac{b}{x}<a<x-\frac{b}{x}$.

故 $\left(x+\frac{b}{x}\right)_{\max}<a<\left(x-\frac{b}{x}\right)_{\min}$，$x\in(0,1]$.

(1) 当 $b<0$ 时，在 $(0,1]$ 上，$f(x)=x+\frac{b}{x}$ 为增函数，所以，

$\left(x+\frac{b}{x}\right)_{\max}=f(1)=1+b$.

(2) 当 $-1\leqslant b<0$ 时，在 $(0,1]$ 上，

$x-\frac{b}{x}=x+\frac{-b}{x}\geqslant 2\sqrt{-b}$.

当 $x=\sqrt{-b}$ 时，$\left(x+\frac{-b}{x}\right)_{\min}=2\sqrt{-b}$.

此时，要使 a 存在，必须有

$$\begin{cases}1+b<2\sqrt{-b},\\-1\leqslant b<0.\end{cases}$$

即 $-1\leqslant b<-3+2\sqrt{2}$.

当 $b<-1$ 时,在 $(0,1]$ 上,$f(x)=x-\frac{b}{x}$ 为减函数,当 $x=1$ 时,其值最小,所以,

$$\left(x-\frac{b}{x}\right)_{\min}=1-b>1+b.$$

综上所述,当 $-1\leqslant b<2\sqrt{2}-3$ 时,a 的取值范围是 $(1+b,2\sqrt{-b})$;当 $b<-1$ 时,a 的取值范围是 $(1+b,1-b)$. 显然 b 不可能大于或等于 $2\sqrt{2}-3$.

7. 从 $n+1$ 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 中选取 k 个,产生的 k 元子集共有 C_{n+1}^k 个.

另一方面,这些 k 元子集可以分为不交的两类:第一类含有 a_{n+1},第二类不含 a_{n+1}.

第一类中的子集是从 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中选取 $k-1$ 个,再添上 a_{n+1} 而得到的,因此共有 C_n^{k-1} 个.

第二类中的子集是从 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中选取 k 个得到的,共有 C_n^k 个.

综合以上两个方面便得结论.

8. 设有编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个盒子及编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 种球,每种球各 n 个.

在每个盒子中各放一个球的放法,即 n 个数(球的号码)的允许重复的排列数,应为 n^n(每一只盒子里可放 n 种球的任一种).

另一方面,用 (i,j) 表示在第 i 个盒子里放第 j 号球. 则 n 个"点"

$$(i_1,j_1),(i_2,j_2),\cdots,(i_n,j_n), \tag{①}$$

(其中 $i_k,j_k\in\{1,2,\cdots,n\},k=1,2,\cdots,n$)表示将 n 个球 $j_1,j_2,\cdots,j_n$(号码允许重复)分别放入盒子 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 里(盒子的号码也允许重复,即允许有些盒子里放几个球,有些盒子空着).

由于 i,j 都有 n 种选择,所以点 (i,j) 共有 $nn=n^2$ 个. 形如①的 n 个点的点组共有 C_{nn}^n 个.

其中 $1,2,\cdots,n$ 至少有一个不在横坐标中出现的点组有 $C_n^1\times C_{(n-1)n}^n$ 个,至少有两个不在横坐标中出现的点组有 $C_n^2\times C_{(n-2)n}^n$ 个,….

根据容斥原理,$1,2,0,n$ 都在横坐标中出现的点组有

$\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}C_n^kC_{(n-k)n}^n$ 个,这种点组也就是在每只盒子里各放一只球的放法. 所以

$$n^n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}C_n^kC_{(n-k)n}^n. \tag{②}$$

由于 $C_n^k=C_n^{n-k}$,②就是要证的恒等式.

9. 设想一个袋中有 A 个大小相同的球,其中有 a 个是白的,其余的是黑的,每次摸出一个球,不放回去,直到摸到白球为止.

这是一个必然事件(迟早摸到白球),所以概率为 1.

另一方面,第一次摸到白球的概率为 $\frac{a}{A}$. 第一次未摸到白球,第二次摸到的白球的概率为 $\frac{A-a}{A}\cdot\frac{a}{A-1}$,…,第 k 次才摸到白球的概率为 $\frac{A-a}{A}\cdot\frac{A-a-1}{A-1}\cdots\frac{A-a-(k-2)}{A(k-2)}\cdot\frac{a}{A-(k-1)}$ $(k=2,3,\cdots,A-a+1)$. 因此,摸到白球的概率为欲证式的左边,从而原式成立.

10. 考虑曲线 $y^x=n$ 与直线 $x=2,y=2$ 所成的曲边三角形的格点个数 s(包括曲边三角形的边界).

一方面，每条竖线 $x=k$（k 为区间 $[2,n)$ 内的整数）与曲线 $y^2=n$ 相交于点 $(k,\sqrt[k]{n})$. 所以这条线对 s 的"贡献"为 $[\sqrt[k]{n}]-1$（即这条线上有 $[\sqrt[k]{n}]-1$ 个格点属于所说的曲边三角形）. 从而

$$s=\sum_{k=2}^{n}([\sqrt[k]{n}]-1)=\sum_{k=2}^{n}[\sqrt[k]{n}]-(n-1). \quad ①$$

另一方面，每条横线 $y=h$（h 为区间 $[2,n]$ 内的整数）与曲线 $y^x=n$ 相交于点 $(\log_h n,h)$. 所以这条线对 s 的贡献为 $[\log_h n]-1$. 从而

$$s=\sum_{h=2}^{n}([\log_h n]-1)=\sum_{h=2}^{n}[\log_h n]-(n-1). \quad ②$$

综合①、②即得原式.

注　容易看出在曲边三角形内，点 (x,y) 的坐标满足 $x\leqslant\log_2 n<n$，$y\leqslant\sqrt{n}<n$. 所以①中的求和实际上只到 $[\log_2 n]$ 就应当结束，但为了方便起见，我们让和号延伸到 n，增添一些值为 0 的项 $[\sqrt[k]{n}]-1$，②式也是如此.

11. 把点 $(1,1)$ 看成是点圆 $C_2:(x-1)^2+(y-1)^2=0$，那么条件"与圆 C_1 切于点 $(1,1)$"就可转化为"过圆 C_1 与 C_2 的交点"，因而可以利用圆系方程来求解.

于是，由题意可设所求圆的方程为：

$(x-1)^2+(y-1)^2+\lambda(x^2+y^2-2x-4y+4)=0$. 化简得

$$x^2+y^2-2x-\frac{2(1+2\lambda)}{1+\lambda}y+\frac{2(1+2\lambda)}{1+\lambda}=0.$$

上述方程所表示的圆的圆心为 $\left(1,\dfrac{1+2\lambda}{1+\lambda}\right)$，因圆心在直线 $x-2y=0$ 上，

从而，$1-2\times\dfrac{1+2\lambda}{1+\lambda}=0$，

解得 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$.

将 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$ 代入(1)，即得所求圆的方程为 $x^2+y^2-2x-y+1=0$.

12. (1) 把欲求的渐近线视作蜕化双曲线 $(y+a)^2-(x-a)^2=0$，把点 $(3,1)$ 代入得 $a=1$，得 C 的渐近线方程为 $y=x-2$ 与 $y=-x$.

(2) 与(1)相仿，把已知的直线视作蜕化双曲线，所以双曲线方程可设为 $y^2-(x+1)^2=k$，因焦距为 4，故 $c^2=a^2+b^2=2k=4$，得 $k=2$. 所求的双曲线方程为 $y^2-(x+1)^2=2$.

13. 设 k 为任一大于零的参数，则

$$\begin{aligned}&\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\\&=\frac{\sqrt{k(p-a)}+\sqrt{k(p-b)}+\sqrt{k(p-c)}}{\sqrt{k}}\\&\leqslant\frac{k+(p-a)+k+(p-b)+k+(p-c)}{2\sqrt{k}}\\&=\frac{2}{3}\sqrt{k}+\frac{p}{2\sqrt{k}},\end{aligned}$$

$$\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\leqslant\left(\frac{3}{2}\sqrt{k}+\frac{p}{2\sqrt{k}}\right)_{\min}=\sqrt{3p}.$$

14. 引入参数 λ，有 $\frac{a^2}{b}\geqslant 2\lambda a-\lambda^2 b$.

于是，$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{y_n}\geqslant 2\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)-\lambda^2(y_1+y_2+\cdots+y_n)$. 只要求出使 $2\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)-\lambda^2(y_1+y_2+\cdots+y_n)=\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{y_1+y_2+\cdots+y_n}$ 成立的 λ. 由 $(y_1+y_2+\cdots+y_n)^2\lambda^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0$ 得 $\lambda=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{y_1+y_2+\cdots+y_n}$.

15. 由已知 $0<a<1$，故 $a^2<a$，令 $a+\frac{1}{2}=\lambda^2 a+\sqrt{2}\lambda a+\frac{1}{2}(\lambda>0)$，

则 $a+\frac{1}{2}>\lambda^2 a^2+\sqrt{2}\lambda a+\frac{1}{2}=(\lambda a+\frac{\sqrt{2}}{2})^2$.

由 $\lambda^2+\sqrt{2}\lambda=1$，解得 $\lambda=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sqrt{a+\frac{1}{2}}>\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

同理，$\sqrt{b+\frac{1}{2}}>\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}b+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故 $\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}>\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

B组

1. 选 C. 理由：易得圆 $x^2+y^2-5x=0$ 的直径为 5，所以过点 $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ 的弦长最大是 5. 又过点 $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ 且垂直于过该点的直径弦长最小，其长为 4，由 $a_3=a_1q^2$

2. 设这数列是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，若 $n\geqslant 17$. 则取前 17 项列成数表

$a_1,a_2,\cdots,a_7$,

$a_2,a_3,\cdots,a_8$,

…

$a_{11},a_{12},\cdots,a_{17}$.

横求和，得

$q=\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$，而 $4\leqslant a_3\leqslant 5, 4\leqslant a_1\leqslant 5$，所以，

$q=\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}\leqslant\sqrt{\frac{5}{4}}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$，且 $q\geqslant\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$S=\sum_{i=1}^{7}a_i+\sum_{i=2}^{8}a_i+\cdots+\sum_{i=11}^{17}a_i<0$,

竖求和，又得

$S=\sum_{i=1}^{11}a_i+\sum_{i=2}^{12}a_i+\cdots+\sum_{i=7}^{17}a_i>0$.

这一矛盾说明，项数 $n\leqslant 16$.

另一方面，构造 16 项数列：6，6，−15，6，6，6，−16，6，6，−16，6，6，6，−15，6，6，适合题意，有 $n\geqslant$

16.

综上得,数列最多有 16 项.

3. 考虑函数 $f(x)=(1+x)^k+(1+x)^{k+1}+\cdots+(1+x)^{k+(n-1)}$

$$=\frac{(1+x)^k-(1+x)^{k+(n-1)+1}}{1-(1+x)}$$

$$=\frac{(1+x)^{n+k}-(1+x)^k}{x}.$$

左边 x^k 的系数为 $C_k^k+C_{k+1}^k+\cdots+C_{n+k-1}^k=\frac{1}{k!}(P_k^k+P_{k+1}^k+\cdots+P_{n+k-1}^k)$.

右边 x^k 的系数为 $C_{n+k}^{k+1}=\frac{1}{(k+1)!}P_{n+k}^{k+1}$.

$\therefore\ \frac{1}{k!}(P_k^k+P_{k+1}^k+\cdots+P_{n+k-1}^k)=\frac{1}{(k+1)!}P_{n+k}^{k+1}$,

$\therefore\ (P_k^k+P_{k+1}^k+\cdots+P_{n+k-1}^k)=\frac{1}{(k+1)}P_{n+k}^{k+1}$.

从而原式成立.

4. 在(ii)中取 $y=0$ 并利用(i)得 $1*z=1+z$. ①

于是,$(1*y)*1$ 有两种算法:利用(ii),

$(1*y)*1=(1*(1\cdot y))+1=(1*y)+1=1+y+1=y+2$;

而由①,有 $(1*y)*1=(1+y)*1$.

综合上述两式得

$(1+y)*1=y+2$,即 $x*1=x+1$. ②

于是,$(x*y)*1$ 有两种算法:由②,

有 $(x*y)*1=(x*y)+1$;

又由(ii),$(x*y)*1=(1*xy)+1=(xy+1)+1=xy+2$.

综合上述两式得 $x*y=xy+1$.

特别地,$31*32=31\times32+1=993$.

5. 因 $\cot2^kx-\frac{1}{\sin2^{k+1}x}=\frac{1}{\sin2^{k+1}x}(2\cos^22^kx-1)=\frac{\cos2^{k+1}x}{\sin2^{k+1}x}=\cot2^{k+1}x$. (*)

(*)式中取 $k=0,1,\cdots,n-1$,并叠加即得要证的结论.

6. 因 $x\in(0,\pi)$ 时,函数 $y=\cos x$ 是递减函数,

则 $(a-b)(\cos A-\cos B)\leqslant0$,即 $a\cos A+b\cos B\leqslant a\cos B+b\cos A=c$. ①

同理 $a\cos A+c\cos C\leqslant c\cos A+a\cos C=b$, ②

$c\cos C+b\cos B\leqslant c\cos B+b\cos C=a$. ③

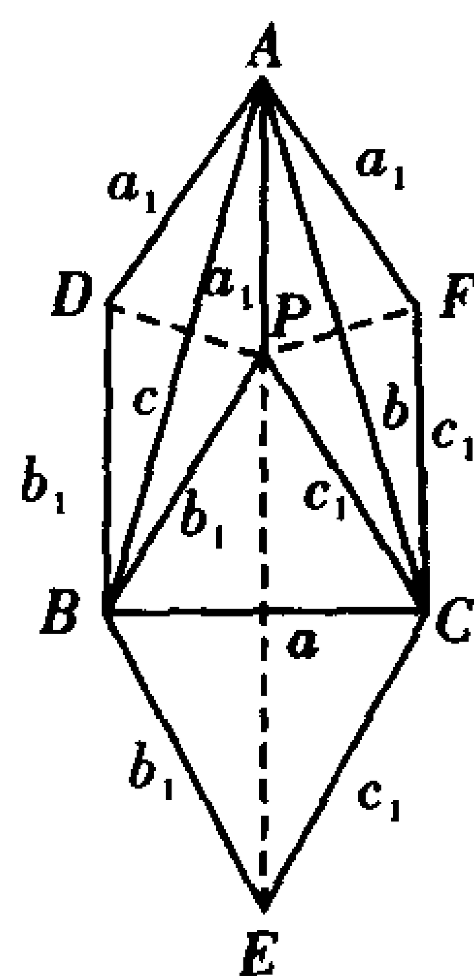
将①,②,③式的两边相加,得

$2(a\cos A+b\cos B+c\cos C)\leqslant a+b+c$,

此即 $a\cos A+b\cos B+c\cos C\leqslant\frac{a+b+c}{2}=p$.

7. 如图所示,作 P 关于 AB,BC,CA 的对称点 D,E,F. 则

$S_{\triangle ADP}=\frac{1}{2}a_1^2\sin\angle DAP$, ①



$S_{\triangle BDP}=\frac{1}{2}b_1^2\sin\angle DBP$, ②

$S_{\triangle BEP}=\frac{1}{2}b_1^2\sin\angle EBP$, ③

$S_{\triangle CEP}=\frac{1}{2}c_1^2\sin\angle ECP$, ④

$S_{\triangle CFP}=\frac{1}{2}c_1^2\sin\angle FCP$, ⑤

$S_{\triangle FAP}=\frac{1}{2}a_1^2\sin\angle FAP$. ⑥

将①～⑥式两边分别相加,得

$S_{\triangle ADP}=S_{\triangle BDP}+S_{\triangle BEP}+S_{\triangle CEP}=S_{\triangle CFP}+S_{\triangle FAP}=\frac{1}{2}a_1^2(\sin\angle DAP+\sin\angle FAP)+\frac{1}{2}b_1^2\cdot(\sin\angle DBP+\sin\angle EBP)+\frac{1}{2}c_1^2(\sin\angle ECP+\sin\angle FCP)$. (*)

在(*)式的左边,注意到

$S_{\triangle ADP}+S_{\triangle BDP}+S_{\triangle BEP}+S_{\triangle CEP}+S_{\triangle CFP}+S_{\triangle FAP}=2S_{\triangle ABC}=2\cdot\frac{abc}{4R}=\frac{abc}{2R}$($R$ 为$\triangle ABC$外接圆半径).

在(*)的右边,注意到

$\sin\angle DAP+\sin\angle FAP=2\sin A\cos\frac{1}{2}(\angle DAP-\angle FAP)\leqslant 2\sin A$,

$\sin\angle DBP+\sin\angle EBP=2\sin B\cos\frac{1}{2}(\angle DBP-\angle EBP)\leqslant 2\sin B$,

$\sin\angle ECP+\sin\angle FCP=2\sin C\cos\frac{1}{2}(\angle ECP-\angle FCP)\leqslant 2\sin C$,

从而,$\frac{abc}{2R}\leqslant a_1^2\sin A+b_1^2\sin B+c_1^2\sin C$,

即 $abc\leqslant(2R\sin A)a_1^2+(2R\sin B)b_1^2+(2R\sin C)c_1^2=aa_1^2+bb_1^2+cc_1^2$.

8. 对任意实数λ,有

$$\frac{a}{x^n}+\frac{b}{y^n}=\frac{a}{x^n}+\frac{b}{y^n}+n\lambda(x+y)-n\lambda=\frac{a}{x^n}+\underbrace{\lambda x+\cdots+\lambda x}_{n个\lambda x}-n\lambda$$

$$\geqslant(n+1)\sqrt[n+1]{\frac{a}{x^n}\cdot(\lambda x)^n}+(n+1)\sqrt[n+1]{\frac{b}{y^n}\cdot(\lambda y)^n}-n\lambda$$

$$=(n+1)[(a\lambda^n)^{\frac{1}{n+1}}+(b\lambda^n)^{\frac{1}{n+1}}]-n\lambda.$$

当且仅当$x=\sqrt[n+1]{\frac{a}{\lambda}}$,$y=\sqrt[n+1]{\frac{b}{\lambda}}$时上式等号成立.此时由$x+y=1$,得$\lambda=(\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+1]{b})^{n+1}$,$x=\frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+1]{b}}$,$y=\frac{\sqrt[n+1]{b}}{\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+1]{b}}$.所以$\frac{a}{x^n}+\frac{b}{y^n}$的最小值为$(\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+1]{b})^{n+1}$.

9. 因$\frac{a}{1-a^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(3a^2-1)=\frac{2a+\sqrt{3}a^2-\sqrt{3}}{2(1-a^2)}-\frac{\sqrt{3}}{2}(3a^2-1)$

$$=\frac{(\sqrt{3}a-1)(a+\sqrt{3})}{2(1-a^2)}-\frac{\sqrt{2}}{2}(3a^2-1)=\frac{(\sqrt{3}a^2-1)(3a^2+\sqrt{2}a^2-2a)}{2(1-a^2)}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}a-1)^2a(\sqrt{3}a+2)}{2(1-a^2)}\geqslant 0,$$

则$\frac{a}{1-a^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(3a^2-1)$.

同理可证

$$\frac{b}{1-b^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(3b^2-1),\frac{c}{1-c^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(3c^2-1).$$

上述三式相加即得待证不等式.

注　在上述证明中,得到不等式$\frac{a}{1-a^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(3a^2-1)$,它是通过采用待定系数法,令$\frac{a}{1-a^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-k(3a^2-1)$有因式$(\sqrt{3}a-1)^2$ 而确定$(k=\frac{\sqrt{3}}{2})$的.

10. 注意到含参量的不等式$\frac{a^2}{b}\geqslant 2\lambda a-\lambda b^2$,取 $\lambda=\frac{1}{3}$,得$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}\geqslant\frac{2}{3}(a+b+c+d)-\frac{3}{9}(a+b+c+d)=\frac{1}{3}[(a+c)+(b+d)]\geqslant\frac{2}{3}\sqrt{(a+c)(b+d)}=\frac{2}{3}$.

11. 因 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的正整数,则　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$.

注意到含参量的不等式:

$$\frac{a}{b^2}\geqslant\frac{2\lambda}{b}-\frac{\lambda^2}{a^2},$$

则　$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant\left(2\lambda-\frac{\lambda^2}{a_1}\right)+\left(\frac{2\lambda}{2}-\frac{\lambda^2}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{2\lambda}{n}-\frac{\lambda^2}{a_n}\right)=2\lambda\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\lambda^2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)(2\lambda-\lambda^2)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$,$\lambda=1$ 时原不等式显然成立.

12. 设 k 为任一大于零的参数,则

$$\frac{x}{\lambda-\mu x}+k^2x(\lambda-\mu x)\geqslant 2kx,\frac{y}{\lambda-\mu y}+k^2y(\lambda-\mu y)\geqslant 2ky,\frac{z}{\lambda-\mu z}+k^2z(\lambda-\mu z)\geqslant 2kz.$$

上三式相加并整理得

$$\frac{x}{\lambda-\mu x}+\frac{y}{\lambda-\mu y}+\frac{z}{\lambda-\mu z}\geqslant 2k(x+y+z)-k^2[\lambda(x+y+z)-\mu(x^2+y^2+z^2)].\qquad (*)$$

又 $x+y+z=1$,且 $0<x,y,z<\frac{\lambda}{\mu}$,

则　$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{3}$,且 $1=x+y+z<\frac{3\lambda}{\mu}$,即 $3\lambda-\mu>0$.

于是,(*)可变为

$$\frac{x}{\lambda-\mu x}+\frac{y}{\lambda-\mu y}+\frac{z}{\lambda-\mu z}\geqslant 2k-\frac{3\lambda-\mu}{3}k^2.$$

从而,$\frac{x}{\lambda-\mu x}+\frac{y}{\lambda-\mu y}+\frac{z}{\lambda-\mu z}\geqslant\left(2k-\frac{3\lambda-\mu}{3}k^2\right)_{\max}=\frac{3}{3\lambda-\mu}$.

注　类似可以证明：

(1)(《数学通报》数学问题 912 题)设 α,β,γ 为锐角，且 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$，则
$\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha}\geqslant 1$.

(2)(1984 年巴尔干数学竞赛题)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$，求证：

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i}\geqslant\frac{n}{2n-1}$.

(3)若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 同号，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a$，求证：

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2a-a_i}\geqslant\frac{n}{2n-1}$.

13. 赋值 $x_k=\begin{cases}1,\text{如果第 }k\text{ 题结论正确},\\-1,\text{如果第 }k\text{ 题结论错误},\end{cases}$

$k=1,2,\cdots,7$. 这样当第 k 题结论正确，即 $x_k=1$. 此时，如果判断其为正确(即画了符号“√”)，则得 x_k 分；如果判断其为错误(即画了符号“×”)则得到 $-x_k$ 分；当第 k 题结论错误，即 $x_k=-1$，此时，如果判断其为正确，则得分 x_k，如果判断其为错误，则得 $-x_k$ 分，由于 A,B,C,D 各得 2 分，于是可得方程组：

$$\begin{cases}x_1+0x_2-x_3+x_4-x_5+x_6+x_7=2,\\x_1-x_2+x_3+x_4-x_5-x_6+0x_7=2,\\0x_1+x_2-x_3-x_4+x_5-x_6+x_7=2,\\-x_1-x_2-x_3+x_4+x_5+0x_6-x_7=2.\end{cases}$$

把这四个方程相加，得

$$x_1-x_2-2x_3+2x_4+0x_5-x_6+x_7=8.$$

注意到 $x_i\pm(i=1,2,\cdots,7)$，因而上式左边 $\leqslant 8$，而右边 $=8$，故有 $x_1=1,x_2=-1,x_3=-1,x_4=1,x_6=-1,x_7=1$. 把这些结果代入方程组的第一式，得 $x_5=1$，所以 7 个题中，第 1,4,5,7 题是正确的，第 2,3,6 题是错误的，于是据题设可知 E 得了 4 分.

14. 将 n 个孩子依次赋值：$a_i=\begin{cases}1,\text{当第 }i\text{ 个孩子为男孩时},\\-1,\text{当第 }i\text{ 个孩子为女孩时}.\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,n)$则相邻三个值的和

$$A_i=a_i+a_{i+1}+a_{i+2}=\begin{cases}3,a_i,a_{i+1},a_{i+2}\text{ 均为男孩},\\-3,a_i,a_{i+1},a_{i+2}\text{ 均为女孩},\\1,a_i,a_{i+1},a_{i+2}\text{ 恰有一女孩},\\-1,a_i,a_{i+1},a_{i+2}\text{ 恰有一男孩}.\end{cases}$$

$i=1,2,\cdots,n$ 且 $a_{n+1}=a_1,a_{n+2}=a_2$.

设取值为 3 的 A_i 有 c 个，取值为 -3 的 A_i 有 d 个. 依题意，取值为 1 的 A_i 有 b 个，取值为 -1 的 A_i 有 a 个，则

$$3(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(a_1+a_2+a_3)+(a_2+a_3+a_4)+\cdots+(a_n+a_1+a_2)$$
$$=(-1)a+b+3c+(-3)d=3(c-d)+(b-a).$$

故 $3\mid a-b$.

15. 设 $n-1$ 个分点为 $B_1,B_2,\cdots,B_{n-1}$，给 $A,B_1,B_2,\cdots,B_{n-1},B$ 赋值：$A=B=1$，同时

$$a_i=\begin{cases}1, B_i\text{ 为红色点},\\ -1, B_i\text{ 为蓝色点}.\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$$

则标准线段两端点对应两数之积为-1，设标准线段有 k 条，在等式

$$(Aa_1)(a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{n-1}B)=Aa_1^2a_2^2\cdots a_{n-1}^2B$$

中，左边$=(-1)^k$，右边$=AB=1=(-1)^k$. 故 k 为偶数.

16. 设 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的长为 N 的数列为 $b_1,b_2,\cdots,b_N$. 这里 $b_i\in(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$i=1,2,\cdots,N$.

建立映射

$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_N\}\rightarrow\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$.

其中 $v_j=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$. 对于每个 $j(1\leqslant j\leqslant n)$，我们赋值

$$c_i=\begin{cases}0,\text{若 } a_i \text{ 在 } b_1,b_2,\cdots,b_j \text{ 中出现偶数次},\\ 1,\text{若 } a_i \text{ 在 } b_1,b_2,\cdots,b_j \text{ 中出现奇数次}.\end{cases}$$

如果有某个 $v_j=\{0,0,\cdots,0\}$，那么，在积 $b_1,b_2,\cdots,b_j$ 中，每个 a_j 都出现偶数次，所以积为完全平方数.

如果每个 $v_i\neq(0,0,\cdots,0)$，那么，由于

$\{(c_1,c_2,\cdots,c_n)\mid c_i=0 \text{ 或 } 1, i=1,2,\cdots,n\}$，

这个集合恰有 2^n-1 个元素，由题设 $N\geqslant 2^n>2^n-1$，所以必有 h 和 $k(1\leqslant k<h\leqslant N)$满足 $v_h=v_k$. 这时，在乘积 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 中每个 a_i 出现的次数具有相同的奇偶性，从而它们的商，即乘积 $a_{k+1}a_{k+2}a_k$ 中每个 a_i 出现偶数次. 即 $a_{k+1}a_{k+2}a_k$ 为完全平方数.

17. 为叙述方便，如果一个方格中填的数大于它所在行至少 2004 个方格中所填的数，则称此格为行优的. 由于每一行中填较小的 2004 个数的格子不是行优的，所以每一行中有 $n-2004$ 个行优的. 一个方格为“优格”一定是行优的，所以棋盘中“优格”个数不大于 $n(n-2004)$.

另一方面，将棋盘的第 $i(i=1,2,3,\cdots,n)$行，第 $i,i+1,\cdots,i+2003$(大于 n 时取模 n 的余数)列中的格子填入“$*$”. 将 $1,2,3,\cdots,2004n$ 填入有“$*$”的格子，其余的数填入没有“$*$”的格子. 没有“$*$”的格子中填的数大于有“$*$”的格子中的任何一个数，所以棋盘上没有“$*$”的格子都为“优格”，共有 $n(n-2004)$个.

此时每行有 2004 个格子有“$*$”，每列也有 2004 个格子有“$*$”，如下图. 实际上，当 $1\leqslant i\leqslant 2003$ 时，第 i 列的第 $1,2,\cdots,i,n+i-2003,n+i-2002,\cdots,n$ 行中有“$*$”. 当 $i\leqslant 2004$ 时，第 i 列的第 $i-2003,i-2002,\cdots,i$ 行中有“$*$”，所以每行有 2004 个格子有“$*$”，每列也有 2004 个格子有“$*$”.

*	*	*					
	*	*	*				
		*	*	*			
			*	*	*		
				*	*	*	
					*	*	*
*						*	*
*	*						*

所以棋盘中“优格”个数的最大值是 $n(n-2004)$.

18. 首先举例说明 $N\leqslant 209$. 用正中的竖直直线将方格表分成两个 20×10 的方格表. 将 1 至 200 逐行按递增顺序填入左表中，再在右表中按同样的原则填入 201 至 400. 这样一来，在每一行中所填之数的最大差都不超过 $210-1=209$；在每一列中所填之数的最大差都不超过 $191-1=190$. 所以，$N\leqslant 209$.

再证 N 不能小于 209. 我们观察子集

$M_1=\{1,2,\cdots,91\}$ 和 $M_2=\{300,301,\cdots,400\}$.

将凡是填有 M_1 中的数的行和列都染为红色；将凡是填有 M_2 中的数的行和列都染为蓝色. 只要证明红色的行和列的数目不小于 20，而蓝色的行和列的数目不小于 21. 那么，就有某一行或某一列既被染为红色，又被染为蓝色，从而其中必有两个数的差不小于 $300-91=209$.

设有 i 行和 j 列被染为红色，于是，M_1 中的元素全都位于这些行与这些列的相交处，所以，$ij\geqslant 91$.

从而，$i+j\geqslant 2\sqrt{ij}\geqslant 2\sqrt{91}>19$.

同理，被染为蓝色的行数与列数之和

$i'+j'\geqslant 2\sqrt{i'j'}\geqslant 2\sqrt{101}>20$.

第 16 章　操作性技能

A 组

1. 填$\sqrt{2}$. 理由：

由 $10x-2xy-2y+1=0$ 有

$x^2+6x+y^2-6y-2xy+9=x^2-4x+4+y^2-4y+4$.

即 $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=|x-y+3|$,

即 $\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}}{\dfrac{|x-y+3|}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$, 故 $e=\sqrt{2}$.

2. 左端 $=\left(\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{b-1}+\dfrac{1}{c-1}\right)\cdot 1$

$$=\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}\right)\cdot\frac{(a-1)+(b-1)+(c-1)}{a+b+c-3}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a-1}\cdot\frac{1}{b-1}\cdot\frac{1}{c-1}}\cdot\frac{3\sqrt[3]{(a-1)(b-1)(c-1)}}{a+b+c-3}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{(a+b+c)^2}-3}\geqslant\frac{9}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}-3}=\frac{9}{\sqrt{3\cdot 12}-3}=3.$$

3. 填$\dfrac{4}{3}$. 理由：注意到恒等式 $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 将条件 $a+b+c=2$ 代入，得 $3(a^2+b^2+c^2)=2^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$，即 $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant 4$，则 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值是$\dfrac{4}{3}$.

4. 注意到恒等式 $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$，将 $x^2+y^2=2$ 代入此式，得 $2\times 2=2(x^2+y^2)=(x+y)^2+(x-y)^2$，

于是 $4\geqslant(x+y)^2$，$-2\leqslant x+y\leqslant 2$，

故当 $x=y=1$ 时，$(x+y)_{\max}=2$.

5. 分拆 y^2 项：$y^2=\frac{9}{10}y^2+\frac{1}{10}y^2$，于是

$$\frac{3xy+yz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{3xy+yz}{(x^2+\frac{9}{10}y^2)+(\frac{1}{10}y^2+z^2)}\leqslant\frac{3xy+yz}{2\sqrt{\frac{9}{10}}xy+2\sqrt{\frac{1}{10}}yz}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

6. $$\frac{2x^2+y^2+2z^2}{xy+\sqrt{3}yz}=\frac{(2x^2+\frac{1}{4}y^2)+(\frac{3}{4}y^2+2z^2)}{xy+\sqrt{3}yz}\geqslant\frac{2\sqrt{\frac{2}{4}}xy+2\sqrt{\frac{6}{4}}yz}{xy+\sqrt{3}yz}=\sqrt{2},$$

故当 $2x^2=\frac{1}{4}y^2$，$\frac{3}{4}y^2=2z^2$，或 $x=\frac{\sqrt{2}}{4}y=\frac{\sqrt{3}}{3}z$ 时，该函数有最小值$\sqrt{2}$.

7. $$\frac{ab+2bc+2cd+de}{a^2+3b^2+3c^2+5d^2+e^2}=\frac{ab+2bc+2cd+de}{(a^2+b^2)+(2b^2+2c^2)+(c^2+4d^2)+(d^2-e^2)}$$
$$\leqslant\frac{ab+2bc+2cd+de}{2ab+4bc+4cd+2de}=\frac{1}{2},$$

故当 $a=b=c=2d=2e$ 时，该函数最大值为$\frac{1}{2}$.

8. $$原式=\sin\alpha\cdot\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)+2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}\right)+\cdots+2^{n-1}\cdot\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}\left(\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin2\alpha\right)+\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)+\cdots+\left(2^{n-2}\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}-2^{n-3}\sin\frac{\alpha}{2^{n-2}}\right)$$
$$=2^{n-2}\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\frac{1}{4}\sin2\alpha.$$

9. 问题等价于　$\cos2\theta-3>2m\cos\theta-4m$.

因　$2-\cos\theta\in[1,3]$，

则　$m>\frac{2-\cos^2\theta}{2-\cos\theta}=2+\cos\theta-\frac{2}{2-\cos\theta}=4-[(2-\cos\theta)+\frac{2}{2-\cos\theta}]$.

令 $t=2-\cos\theta$，则　$t\in[1,3]$.

原问题等价于 $t+\frac{2}{t}>4-m$ 恒成立.

当 $t\in[1,3]$时，$t+\frac{2}{t}\geqslant2\sqrt{2}$，

故　使原问题恒成立时，$m>4-2\sqrt{2}$.

10. 不妨先考虑证明 $0\leqslant x_n\leqslant\frac{2a}{n}$，由题设知：$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2=\frac{a^2}{n-1}-x_n^2$，$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}=a-x_n$；由柯西不等式，考虑 $n-1$ 个变量，有$(n-1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2)\geqslant(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})^2$，即

$(n-1)\left(\frac{a^2}{n-1}-x_n^2\right)\geqslant(a-x_n)^2$，或　$nx_n^2-2ax_n\leqslant0$，解得 $0\leqslant x_n\leqslant\frac{2a}{n}$；

同理有 $0\leqslant x_i\leqslant\frac{2a}{n}(i=1,2,\cdots,n-1)$.

故原不等式获证.

B组

1. 左端$=\left(\frac{a^5}{5}+\frac{a^5}{5}+\frac{a^5}{5}+\frac{b^5}{5}+\frac{c^5}{5}\right)+\left(\frac{a^5}{5}+\frac{b^5}{5}+\frac{b^5}{5}+\frac{b^5}{5}+\frac{c^5}{5}\right)+\left(\frac{a^5}{5}+\frac{b^5}{5}+\frac{c^5}{5}+\frac{c^5}{5}+\frac{c^5}{5}\right)$

$$\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{a^{15}b^5c^5}{5^5}}+5\sqrt[5]{\frac{a^5b^{15}c^5}{5^5}}+5\sqrt[5]{\frac{a^5b^5c^{15}}{5^5}}=a^3bc+ab^3c+abc^3.$$

2. 因$\frac{a^{2t}}{b^t-1}+\frac{b^{2t}}{a^t-1}+4(b^t-1)+4(a^t-1)=\left[\frac{a^{2t}}{b^t-1}+4(b^t-1)\right]+\left[\frac{b^{2t}}{a^t-1}+4(a^t-1)\right]$
$\geqslant 4a^t+4b^t$,

故 $\frac{a^{2t}}{b^t-1}+\frac{b^{2t}}{a^t-1}\geqslant 4a^t-4(b^t-1)-4(a^t-1)=8$.

3. 取正数 t 为参数,并令不等式的左端为 M,由 $a^2+(b-1)^2t^2\leqslant 2a(b-1)t$ 及 $b-1>0$,得
$\frac{a^2}{b-1}\geqslant 2at-(b-1)t^2$.

同理 $\frac{b^2}{c-1}\geqslant 2bt-(c-1)t^2$,$\frac{c^2}{a-1}\geqslant 2ct-(a-1)t^2$.

把上面三个不等式相加,并整理得
$M\geqslant(a+b+c)(2t-t^2)+3t^2$.
令 $2t-t^2=0$,并注意到 $t>0$ 得 $t=2$,
$\therefore M\geqslant(a+b+c)\cdot 0+3\cdot 2^2=12$.

4. 令 $b+c-a=2x,c+a-b=2y,a+b-c=2z,x、y、z>0$,则 $a=y+z,b=z+x,c=x+y$.

则在端$=\sqrt{\frac{y+z}{2x}}+\sqrt{\frac{z+x}{2y}}+\sqrt{\frac{x+y}{2z}}\geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{y+z}{2x}}\cdot\sqrt{\frac{z+x}{2y}}\cdot\sqrt{\frac{x+y}{2z}}}$

$$=3\sqrt[6]{\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{8xyz}}\geqslant 3\sqrt[6]{\frac{(2\sqrt{yz})(2\sqrt{zx})(2\sqrt{xy})}{8xyz}}=3\sqrt[6]{\frac{8xyz}{8xyz}}=3.$$

5. 引入参数 $t>0$,分拆 y^2 项:$y^2=ty^2+(1-t)y^2$,此时,有
$x^2+y^2+z^2=(x^2+ty^2)+[(1-t)y^2+z^2]\geqslant 2\sqrt{t}xy+2\sqrt{1-t}yz$;注意到分母 $2xy+yz$,可令 $2\sqrt{t}$ $:2\sqrt{1-t}=2:1$,从而解得 $t=\frac{4}{5}$,$1-t=\frac{1}{5}$,拆项为

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2xy+yz}=\frac{(x^2+\frac{4}{5}y^2)+(\frac{1}{5}y^2+z^2)}{2xy+yz}\geqslant\frac{2\sqrt{\frac{4}{5}}xy+2\sqrt{\frac{1}{5}}yz}{2xy+yz}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

当 $x^2=\frac{4}{5}y^2=4z^2$ 时,该式有最小值$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

6. 已知式可写为 $a(x-y)(x-z)-b(x-y)[(x-z)-(x-y)]-c(x-z)[(x-y)-(x-z)]\geqslant 0$,
即 $b(x-y)^2+(a-b-c)(x-y)\cdot(x-z)+c(x-z)^2\geqslant 0$. ①
即对任意实数 $x、y、z$ 恒成立,现令 $x=z$ 得 $b\geqslant 0$,同理可得 $a\geqslant 0,c\geqslant 0$.

当 $x\neq z$ 时，①式可变形为

$$b\left(\frac{x-y}{x-z}\right)^2+(a-b-c)\cdot\frac{x-y}{x-z}+c\geqslant 0, \quad ②$$

即 ②式对任意实数 $\frac{x-y}{x-z}$ 恒成立，

∴ 若 $b>0$，则 $\Delta=(a-b-c)^2-4bc\leqslant 0$，

即 $a^2+b^2+c^2\leqslant 2(ab+bc+ca)$. ③

若 $b=0$，则须 $a=c\geqslant 0$，由(1)式的对称性，同时有 $a\geqslant 0, c\geqslant 0$，及不等式③成立.

综上可知，实数 a、b、c 应满足：

$a^2+b^2+c^2\leqslant 2(ab+bc+ca)$，且 $a\geqslant 0, b\geqslant 0, c\geqslant 0$.

7. 先证其代数和为奇数. 考虑全添上"+"号调换为"−"号这一初始状态，显然此时 $1+2+\cdots+1989=995\cdot 1989$ 是奇数，而对一般情形，只要将其中若干个"+"号调为"−"号可得. 由于 $a+b$ 与 $a-b$ 奇偶性相同，故每次调整，其代数和的奇偶性不变，即总是奇数. 而 $1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+\cdots+(1986-1987-1988+1989)=1$，所以这个最小数是 1.

8. 显然，$f(1)=1$，若 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 原不等式显然成立.

若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全相等时，则其中必有 $x_i>1, x_j<1$，由对称性知，可设 $i=1, j=2$，则

$$f(x_1)f(x_2)=(ax_1^2+bx_1+c)(ax_2^2+bx_2+c)$$
$$=a^2x_1^2x_2^2+b^2x_1x_2+c^2+xb(x_1^2x_2+x_1x_2^2)+ac(x_1^2+x_2^2)+bc(x_1+x_2). \quad ①$$

$$f(1)f(x_1x_2)=(a+b+c)(ax_1^2x_2^2+bx_1x_2+c)$$
$$=a^2x_1^2x_2^2+b^2x_1x_2+c^2+ab(x_1^2x_2^2+x_1x_2)+ac(x_1^2x_2^2+1)+bc(x_1x_2+1). \quad ②$$

①−②即得

$$f(x_1)f(x_2)-f(1)f(x_1x_2)$$
$$=abx_1x_2(x_1+x_2-x_1x_2-1)+ac(x_1^2+x_2^2-x_1^2x_2^2-1)+bc(x_1+x_2-x_1x_2-1)$$
$$=-abx_1x_2(x_1-1)(x_2-1)-ac(x_1^2-1)(x_2^2-1)-bc(x_1-1)(x_2-1)>0.$$

注意上式中每项的两个括号中的因式都是异号的，由此可见，在变换 $x'_1=1, x'_2=x_1x_2, x'_k=x_k$ $(k=3,\cdots,n)$ 之下，有

$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)>f(x'_1)f(x'_2)\cdots f(x'_n)$.

如果 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n$ 不全相等，则又可进行类似的变换调整，而且每次调整都使 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中等于 1 的个数至少增加一个，所以，至多进行 $n-1$ 次调整，必可化为诸 x_i 全相等的情形，从而有 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)>[f(1)]^n=1$.

9. 记所有红(蓝)点到 $A(B)$ 的距离之和为 $S_{红}(S_{蓝})$. 考察这样一种极端情形：n 个蓝点均在 M 点的左边，n 个红点均在 M 点的右边. 此时，显然有 $S_{红}=S_{蓝}$.

对于一般的情形，即 n 个蓝点与 n 个红点呈非对称分布，则 M 点左边至少有一个红点 C，M 点右边至少有一个蓝点 D. 我们取 M 点左边任一红点改涂成蓝点，将 M 点右边任一蓝点改涂成红点，其余各点颜色不变，则涂染的红点到 A 的距离总和为 $S'_{红}=S_{红}+CD$，涂染的蓝点到 B 的距离总和为 $S'_{蓝}=S_{蓝}+CD$. 从而

$S'_{红}-S'_{蓝}=S_{红}-S_{蓝}$

是常量. 于是，经过有限次这样的调整，可将这 $2n$ 个点调整到前面的那种极端情形. 因而结论成立.

10. 进行适当地调整，总可以使 $\{b_i\}$，$\{a_i\}$ 具有相反的大小顺序，不妨设 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，$a_1\leqslant$

$a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，则 $A_1\geqslant A_2\geqslant\cdots\geqslant A_n$.

由排序原理知 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_iA_i$ 最大.

因为 $0\leqslant b_i\leqslant p$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=1$，$\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant 1$，所以

$$\sum_{i=1}^{n}b_iA_i\leqslant pA_1+(b_2+\cdots+b_n)A_2$$
$$=pA_1+(1-b_1)A_2\leqslant pA_1+(1-p)A_2=a_3a_4\cdots a_n[pa_2+(1-p)a_1]\leqslant a_3a_4\cdots a_n(a_1+a_2)p.$$

由均值不等式及 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$ 可得

$$a_3a_4\cdots a_n(a_1+a_2)\leqslant\sqrt[n-1]{\frac{a_3+\cdots+a_n+(a_1+a_2)}{n-1}}=\frac{1}{(n-1)^{n-1}},$$

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_iA_i\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}}$.

[G e n e r a l   I n f o r m a t i o n]
书名＝解题金钥匙系列　　高中数学
作者＝沈文选主编
页数＝４０９
ＳＳ号＝１１６７６９８８
ＤＸ号＝
出版日期＝２００６年４月
出版社＝湖南师范大学出版社

3．分拆
4．排序
5．逐步调整

解题尝试参考解答